分析概率论与随机过程

习题解析

哈尔滨工业大学出版社

分析概率论与随机过程习题解析

王道益　刘智慧　刘禄勤　编

中国科学院科学基金资助的课题

哈尔滨工业大学出版社

分析概率论与随机过程习题解析

王道益　刘智慧　刘禄勤　编

•

哈尔滨工业大学出版社出版

新华书店首都发行所发行

哈尔滨工业大学印刷厂印刷

•

开本 850×1168　1/32　印张10　字数259 000

1987年11月第1版　1987年11月第1次印刷

印数1—6000

书号 13341·23　定价 2.00元

ISBN 7-5603-0009-X/O·2

序　　言

概率论是数学的一个有特色的分支，它的思想方法别具一格，它所研究的课题别开生面，它的解题技巧更是多种多样．目前，它的理论和方法已广泛应用于工业、农业、军事和科学技术中．可以说，概率论的理论和方法向各个基础学科、工程学科的渗透，已是近代科学技术发展的特征之一．目前，高等学校理科、工科、医科和经济类许多专业的教学计划中都设置了基础概率论和随机过程课程，越来越多的同志需要学习这一理论和方法．为了满足大家学习和教学的需要，我们编写了此书．

本书收集的习题以胡迪鹤教授所著的《分析概率论》（科学出版社，1984）、《应用随机过程引论》（哈尔滨工业大学出版社，1984）、《随机过程概论》（武汉大学出版社出版，1986）等三本书所附的习题为基本内容，并参照国内外的有关书籍，适当选编增补了一些习题．全书共收集习题 249 道，在扼要复习基本定义与主要定理的基础上，对全部习题给出了详细的解答．

全书共分三篇，各篇的内容基本上相互独立．第一篇为“分析概率论”，属于经典极限理论方面的内容，它是初等概率论的继续．第二篇是“随机过程初步”．本篇主要涉及随机过程的基本概念，给出了与许多具体而重要的随机过程有关的题目，尤其收集了一些与实际应用有关的问题．解答这篇的习题，只需掌握微积分、初等概率论和少量线性代数的知识即可．这一篇的内容对应用数学工作者及工科院校的学生尤为适用，并为那些准备研究随机过程一般理论的读者提供了十分重要的背景资料．第三篇是“随机过程概论”，收集了一些现代随机过程理论（如马氏过

程、平稳过程、鞅、随机微分方程、布朗（Brown运动）方面的问题，它所涉及的数学内容较深，但这些对于有志于随机过程研究的读者来说又是必须掌握的.

各篇由若干小节组成. 在每节前，我们先简要地综述了有关的概念和结论. 书前有统一的“记号和约定，”书后附有参考文献.

本书的读者对象是：高等院校理科、工科和经济类有关专业的高年级大学生、研究生、青年教师及有关的科技工作者. 它特别适合于从事概率论和随机过程教学工作的同志阅读.

本书在编写和定稿过程中胡迪鹤教授自始至终都给予热情的关心和细致的指导，并仔细审阅了全部初稿，提出了修改意见. 对此，我们表示衷心的感谢.

由于我们学识浅薄，书中缺点错误在所难免，恳请读者批评指正.

作 者

1985年12月于武汉大学

目　　录

记 号 和 约 定

$\equiv$	恒等于
$\triangleq$	定义
ϕ	空集
$\overline{A}$	A的补集
A^c	A的闭包
A^o	A的内部
$A_n \uparrow A$	$A_n \subset A_{n+1} (n \geqslant 1)$ 且 $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$
$A_n \downarrow A$	$A_n \supset A_{n+1} (n \geqslant 1)$ 且 $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$
$\lim_n \sup A_n$	上限集，即 $\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$
$\lim_n \inf A_n$	下限集，即 $\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$
$\{A_n, \text{ i.o. }\}$	$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$
I_A	A的示性函数，即 $I_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \overline{\in} A. \end{cases}$
$f: A \mapsto B$	由A到B的映射f
$x \mapsto f(x)$	在 x 的值为 $f(x)$ 的映射f
$f \circ g$	复合映射，即 $x \mapsto f(g(x))$
$f(\cdot)$	映射f
$f(x, \cdot)$	二元映射 f 的偏映射
$f^{-1}(A)$	A在 f 下的逆象
$f^{-}(\mathbf{B})$	$\{f^{-1}(B): B \in \mathbf{B}\}$
$a \vee b$	$\max(a,b)$

$a \wedge b$ $\min(a,b)$

$[a]$ 不超过 a 的最大整数

$\overline{a}$ a的复共轭

$\mathbb{Q}$ 有理数集

$\mathbb{R}$ 实数集

$\mathbb{C}$ 复数集

$\overline{\mathbb{R}}$ 广义实数集

$\overline{\mathbb{B}}$ $\overline{\mathbb{R}}$ 上的波莱尔（Borel）集全体

$\mathbb{B}_{[a,b]}$ $[a,b]$ 上的波莱尔集全体

$\mathbb{B}_{+}$ $[0,\infty)$ 上的波莱尔集全体

$\mathbb{R}^n$ n 维欧氏空间

$\mathbb{B}^n$ n 维波莱尔 σ 代数

$\limsup_n a_n$ $\{a_n, n\geqslant 1\}$ 的上极限，即 $\inf_{n\geqslant 1} \sup_{m\geqslant n} a_m$

$\liminf_n a_n$ $\{a_n, n\geqslant 1\}$ 的下极限，即 $\sup_{n\geqslant 1} \inf_{m\geqslant n} a_m$

f^+ f 的正部，即 $f\vee 0$

f^- f 的负部，即 $(-f)\vee 0$

$\mathrm{sgn}(x)$ 符号函数，即 $\mathrm{sgn}(x)=\begin{cases} 1, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ -1, & x<0. \end{cases}$

δ_{ij} 克罗内克尔（Kronecker）符号，即 $\delta_{ij}=\begin{cases} 1, & i=j, \\ 0. & i\neq j. \end{cases}$

$y_n = 0(x_n)$ $\frac{y_n}{x_n}\to 0$

$y_n = 0(x_n)$ $\frac{y_n}{x_n}$是有界量

ln 自然对数

log 以任意数为底的对数

C_n^k　从 n 个元素中取出 k 个的组合数

$\sigma(\mathbf{A})$　由 **A** 生成的 σ 代数

$d(\mathbf{A})$　由 **A** 生成的 d 系

$m(\mathbf{A})$　由**A**生成的单调类

$\sigma(X_1, \cdots, X_n)$　由映射 $X_1, \cdots, X_n$ 生成的 σ 代数

$\mathbf{B}(E)$　E 上的波莱尔 σ 代数

$\mathbf{E}^\mu$　**E** 关于 μ 的完备化 σ 代数

$\mathbf{E}^*$　**E** 的普遍完备化 σ 代数

$\int_E f d\mu$、$\int_E f(x)\mu(dx)$、$\int_E \mu(dx) f(x)$　f在E上关于μ的积分

c.f.　特征函数

d.f.　分布函数

d′.f.　准分布函数

r.v.　随机变量

r.v.s.　随机变量序列

i.d.　无穷可分

i.i.d.　相互独立具有相同分布

a.e.　几乎处处

μ-a.e.　关于μ几乎处处

$X_n \to X$ 〔P〕、$\lim\limits_n X_n = X$ 〔P〕　X_n 依概率收敛于X

$X_n \to X$ 〔d〕、$\lim\limits_n X_n = X$〔d〕　X_n 依分布收敛于X

$X_n \to X$ 〔a.e.〕、$\lim\limits_n X_n = X$ 〔a.e.〕　X_n 几乎处处收敛于X

$f_n \to f$ 〔μ-a.e.〕、$\lim\limits_n f_n = f$ 〔μ-a.e.〕　f_n 关于 μ 几乎处处收敛于f

$F_n(x) \xrightarrow{C} F(x)$　$F_n(x)$ 全收敛于 $F(x)$

$F_n(x) \xrightarrow{W} F(x)$　$F_n(x)$ 弱收敛于 $F(x)$

$E(X)$　X 的期望，即$\int_\Omega X dP$

$D(X)$　X 的方差

$\mathrm{Cov}(X,Y)$　X和Y的协方差

$E(X;\Lambda)$　$\int_\Lambda X dP$

$\|X\|_p$　　$(\int_\Omega |X|^p dP)^{1/p}$

$L^p(\Omega,\mathbf{F},P)$　　满足 $\int_\Omega |X|^p dP<\infty$ 的 X 全体，按范数 $\|\cdot\|_p$ 成为巴拿赫（Banach）空间

$X_n\to X\ [L^p]$、$\lim\limits_n X_n = X\ [L^p]$　　X_n 依范数 $\|\cdot\|_p$ 收敛于 X

$\in_x$　　集中在 x 点的概率测度，即 $\in_x(A)=\begin{cases}1, & x\in A,\\ 0, & x\overline{\in} A.\end{cases}$

$F*G$　　F 和 G 的卷积

$\mathbf{L}(X)$　　X 的分布函数

$N(\mu,\sigma^2)$　　期望为 μ 方差为 σ^2 的正态分布

$E(X|\mathbf{G})$　　X关于$\mathbf{G}$的条件期望

$E(X|Y)$　　X关于 $\sigma(Y)$ 的条件期望

$P(A|\mathbf{G})$　　A 关于 $\mathbf{G}$ 的条件概率，即 $E(I_A|\mathbf{G})$

$P(A|B)$　　A 在给定 B 下的条件概率，即$P(A\cap B)/P(B)$ $(P(B)>0)$

$E^x(X)$、$E^x(X|\mathbf{G})$　　关于概率测度 P^x 的期望和条件期望

μf^{-1}　　测度 $\mu(f^{-1}(\cdot))$

$\bigvee\limits_{i\in\Lambda}\mathbf{F}_i$　　$\sigma(\bigcup\limits_{i\in\Lambda}\mathbf{F}_i)$

$f\in\mathbf{E}/\mathbf{D}$　　$f^{-1}(\mathbf{D})\subset\mathbf{E}$

$f\in\mathbf{E}$　　$f\in\mathbf{E}/\overline{\mathbf{B}}$

$f\in r\mathbf{E}$　　$f\in\mathbf{E}$ 且 f 实值，即 $f\in\mathbf{E}/\mathbf{B}^1$

$f\in b\mathbf{E}$　　$f\in\mathbf{E}$ 且 f 有界

$f\in\mathbf{E}_+$　　$f\in\mathbf{E}$ 且 $f\geqslant 0$

$\mathbf{F}_\tau$　　停时 τ 前 σ 代数

$\mathbf{F}_{t+}$　　$\bigcap\limits_{s>t}\mathbf{F}_s$

$P(s,x,t,A)$、$P(t,x,A)$　　（准）转移函数

$(s)\int_\Omega XdP$　　波赫纳（Bochner）积分

$(s)E(X|\mathbf{G})$　　强条件期望

$\|\cdot\|$　　巴拿赫空间中的范数

$(s)\ \lim f_n$ 强极限，即依范数 $\|\cdot\|$ 收敛

$\inf \phi \triangleq \infty$

$a+\infty \triangleq \infty + a \triangleq \infty$， $a-\infty \triangleq -\infty + a \triangleq -\infty$， $(a \in \mathbf{R}^1)$

$\infty + \infty \triangleq \infty$， $-\infty - \infty \triangleq -\infty$

$$b \cdot \infty \triangleq \infty \cdot b \triangleq \begin{cases} \infty, & b \in \overline{\mathbf{R}} \text{ 且 } b>0 \\ -\infty, & b \in \overline{\mathbf{R}} \text{ 且 } b<0 \end{cases}$$

$0 \cdot \infty \triangleq \infty \cdot 0 \triangleq 0$

$\dfrac{a}{\infty} \triangleq \dfrac{a}{-\infty} \triangleq 0$， $(a \in \mathbf{R}^1)$

$a+B \triangleq \{a+b:\ b \in B\}$

$A+B \triangleq \{a+b:\ a \in A,\ b \in B\}$

$A+b \triangleq \{a+b:\ a \in A\}$

第一篇　分析概率论

§ 1.1　$\mathbf{R}^N$上的L-S测度及其弱收敛性

内　容　提　要

一、$\mathbf{R}^N$ 上的点函数及其产生的测度

定义 1.1　设 $F(x)=F(x_1,\ \cdots,\ x_N)$ 是定义在 $\mathbf{R}^N$ 上的点函数，称 $F(x)$ 为 $\mathbf{R}^N$ 上的典范函数，如果它满足下述三点：

(c_1)　$F(x)$ 是实值函数；

(c_2)　对任何 N 维非空区间 $I=[a,b)=[a_1,\ b_1;\ \cdots;a_N,\ b_N)$ 有

$$F(I)\triangleq F(b_1,\ \cdots,\ b_N)-[F(a_1,\ b_2,\ \cdots,b_N)+\cdots$$
$$+F((b_1,\cdots,\ b_{N-1},a_N)]+\cdots+(-1)^N F(a_1,\cdots,a_N)\geqslant 0;$$

(c_3)　$F(x)=F(x_1,\ \cdots,\ x_N)$ 对每一个 $x_i(1\leq i\leq N)$ 皆左连续．

若进一步，$F(x)$ 还满足：

(c_4)　$\lim\limits_{x_i\to-\infty} F(x_1,\ \cdots,\ x_N)=0,\quad (1\leq i\leq N)$；

(c_5)　$\lim\limits_{\substack{x_i\to\infty\\ 1<i<N}} F(x_1,\ \cdots,\ x_N)\leqslant 1,$

则称 $F(x)$ 为 $\mathbf{R}^N$ 上的准分布函数．特别，当 (c_5) 中等号恒成立时，称 $F(x)$ 为分布函数．

定理 1.1　设 $F(x)$ 是 $\mathbf{R}^N$ 上的一个典范函数，任取 $I=$

$a_1, b_1, \cdots; a_N, b_N) \in I_N \triangleq \{[a,b): a、b \in \mathbf{R}^N, a \leqslant b\}$，定义

$$F(I) \triangleq 0, \quad (若 I = \Phi);$$

$$F(I) \triangleq F(b_1, \cdots, b_N) - [F(a_1, b_2 \cdots, b_N) + \cdots + F(b_1, \cdots, b_{N-1}, a_N)] + \cdots + (-1)^N F(a_1, \cdots, a_N). \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1.1)$$

则 F 是半环 $\mathbf{I}_N$ 上的有限测度，从而可唯一地扩张为 $\mathbf{B}^N$ 上的测度，仍记之为 F。通常称此 F 为由典范函数 $F(x)$ 所产生的 $L-S$ 测度。

二、$\mathbf{R}^N$ 上的测度的弱收敛性

定义 1.2 (i) 设 F 是 $\mathbf{B}^N$ 上的测度，$A \in \mathbf{B}^N$ 称为 F 的连续集，如果 $F(A) = F(A^c) = F(A^o)$。特别地，当 $I \in \mathbf{I}_N$ 满足上述等式时，则称 I 为 F 的连续区间。

(ii) 设 $D \subset \mathbf{R}^1$，称区间 $I = [a_1, b_1; \cdots; a_N, b_N)$ 为D区间，如果 $a_i, b_i \in D$ $(1 \leqslant i \leqslant N)$。

定义 1.3 设 F_n $(n \geqslant 1)$，F 是 $\mathbf{B}^N$ 上的测度，$F_n(I) < \infty$ $(n \geqslant 1)$，$F(I) < \infty$ $(I \in \mathbf{I}_N)$，称 $\{F_n\}$ 弱收敛于 F，如果对 F 的任意连续区间I均有

$$\lim_n F_n(I) = F(I).$$

此时，简记之为$F_n \xrightarrow{W} F$。

若进一步还假定 $F_n(\mathbf{R}^N) \leqslant M < \infty$，$(n \geqslant 1)$，且 $F_n(\mathbf{R}^N) \to F(\mathbf{R}^N)$，$F_n \xrightarrow{W} F$，则称 $\{F_n\}$ 全收敛于 F，记作 $F_n \xrightarrow{C} F$。

定理 1.2 若 $\{F_n\}$ 是 $\mathbf{B}^N$ 上的测度列，而且对任何固定的 $I \in \mathbf{I}_N$，$\{F_n(I), n \geqslant 1\}$ 有界为$G(I)$，则 $\{F_n\}$ 有弱收敛子列。

系 1.1 设 $\{F_n\}$ 满足定理 1.2 的全部条件。若 $\{F_n\}$ 不弱收敛，则 $\{F_n\}$ 必存在两个弱收敛子列，它们收敛到不同的极限。

定理 1.3 设 $F_n \xrightarrow{W} F$，则

(i) $\liminf\limits_{n} F_n(E) \geqslant F(E)$（$E$为开集）；

(ii) $\limsup\limits_{n} F_n(E) \leqslant F(E)$（$E$ 为有界闭集）；

(iii) $\lim\limits_{n} F_n(A) = F(A)$ （A为F的有界连续集）。

定理 1.4 设 $F_n \xrightarrow{C} F$，A 为 F 的连续集，则 $\lim\limits_{n} F_n(A) = F(A)$。

三、海来（Helly）定理

定理 1.5 设$F_n \xrightarrow{W} F$，$g(x)$ 在 $\mathbf{R}^N$ 上连续，I 是 F 的连续区间，则

$$\lim_{n} \int_I g(x)dF_n(x) = \int_I g(x)dF(x). \qquad (1.2)$$

定理 1.6 设$F_n \xrightarrow{W} F$，$F_n(\mathbf{R}^N) \leqslant M$，$F(\mathbf{R}^N) \leqslant M$ $(n \geqslant 1)$，$g(x)$ 在 $\mathbf{R}^N$ 上连续且 $\lim\limits_{|x| \to \infty} g(x) = 0$，则

$$\lim_{n} \int_{R^N} g(x)dF_n(x) = \int_{R^N} g(x)dF(x). \qquad (1.3)$$

定理 1.7 设$F_n \xrightarrow{C} F$，$g(x)$ 在 $\mathbf{R}^N$ 上连续，$|g(x)| \leqslant M$，$(x \in \mathbf{R}^N)$，则

$$\lim_{n} \int_{R^N} g(x)dF_n(x) = \int_{R^N} g(x)dF(x). \qquad (1.4)$$

习 题

1.1 试举例说明 $\mathbf{R}^2$ 中实值函数 $F(x_1, x_2)$ 满足条件(C_2)与其关于每个分量单调之间互不蕴含。

1.2 设 $F(X)$ 是 $\mathbf{R}^N$ 中任意实值函数，在 $\mathbf{I}_N$ 上定义集函数 F 如定理 1.1. 试证 F 在 $\mathbf{I}_N$上存在有限可加性。

1.3 设 $F(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}^N$ 中有理点集 Q 上满足 (c_1)、(c_2) 的实值函数. 对任意有理区间 I，定义 $F(I)$ 如 (1.1)