# 模糊数学

楼世博　孙　章　陈化成　编著

## 内 容 简 介

用模糊集合代替经典集合，在各数学分支的模糊化上有着诱人的前景，应用模糊数学将会出现新的一代能处理模糊事物的控制系统，为模式识别、人工智能、信息检索和生物医学等方面提供新的方法.

本书深入浅出地介绍了模糊数学的基本概念、基本方法和在各个领域中的应用.

本书可供理工科大专院校师生、工程技术人员及具有中等文化程度的读者阅读.


**模 糊 数 学**

楼世博 孙 章 陈化成 编著

责任编辑 陈永锵 毕 颖

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经

*

1983年8月第一版 开本：787×1092 1/32

1983年8月第一次印刷 印张：5 7/8

印数：0001—28,800 字数：132,000

统一书号：13031·2332

本社书号：3193·13—1

定价：0.75元

# 目　　录


第一章　模糊中见光明 …………………………………… 1
§1.1　模糊并非罪过 …………………………………… 1
§1.2　电脑与人脑 …………………………………… 2
§1.3　随机性与模糊性 …………………………………… 5
§1.4　模糊数学的兴起 …………………………………… 10
第二章　模糊集合 ……………………………………13
§2.1　普通集合 …………………………………… 13
§2.2　子集合 …………………………………… 15
§2.3　模糊子集 …………………………………… 18
§2.4　集合的运算 …………………………………… 22
§2.5　模糊集合的运算 …………………………………… 27
第三章　模糊关系 ……………………………………35
§3.1　关系 …………………………………… 35
§3.2　函数与映射 …………………………………… 37
§3.3　模糊关系 …………………………………… 41
§3.4　矩阵 …………………………………… 42
§3.5　模糊矩阵 …………………………………… 48
第四章　模糊逻辑和模糊语言 ……………………………………58
§4.1　二值逻辑 …………………………………… 59
§4.2　模糊逻辑函数 …………………………………… 65
§4.3　模糊逻辑函数的范式 …………………………………… 70
§4.4　语言的模糊性 …………………………………… 72
§4.5　模糊算子 …………………………………… 75
§4.6　模糊推理 …………………………………… 78
第五章　模式识别 ……………………………………82

§5.1 模式识别 …………………………………………… 82
§5.2 个体识别 …………………………………………… 83
§5.3 群体的识别 ………………………………………… 94
第六章 聚类分析………………………………………… 103
§6.1 物以类聚 …………………………………………… 103
§6.2 辨清一家人 ………………………………………… 109
§6.3 利用模糊关系进行分类 …………………………… 112
§6.4 软划分 ……………………………………………… 117
§6.5 模糊聚类分析与模式识别的区别 ………………… 124
第七章 模糊自动控制………………………………… 127
§7.1 模糊自动控制的意义 ……………………………… 127
§7.2 基本工作原理 ……………………………………… 129
§7.3 实用的模糊控制器 ………………………………… 139
§7.4 模糊控制的发展概况 ……………………………… 142
第八章 其它应用………………………………………… 145
§8.1 模糊概率 …………………………………………… 145
§8.2 模糊分类用于信息检索 …………………………… 150
§8.3 模糊决策 …………………………………………… 160
§8.4 模糊综合评判 ……………………………………… 172

# 第一章　模糊中见光明

## §1.1　模糊并非罪过

我们要避免模糊，力求精确——人们往往会不加思索地这样说．在人类社会的早期，混沌初开，生产力十分低下，人们只能依靠狩猎勉强维持生存．对于二个以上的数量的认识，只掌握了多、许多和非常多等模糊概念．随着生产力的不断提高，出现了商品交换，才开始用手指、小石子等进行计数．以自然数的使用为起点，数学开始了它的光辉历程，终于赢得了"科学皇冠"的美名．从心中无数到心中有数，这是一个伟大的飞跃．从这一阶段来看，模糊曾作为精确的对立面，代表着落后的生产力．

古代的人们已经会利用模糊现象来解决问题．古希腊的《伊索寓言》中，就有一则这样的故事．一次，伊索的主人醉后狂言，跟人打赌发誓说："我能喝干大海，并以我的全部财产和奴隶作赌注"．次日，他酒醒后懊悔莫及．但这一消息已轰动全城，人们聚集在海边等候着他．他不得不求助于聪明的伊索，伊索在讲好条件后给他出了个主意．主人听后如获至宝，急忙飞奔到海边，对蜂拥在那里的人群大声喊道："现在，我要再说一遍，我能喝干整个大海．可是如今千万条江河汇入大海，海水里混杂了许多河水，如果有谁能把河水与海水分开，我就能把真正的大海喝干！"伊索朴素地应用了模糊语言学，帮助主人度过了难关．因为"海水"是个模糊概念，所以人们给它下定义时，往往会漏洞百出．同样，在"水果"和"蔬

菜”之间；“过去、现在、将来”之间，也都没有一条截然分明的界线．只要我们稍加观察，就会发现在我们日常生活中，存在着大量的诸如上面所例举的模糊语言．

历史的长河川流不息，当今的世界已进入电子计算机时代．电子计算机对社会生活的各方面，正产生日益深远的影响．科学的社会化，社会的科学化，使人们开始用新的眼光来看待一切．对于“模糊”这个概念，我们也得刮目相看．

“精确”永远是那样完美无缺，而“模糊”难道又总要力求避免吗？

我们先来看一些例子．当我们判断走过来的人是谁时，只要把来人的高矮、胖瘦、走路姿势等，与储存在大脑中的样本进行比较，我们就不难得到正确的结论．可是这种事让电子计算机来做，那就得测量来人的身高、体重、手臂摆动的角度、频率、速度、加速度等一大批数据，而且非要精确到小数点后几十位才能罢休．这样大搞烦琐哲学，已使精确走向它的反面，甚至会闹出“翻脸不认人”的笑话来——因为人体的各种数据并不是恒定不变的．由人脑的判别过程可知，我们恰恰是在模糊中找见了光明．一定程度的模糊，倒使我们能较易得出了走过来的是谁这一清晰结论．这里充满了活的辩证法：精确兮，模糊所伏；模糊兮，精确所依．

因此，对模糊信息的利用并不是一种罪过，恰恰相反，这种能力正是大自然对人类的一种恩赐．为了说明这一点，我们应该把人脑与电脑作一番比较．

## §1.2 电脑与人脑

电脑，是人们在电子计算机诞生后不久给它起的“小名”和“爱称”．然而，要是电子计算机真有灵感，它一定会受宠若

惊．因为如果把人脑比作“脑海”，则电脑只不过是一条小河，它一定会对人脑“望洋兴叹”的．

## 巧夺天工的电脑

当然，电子计算机确有胜过人脑之处．例如，它的运算速度快得惊人，以百万分之一，千万分之一，甚至亿分之一秒计算．而人脑的基本反应时间最快也要千分之一秒．人的脑神经细胞发出的电——化学脉冲，传感速度最快也不过每秒一百米，而且两次脉冲之间的间隔要百分之一秒．而电子计算机中的电脉冲以光速传送，每秒接近三十万公里．电脑在运算速度上的压倒优势，是人脑所远远不能及的．

精确，是计算机的另一长处．英国人辛克斯曾花了十五年时间，将圆周率算到了小数点后七百零七位，他将此引以为傲，坚持要求将结果刻在他的墓碑上．而现在，即使是速度不很快的计算机，也要不了几个小时就能算到十万位小数．结果发现，辛克斯实际上算错了后面的许多位．莱布尼兹在一六七一年曾大为感叹：“让一些杰出人才象奴隶般地把时间浪费在计算工作上是不值得的！”要是莱布尼兹能见到今天的电脑，他该是多么高兴啊．

电子计算机还有惊人的“记忆力”．它的记忆细胞是磁芯．磁芯有大有小，最小的比芝麻粒还细．成千上万个小磁芯穿在导线上，组成网球拍似的网络，就成了电子计算机储存信息的“大网兜”．最新型的磁泡储存器，体积更小，存储量更大．在不足一寸见方的芯片上，可储存高达十一点五兆位的信息量．

电子计算机不但能计算、能记忆、能用逻辑电路进行判断和控制，还能辨认图象．早在一九五九年，美国康乃尔航空实

验室就制成一台能识别图象的电子计算机.

计算机与人工智能有“血缘”关系. 电子计算机具有“学习”的功能,譬如学下棋. 计算机下棋时能记住试过的每一步棋,所以有时比高明的棋手还略胜一筹.

## 得天独厚的人脑

电脑虽然神通广大,但毕竟不如人脑,它只有依赖人编的程序才能工作. 它也没有创造性,只能做命令它做的工作. 而思考能力与创造性,正是人脑的“灵魂”.

被誉为“计算机之父”的冯·诺依曼曾经指出:“神经系统是这样一台计算机,它在一个相当低的准确度水平上,进行非常复杂的工作. 它只可能达到二位至三位十进制数字的准确度水平. 我们还不知道,有哪一种计算机在这样低的准确度水平上仍能可靠地、有意义地进行运算”. 这就是说,它以较低的精度,换来了相当高的可靠程度. 到目前为止,世界上还没有一台象人脑这样的电子计算机.

人脑既类似一台数字计算机,又好象一台模拟计算机. 因而,它既能处理精确信息,又能处理模糊信息. 例如在判别走过来的是谁时,人脑的这两种功能能奇妙地交织在一起,达到了“天衣无缝”的境界. 这就使得只具有数字功能的电子计算机望“人”莫及.

人脑的重量约为1公斤半,体积只有一千立方厘米左右;但它包含了一百亿到一百五十亿个神经细胞以及九千万个辅助细胞. 大型电子计算机虽是庞然大物,也只有几十万个电子元件和几百万个记忆单元. 因此,人脑的部件比大型计算机多了一万倍! 而且,每个神经细胞又与大约一千个其他神经细胞相联系,其复杂程度相当于数以万计的计算机联在一

起.

人脑与电脑处理信息的方式也不同. 人脑虽然动作较慢,但能同时处理很多信息. 而电脑在某一段时间内,只能做一件事或几件、几十件事. 因此有人认为,人脑趋向于高度并联,而电脑则趋向于串联而较少并联. 人脑还有一个特点,当出现故障时它具有自动补偿的功能, 即脑细胞之间可以互相顶替,在脑细胞损伤十分之一时,“机器”仍能照常运转. 电脑却不具备这样的功能,它的“细胞”分工专一,如磁芯只能用作记忆,不能移作别用.

人脑的这些优点,为未来的电脑提供了活的样板. 为了探索未来电脑和智能机器人的雏形, 模糊数学这门新学科便应运而生.

## §1.3 随机性与模糊性

### 精　确　性

我们知道,当代机器人的智力只相当于人类 2—3 岁的水平, 若要实现相当于成年人的智能机器人——就是要使机器人不仅能代替人类的体力劳动, 而且要能代替人类的脑力劳动,那就必须依赖于科学技术的新突破,其中一个首要问题,就是如何将人类思维和语言建立起数学模型.

精确性,确是经典数学的一大特点. 我们利用经典数学所取得的成就,可以将力学、热力学、电磁学的基本规律,表示为相应的微分方程式,然后用电子计算机求解. 我们知道,变量之间的互相依赖关系叫做函数关系. 但是,有时容易表达的,倒并不是一个变量对另一个变量的函数依赖关系,而是一个变量相对于另一个变量的变化率——这种变化率在数学上

叫做导函数. 例如运动质点的位置对时间的变化率就是速度，速度对时间的变化率就是加速度等等. 牛顿第二定律便是说物体运动的速度对时间的变化率与加在该物体上的力成正比，并且方向一致.通常我们往往要求出运动质点的位置对时间的依赖关系——即运动轨道，而牛顿运动定律所表达的只是速度对时间的变化率(即加速度，也就是位置对时间的二阶导数)与力之间的关系，从而使方程中出现的不是表达位置的那些变量，而是这些变量的一阶与二阶导数——这样的方程就叫做微分方程. 如果还知道在某一确定时刻运动质点的位置，那么由上述微分方程就可以解出表达位置对时间依赖关系的那个函数来. 这一类现象，从现象在某一时刻的状态(叫做初始状态)就可以断定在以后的任意时刻的状态，我们就把它称为决定性现象. 经典数学最成功的例子之一，便是根据万有引力定律推导出行星环绕太阳运行的轨道来. 正是由于这样的推算，使人们发现了海王星. 有一个时期，有些科学家对微分方程爱好到迷信、崇拜的程度，以为一切自然现象都可以用微分方程来加以描述. 甚至想寻找能描述一切自然现象的统一的微分方程式. 当然，这种思想的产生与当时机械唯物论的流行是分不开的.

但实际上问题并不那样简单，现实世界要复杂得多. 对于随机现象、模糊现象来说，传统的微分方程就显得无能为力了，因此，经典数学终于被突破，产生了随机数学和模糊数学.

## 随　机　性

在有些现象中，由于因素众多，相应的微分方程将要包括很多已知和未知的变量，列出它们往往很困难，要求出它们的解几乎不可能. 例如，在研究气体性质时，我们知道气体中的

许多高速运动的分子，因互相碰撞而改变其方向. 如果按照经典数学的方法研究这类现象，将要对每个分子列出它的微分方程式，由于分子数量极大，在1大气压的压强与0℃的条件下，一立方厘米的气体中所含分子的数目是$2.68 \times 10^{19}$，包含这样大量的未知数的微分方程根本无法解算. 事实上，我们也不需要求这么多的解，因为分子是那样小，同时我们对每个个别分子的运动情况并不感兴趣，我们所注意的是由大量分子运动所呈现出来的总体现象——温度、压强等. 在这类现象中有大量的个体，我们的目的不是去了解每个个体的状态，而是去了解由这些大量个体所合成的总体所呈现出来的状态. 这时，我们可以把每一时刻每个个体所处的状态看作是“偶然的”、“随机的”(即不确定的)，所以我们称这类现象为随机现象. 值得注意的是，这类偶然现象并不是毫无规律的. 统计数学，即随机数学的任务，就是要从这种表面的偶然性中寻找出规律来，也就是要从大量个体所形成的总体中找出规律性来——虽然这大量个体本身处于各种不同的状态，而且表现出随机性.

随机现象还有另一种表现形式. 这时个体可能为数很少，甚至只有一个，然而现象本身却重复很多次. 我们把这种现象叫做“实验”. 虽然个别实验的结果是随机的，但大量实验却呈现出一定的规律性. 例如掷骰子每次能掷出几点是无法确定的，也就是“随机”的；但在掷很多次时，例如掷上百、成千次，就不难发现掷出某特定点（例如六点）的次数在总掷次数中所占的比例（即掷得这点的频率）渐趋稳定，接近于六分之一. 这就表现出了大量现象中的规律性.

在考察大量现象时，每个个体在某一时刻的状态是有种种可能的，或者说，每次实验的结果是有种种可能的. 例如气体分子运动中每个分子在某一时刻的位置、运动方向和速度

可能取种种值;或在掷骰子时,每次掷出的点数也可能是种种值. 状态既然有种种可能,那么,每一种状态的可能性是怎样的呢? 为了回答这一问题,经过长期探索,专门研究事件发生可能性大小的度量的数学新分支——概率论,终于产生了.

在概率论的基础上,又发展产生了数理统计,随机过程等分支,形成了"随机数学".

## 模 糊 性

由于客观世界存在着大量现象,由此产生了随机数学,同样,由于客观世界存在着模糊现象,模糊数学这株新苗也因此破土而出.

模糊现象也不能用经典数学来加以描述. 力学、热力学、电磁学所研究的运动变化规律,若与人脑的思维活动相比,只能算是简单过程. 当研究人脑这样的复杂过程时,复杂性与精确性往往是不相容的. 这就是说,一个系统的复杂性增大时,它的精确性必将减小. 这一点类似收音机中灵敏度与选择性之间的关系. 根据这一不相容原理,我们在模拟大脑功能时,不应该片面追求精确性,恰恰相反需要的倒是它的反面——模糊性,关键是要善于综合和处理模糊信息.

有人认为,若用经典数学方法来建立人工智能,就会象追求永动机或点石成金那样徒劳无功,用中国的一句古话来说,这就好比是"缘木求鱼". 这是因为人类智慧与机器功能之间有着本质的区别,人脑善于判别和处理不精确的,非定量的模糊现象,并从中得出具有一定精度的结论. 正是由于具备这种能力,才使我们能辨认潦草的笔迹、理解不完整的甚至不合常规的语言;并使人们善于抽象、概括、综合和推理. 即使在不确定的、多变化的情况下,人们也能作出某些决定. 而在认

识事物时，我们总是能自然而然地把目光集中到只与判断有关的信息上.

在人的思维和语言中，许多概念都是模糊的东西，这在前面已经提及. 人脑的控制作用同样具有模糊的特色. 当我们拿起一只杯子时，究竟用多大的力气，并不需要精确地计算，我们可以根据触觉和视觉等感觉，经几次反馈和调整，就能以恰如其份的力量握住杯子，既不会因用力过猛而捏碎杯子，也不会因用力太小而使杯子落地. 要是让机器人来完成这一动作就要困难得多，因为它只能接受精确的指令.

有时候，清晰的东西也会产生模糊信息. 譬如，男子和女子本来是有明确划分的，可是留长发、穿花衬衫的男青年，却提供了模糊信息.

人们的所谓"经验"，往往也是模糊的东西. 例如，要确定一炉钢水是否已经炼好，除了要知道钢水温度、成分比例和冶炼时间等精确信息外，还要注意钢水颜色、沸腾情况等模糊信息. 要对这样的过程进行控制，很难采用目前通行的自动控制方法，因此，往往还是由熟练工人凭借经验来操纵.

语言也有模糊性. 试看一个例子. "我要吃糖"这句话的含义是明确的. 然而在日常生活中我们同样能理解下列含意不够明确的语言"我要糖"，"要吃糖"，甚至"我我我要吃糖"，"糖糖"等模糊语言的含义，最后两句可分别看作出自口吃者和孩子之口. 要是你跟当代计算机说话，可不能这样随便. 它只能接受合乎它死板规定的语句，那怕只少一个字，一个标点，它都会一概加上"语法错误"等"罪名"，拒不接受，推出机外. 可以设想，如果你有个朋友的脾气跟当代计算机一样，那你就很难跟他交谈.

那么，该怎样来综合和处理模糊信息呢？这就要寻找一种新工具——一种表现和加工模糊信息的数学工具，它就是

模糊数学．模糊数学在精确的经典数学与充满了模糊性的现实世界之间，架起了一座桥梁．

## §1.4 模糊数学的兴起

一九六五年，美国加里福尼亚大学教授查德(*L. A. Zadeh*)发表了著名的论文——模糊集合．他第一次引人注目地提出了模糊性问题，并给出了模糊概念的定量表示法．模糊数学从此产生了．

虽然在一九六五年以后的几年间，模糊数学的进展相当缓慢，但一进入七十年代，模糊集合的概念就渐渐被更多的人所知，这方面的研究迅速发展起来．历年来世界上模糊数学的论文，其增长速率如图 1.1 所示．至今，已有论文二千多篇（其中二百篇为博士论文），专著十五本．一九七八年，《模糊集合与系统》杂志创刊．

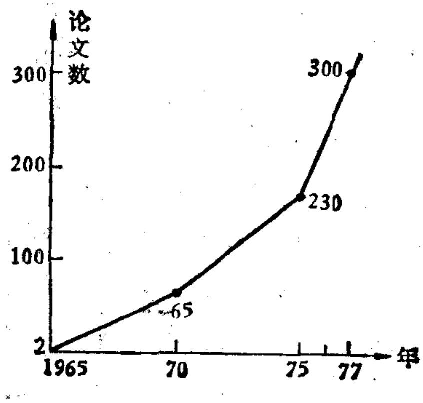


图 1.1

控制论的创始人维纳在谈到人胜过任何最完善的机器时说："人具有运用模糊概念的能力．"

许多概念的内涵与外延都是不明确的．例如"高个子"、"胖子"、"老年人"、"美人"等．模糊概念的数学表现是模糊集合，它是模糊数学的理论基础．

事物之间的关系也具有模糊性．"夫妻关系"是经典关系，因为两个人是否具有夫妻关系可以有明确的回答：是，或

者非，二者必居其一．然而，在现实生活中，许多关系并不总是清晰的．例如，“两个人长得象”就是一种模糊关系．因为一个人只与自己长得一模一样，可以用“1”表示．儿子象父亲，只能用 0 与 1 之间的一个小数来表示．模糊关系是经典关系的自然拓广，是更高、更一般的关系．

模糊数学在理论上正在不断完善，应用日益广泛．它的应用已涉及聚类分析、图象识别、自动控制、机械故障诊断、系统评价、数据结构、信息检索、机器人、人工智能、逻辑等许多方面．日本学者浅居喜代治等在《模糊系统理论入门》一书中，统计了 1965—1975 十年间模糊数学论文所涉及的范围如表 1.1 所示．

表 1.1

| 领域 | 一般理论 | 测度 | 评判 | 决策 | 信息、系统、控制 | 拓扑、图论 | 语言、自动机 | 算法 | 聚类分析、模式识别 | 逻辑 | 人工智能 | 生物学、医学、心理学、社会学 | 总计 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 论文数 | 42 | 7 | 6 | 13 | 35 | 2 | 52 | 3 | 31 | 21 | 5 | 12 | 229 |

日本学者水本雅晴在 1979 年统计了当时几个主要国家发表过模糊数学论文的人数，见表 1.2．

表 1.2

| 美国 | 法国 | 日本 | 英国 | 加拿大 | 德国 | 罗马尼亚 | 苏联 | 比利时 | 荷兰 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 167 | 53 | 46 | 31 | 24 | 22 | 20 | 18 | 15 | 13 |

我国从七十年代初开始，对模糊数学的理论和应用，也已展开多方面的研究，并取得了一些初步成果．并于一九八一

年创刊了《模糊数学》——世界上第二本研究模糊集合及应用的杂志.

人类认识世界从模糊发展到精确，从心中无数到心中有数，这是一个飞跃；而今为了分析和处理模糊现象，又突破了精确数学的框架，产生了模糊数学. 模糊——精确——模糊，这并不是倒退，而是螺旋式的上升，它标志着人类认识世界的能力，又提高到了一个新的高度.

# 第二章 模糊集合

## §2.1 普通集合

十七世纪，笛卡儿提出了变量概念，这是数学发展史中的一件大事，从此，运动和过程进入了数学.

十九世纪末，康托又创立了集合论. 集合论已成为现代数学的基础.

我们可以从常见的事物中，抽象出集合这一概念: 具有某种特定属性的对象的全体，叫做集合. 例如地球上的全部沙粒、太阳系的行星、某个班级的学生、某本书里的所有字、某张桌子上的所有物品等等都是集合. 每个集合里通常都包含有若干个体. 集合里所含有的个体，称为集合中的元素(简称为元). 例如，地球是太阳系行星集合中的一个元素，墨水、茶杯、词典、台灯……等，都是"桌子上的物品"这一集合中的元素. 同一集合中的元素都具有某种共同的性质，人们就是根据这种性质，来判定某一讨论范围内的事物是否属于该集合. 讨论的范围，也就是被讨论的全体对象，叫做论域，又称全域或全集合.

通常用大写字母表示集合，如 $A$、$B$、$X$、$Y$ 等；而集合中的元素用小写字母表示，如 $a$、$b$、$c$、$d$ 等. 显然，集合总是由一些元素构成，而且全域中某个元素是否属于某个集合，都能清楚地加以区分，或属于或不属于，二者必居其一，且仅居其一. 在数学上采用符号 $\in$ 表示属于；若在这一符号上加一竖变作 $\notin$，便代表不属于. 例如元素 $a$ 属于集合 $A$、不属