群论

QUN LUN

下 册

[苏] A.Г.库洛什 著
刘绍学 译

高等教育出版社

群 论

下 册

[苏] A. Г. 库洛什 著
刘绍学 译

高等教育出版社

本书是由苏联Издательство«Наука»出版的 А. Г. Курош 著 «Теория Групп»第三版译出的. 全书分二册. 上册为基础部分, 下册为专著. 主要内容为群的构造, 可解群与幂零群两大部分, 立论严谨、周密, 还涉及到各分枝的发展状况, 附有比较完整的文献, 为学习无限群论的一本很全面的读物. 可供数学专业高年级学生或研究生作为教学参考书.

群 论

下 册

[苏] A. Г. 库洛什 著

刘绍学 译

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

四川新华印刷厂印装

*

开本850×1168 1/32 印张14.625 字数340,000

1982年11月第1版 1984年8月第1次印刷

印数 00,001—8,700

书号 13010·0828 定价 2.20 元

第 三 版 序 言

这本书，它的第三版现在与读者见面，在延续四分之一的世纪中伴随着群论的发展，并在力所能及的范围内促进了它．作者在1940年写完了这本书的第一版，次年看过了两次校样，只是由于战时的条件把此书的出版延迟到1944年．在第一版的引论部分——此引论的大部分内容将在下面重新给出——说明了作者在写此书时所追求的目标．

在四十年代，一般群论经历了蓬勃的发展．在阿贝尔群论，直积的理论，可解群、幂零群以及具各种有限条件群的理论中得到特别巨大的成就．由 О. Ю. Шмидт 奠基的苏联群论学派在此发展中起了很重要的作用．特别，许多按本书的第一版学习群论的年青苏联代数学者作了许多工作——这里提醒一下，本书的打字稿从1940年便保留在莫斯科大学数学力学阅览室中并供研究学习之用．

本书的第二版，它完成于1952年而出版于1953年，反映了截至五十年代初期群论所达到的状况．这实际上是一本新书，有新的安排，有许多新的章节，并把由第一版转引来的材料重新改写了．只是由于新书在自己的基础中含有原来的并且在想法上和它非常接近，使得作者对它保留了原来的目录．

在这段时间内本书的出版在世界范围内有了反响．即是，在1953年在德意志民主共和国出现了第一版的德文译本．晚一些出版了第二版的译本：在1955年出的匈牙利译本，1955和1956年分两册出的英（美国）译本，1959年罗马尼亚译本，1960和1961年分两册出的日译本，1964年出的中译本（上册）．这使得这本书在世界许多国家中参与群论的发展．

五十年代和六十年代前一半是群论进一步向前发展的时期.解决了许多问题，它们曾经是常年，有时是几十年悬而未决的.——这里我们指出例如关于周期群的Burnside问题，以及关于具有有限定义关系式群的判定问题. 阿贝尔群经历了根本的改造.在可解群和幂零群论中完成了许多工作.形成了一系列新的方向，——这里我们譬如点出群的流形理论，群类（亦即抽象的群的性质)的理论，群上的运算理论，自同构群以及群对偶理论.在群论的基础部分也出现了一些本质性的变化，例如，从带算子的群过渡到多元算子群即是其中一个.

在这一期间关于一般群论研究的迅猛程度可以有一个量的刻划. 即是，本书第二版中的文献索引是相当完全的，它大致有五百篇论文. 另一方面，在第二版完成后的这些年中，关于无限群的一般理论(即是，除去关于有限群的，关于置换群的，关于线性群的，关于Lie及《代数》群的，关于拓扑群的，关于有序群的，关于模论等等的工作以外)发表了不少于1300篇论文（其中近三分之一是苏联作者的工作).

在近年中出版了一些专著，论述一般群论的某些个别的分枝.这样专题性的著作在今后亦将出现，这是完全自然的. 但是，我们大家都明白，除这些著作外需要有综合性的论述，它能从整体上反映群论并能作为统一的学科保留着它. 在这些年中在不同的国家中出现了一些一般性质的书，每一本都有自己的成就，但遗憾的是，其中的任一本都不能完全地满足上述要求.这就是本书新版出世的原因.

作者清楚地的知道，实际上应该写一本完全新的书.然而作者还知道，在上面已谈到的这种非常丰富的材料下，这本书该是三册的，而作者已无法安排这样巨大量的工作. 因此这个第三版有一个非常不寻常的形式.

这就是，除了不多的一些变动，例如纠正个别不准确的地方以及一些误印或者符号的某些近代化，在其中保留了第二版的全部内容. 可为这种再版旧的原文辩解的是此书已很久脱销了——甚至某些年青的苏联群论工作者在自己家中也没有它.

本书印数不多的第一版就更是少见了. 但是，正如作者在第二版序言中所说过的，“遗憾的是，由于无法避免全书篇幅的增大，作者不得不把旧书的许多地方完全删去，有时甚至要删去整个的一节，而这些内容在当时把它们收入本书中并不算错”. 第二版的读者不止一次地被介绍去参考第一版的相应章节；并且直到现在不得不引用本书第一版的还有其他一些作者.

由于这个原因在第三版中在第二版的原文间插入第一版中的某些材料. 有时这是一些整个的节；此时它们的编号同于其前面的第二版中节号而缀以字母 a(有时是 b 和 c)，读者不难由目录中找到这些节. 在 §§23, 26, 33, 35, 42, 44, 53, 54 中也插入了第一版中某些内容.

这就是本书的基本课文. 书中还包含《第一版的结束语》. 当然，经过了四分之一世纪它已完全失去了作为指明群论进一步发展道路的纲领性文章的意义，其中有许多现在看起来甚至是天真的，但是，把当时还年青的作者所提出的纲领与科学的实际发展对比一下是大有教益的. 我们在《结束语》的原文中没有引入任何变动；只是引用第一版的各节时附加以本书基本课文相应节的编号(用圆括号括起来)，此外，无论是基本课文的还是后面的《补充》的节号则用方括号，在这些节中读者可以找到所考察问题的进一步发展的信息.

标名为《1952—1965 年无限群论的发展》的《补充》该是对专家来说最有益的. 作者试图在其中给出本书第二版写完以后的这些年中一般群论发展的概况. 也将谈到某些早期的工作，那是因

为作者认为在第二版中没有充分反映它们是不应该的．当然，另一方面，作者无法以应有的完善在这个总结中反映最近几年的文献，然而这一点可以由发表在《科学的汇总》丛书中的一些总结文章来补充．

《补充》的计划没有重复基本课文的计划而是更接近于说明：如果作者现在要写一本关于群论的新书的话，那么这本书的计划就该是这样的．《补充》中不包含任何证明；但是在其中给出了所有必要的定义并叙述了某些结果．在《补充》中总的涉及近一千一百篇文章，它们没有被包含在第二版的文献索引中；然而，其中的一些仅是提到一下．所有这些文章且仅仅是这些被补充地纳入文献索引中．和通常一样，引用文献时在课文中指出作者的姓以及所引文章的编号(置于方括号中)．

在基本课文中有很多次注明参看《补充》．此时，形如(参看补充 12.3)的注释说明:《参看补充中 § 12, 第三点》．

在《补充》的课文中，除去它的序言外，几乎没有提到关于有限群论的结果．在本书第二版序言中，作者说过:“在准备第一版时，作者面临的任务是要指出群论不应该只是有限群论，因而在书中几乎不包含任何关于有限群的特别叙述．现在这个任务可以认为已经完成．相反地，提出了新的问题——要注意到有限群论是一般群论的一个重要组成部分．尽管已在书中补充了关于有限群论的一些题材，然而最后这个问题在本书中还是没有解决．”关于有限群论的各种问题所发表的论文数量非常的巨大，这使得作者无法在编写第三版的《补充》时试图解决这一任务，虽然作者懂得，如果最初被分化出去的分枝重新成为统一理论的有机组成部分，那么威胁群论向个别孤立的一些分枝的分化就该在某种程度的受到阻止．

在群论中在近年来完成了非常多的工作，群论的研究非常蓬

勃的进行着，因而可能作者现在较困难去重复在第一版序言中所说过的下面的话："一般群论还没有走过自己发展的顶峰"．但是，毫无疑问，群论仍将长久地对于更一般的代数理论，例如像泛代数论和范畴论，保留着新思想的基本供给者和试验打靶场的地位．因此，可以期待在最近一些年群论研究的兴旺程度仍会是很高的．如果本书的新版仍能在一段时间对研究群论的代数工作者有所帮助，作者将是非常高兴的．

作者对在编写本书第三版时对作者作出帮助和支持的一切人表示衷心的感谢，首先是А. П. Мишина, А. Л. Шмелькин 和 Е.Г. Шульгейфер．作者特别感谢 О. Н. Головин，他花费巨大劳动编辑本书而这一点使作者能再一次有他作自己的合作者而感到愉快——我提醒一下，特别Олег Николаевич还是本书第一版的编辑．

库洛什(А. Курош)

莫斯科　1966 年 11 月

下 册 目 录

第三篇 群的构造

第四篇 可解群与幂零群

第三篇　群的构造

第九章　自由积和自由群

§33. 自由积的定义

在§17中引入的群的直积在群论中起着很重要的作用，这一点至少可以由前面介绍阿贝尔群的几章中看到．另外一个也是非常有益的这种类型的构造就是群的自由积．与直积类似，自由积给出由已给群构造新群的一种可能的途径．它与直积的区别在于，在其定义内舍去在直积定义中的一项规定，这规定要求属于不同直因子的元素彼此是可交换的．自由积的确切定义如下．

群G叫作其异于E的子群A_α（α取遍某一足码集）的*自由积*，如果这些子群A_α总合起来生成整个群G，即G中任一元素g可表成取自这些A_α中有限个元素的乘积

$$g=a_1a_2\cdots a_n,\quad a_i\in A_{\alpha_i},\quad i=1,2,\cdots,n;\tag{1}$$

并且如果假定这些元素a_i都异于单位元而(1)中相邻的两个元素没有属于同一个子群A_α者，则G中任一元素g的形如(1)的表示法是唯一的．当然一般说在这样的唯一表示法(1)中可能包含若干个因子，它们是属于同一子群A_α的．

我们用符号

$$G=\prod_\alpha{}^*A_\alpha\tag{2}$$

表示自由积，而当群G是其有限个子群$A_1,A_2,\cdots,A_k$的自由积时，则用符号

$$G = A_1^* A_2^* \cdots {}^* A_k.$$

子群 A_α 叫作群 G 在自由分解(2)中的自由因子. 称表示式(1)(在上述关于它的假设下)为元素 g 关于分解(2)的最简表示式，而 n 叫作在此分解中元素 g 的长度(记作: $n = l(g)$).

由元素的最简表示式的唯一性得，(2)中的自由因子 A_α 与 G 在此分解中的所有其余自由因子生成的子群之交等于 E.

设群 G 分解为其真子群的自由积. 若(2)是它的分解，则我们由(2)的不同自由因子中取出两个异于单位元的元素 a_1 和 a_2. 由自由积的定义得，乘积 a_1a_2 和 a_2a_1 是 G 中不同的元素，这样即使(2)的所有自由因子 A_α 都是阿贝尔群，群 G 也必是非交换的. 其次，所有乘积

$$a_1a_2,\ a_1a_2a_1a_2,\ \cdots,\ (a_1a_2)^n,\ \cdots$$

也都是 G 的不同元素，这样即使所有自由因子 A_α 都是周期群，群 G 也必是含无限阶的元素. 因此，无论是阿贝尔群，还是周期群(也包含有限群)都不能分解为自由积.

自由群是可以分解为自由积的，即是自由(非循环)群是无限循环群的自由积. 事实上，设在自由群 W 中给定自由生成元 x_α 的系. 若 $A_\alpha = \{x_\alpha\}$，则群 W 显然由子群 A_α 生成，而 W 中任意元素，即是关于符号 x_α 的字，可唯一地记成元素 x_α 的幂的积. 故群 W 是其无限循环子群 A_α 的自由积[1]).

和直积的情形相同，我们完全可以谈论任意一些预先给定群的自由积，这是因为我们有下面这个构造，它是在 §18 中曾用之引入自由群的构造方法的一个自然的推广.

设给定任意一些群 A_α 的集. 所谓字是指元素的任意有序组

$$w = a_1a_2\cdots a_n, \tag{3}$$

1) 应当指出，对于自由群来说，上面引入元素的长度的概念和 §18 中引入的同名概念不相同.

其中长 $n\geqslant1$，任意 a_i 是某一群 A_α 中异于单位元的元素且任意相邻元素 a_i 和 a_{i+1} 属于不相同的群 A_α. 除此之外，还认定，$n=0$ 的情形对应着空字. 若给定字(3)及字

$$w'=a_1'a_2'\cdots a_m',$$

则我们规定 w 和 w' 的乘积如下：设

$$a_1'=a_n^{-1},\quad a_2'=a_{n-1}^{-1},\ \cdots,\ a_i'=a_{n-i+1}^{-1},\ 0\leqslant i\leqslant\min(n,m),$$

但 $a_{i+1}'\neq a_{n-i}^{-1}$. 若元素 a_{n-i} 和 a_{i+1}' 属于不同的群 A_α，则令

$$ww'=a_1a_2\cdots a_{n-i}a_{i+1}'a_{i+2}'\cdots a_m';$$

若是 a_{n-i} 和 a_{i+1}' 在同一群 A_α 中且 $a_{n-i}a_{i+1}'=\bar{a}$，则令

$$ww'=a_1a_2\cdots a_{n-i-1}\bar{a}a_{i+2}'\cdots a_m'.$$

换言之，为了得到字 w 和字 w' 的乘积，需要把这两个字依序并写在一起，然后施行必要的消去和合并.

在这样定义的字的乘法中，空字起着单位元的作用. 字(3)的逆元是字

$$w^{-1}=a_n^{-1}\cdots a_2^{-1}a_1^{-1}.$$

关于字的乘法的结合律的证明，和 §18 中相应的证明基本上是一样的，从技巧上看是很复杂的. 可以用下面方法绕过这些困难(参看 Van der Waerden[2]).

用 M 表示上面定义的所有字的集合，用 S_M 表示集合 M 到自身上的所有一一映射组成的群. 设 A_α 是给定群中的一个而 a 是 A_α 中异于 1 的元素. 元素 a 确定集合 M 到自身内的一个映射：若以(3)为表示式的字 w 不以 A_α 中元素结尾，特别若它是空字时，则把 w 映到字

$$wa=a_1a_2\cdots a_na.$$

若是 $a_n\in A_\alpha$，且在 A_α 中 $a_na=a'\neq1$，则把 w 映到字

$$a_1a_2\cdots a_{n-1}a',$$

最后，若是 $a_n\in A_\alpha$ 而 $a_na=1$，则把 w 映到字

$$a_1a_2\cdots a_{n-1}.$$

另一方面，若 $a=1$，则规定它对应集合M到自身上的恒等映射.

若 b 是 A_α 中任意另一个元素，则显然乘积 ab 所对应的映射就是 a 和 b 所对应的映射在依次执行意义下的乘积. 特别，与 a 和 a^{-1} 对应的映射的依次执行给出恒等映射，因而对应 A_α 中任意元素 a 的映射是集合M到自身上的一一映射，亦即是群 S_M 中的元素. 群 A_α 中的不同元素对应着不同的映射，这是因为，与异于 1 的元素 a 对应的映射刚好把空字映到字 a.

这样我们得到群 A_α 到群 S_M 的某个子群 $\hat{A}_\alpha$ 上的同构对应；在此对应下元素 a 的象记作 $\hat{a}$. 对所有的 α 都作这样的对应并用 $\hat{G}$ 表示由所有这些子群 $\hat{A}_\alpha$ 在群 S_M 中生成的子群. $\hat{G}$ 中的元素可写成由 $\hat{A}_\alpha$ 中元素组成的字的形式，并且写法是唯一的：若 w 是M中某一个字而(3)是它的表示式，则乘积

$$\hat{a}_1\hat{a}_2\cdots\hat{a}_n$$

就是M的一个置换，它将空字刚好变到字 w. 这就是说，群 $\hat{G}$ 是其子群 $\hat{A}_\alpha$ 的自由积.

在群 $\hat{G}$ 中，乘法完全按照上述字的乘法定义中相同的法则去施行. 因此，所有字的集合M是一个群，将它记作 $\bar{G}$. 与同一个群 A_α 的所有元素相对应的、长为 1 的字的全体，与空字合在一起组成群 $\bar{G}$ 的一个子群 $\bar{A}_\alpha$，它同构于群 A_α. 上面得到的群 $\bar{G}$ 和 $\hat{G}$ 之间的这个同构对应说明：**群 $\bar{G}$ 是其子群 $\bar{A}_\alpha$ 的自由积，而 $\bar{A}_\alpha$ 同构于给定群 A_α.**

现在来说明，自由积的定义也可以用另一种形式给出、即是利用生成元和关系式，也就是用如下的方法给出.

设

$$G^*=\prod_\alpha{}^* A_\alpha$$

并设群 A_α 是由生成元系 $\mathfrak{M}_\alpha$ 和关于这些生成元的定义关系式系

Φ_α 系给定的. 此时所有集合 $\mathfrak{M}_\alpha$ 之并 $\mathfrak{M}$ 将是群 G 的生成元系，而所有集合 Φ_α 的并 Φ 将是其定义关系式系. 反之，若群 G 是由生成元系 $\mathfrak{M}$ 和定义关系式系 Φ 给出的，而 $\mathfrak{M}$ 可划分成一些互不相交的真子系 $\mathfrak{M}_\alpha$，Φ 可划分成一些互不相交的子系 Φ_α，并且在 Φ_α 的每个关系式中出现的只是 $\mathfrak{M}_\alpha$ 中的生成元，则群 G 同构于群 A_α 的自由积，其中 A_α 是具有生成元系 $\mathfrak{M}_\alpha$ 和定义关系式系 Φ_α 的群.

上面定理的两个论断都可由下面的考虑得出. 设给定互不相交集合 $\mathfrak{M}_\alpha$ 的系而对每一 α 给定一个由 $\mathfrak{M}_\alpha$ 中符号写成的关系式集 Φ_α. 把所有 $\mathfrak{M}_\alpha$ 的并集记作 $\mathfrak{M}$，所有 Φ_α 的并集记作 Φ. 此时据 §18 存在一个群 G，以 $\mathfrak{M}$ 为生成元系，以 Φ 为定义关系式系. 另一方面，用 $\bar{A}_\alpha$ 表示以 $\mathfrak{M}_\alpha$ 为生成元系，Φ_α 为定义关系式系的群，用 $\bar{G}$ 表示所有群 $\bar{A}_\alpha$ 的自由积

$$\bar{G}=\prod_\alpha{}^*\bar{A}_\alpha.$$

由上述的构造知 $\bar{G}$ 是存在的. 此时群 $\bar{G}$ 的生成元系将是 $\mathfrak{M}$，但为了得到它的定义关系式系也可能还需对 Φ 再补充一些关系式. 因此，据 Dyck 定理，群 $\bar{G}$ 同构于群 G 的商群. 如果 A_α 是群 G 中由集合 $\mathfrak{M}_\alpha$ 生成的子群，则在群 G 到 $\bar{G}$ 上的自然同态对应下，子群 A_α 将同态地映到子群 $\bar{A}_\alpha$ 上. 但是，因为 $\bar{A}_\alpha$ 的定义关系式系 Φ_α 中的所有关系式在 A_α 中也是成立的，所以这个映射就是一个同构对应. 最后，G 中任意元素可表为这些子群 A_α 中元素作成的字（虽然可能并不是唯一的）. 此元素在 G 到 $\bar{G}$ 内的同态对应下映到由 $\bar{A}_\alpha$ 中元素作成的相应的字. 但是，因为在 $\bar{G}$ 中，由这些 $\bar{A}_\alpha$ 中元素组成的不同字是群中不同元素，所以这一事实对于 G 中由这些子群 A_α 中元素组成的字也是对的. 这就证明了群 G 和 $\bar{G}$ 是同构的.

还有一种处理自由积概念的方法，即是:

若群G由子群A_α(α取遍某一足码集)生成，则G是这些子群的自由积，当且仅当对任意群H以及这些群A_α到群H内的任意同态对应φ_α都存在群G到群H的同态对应φ，它在每一子群A_α上与φ_α重合.

这是因为，若

$$G=\prod_\alpha{}^* A_\alpha$$

且若群H以及同态对应φ_α已给定，则要找的同态对应φ可如下定义：若

$$w=a_1a_2\cdots a_n$$

是G中的字，且$a_i\in A_{\alpha_i}$，$i=1, 2, \cdots, n$，则

$$w\varphi=a_1\varphi_{\alpha_1}\cdot a_2\varphi_{\alpha_2}\cdots a_n\varphi_{\alpha_n}.$$

为了证明逆命题，应取H为群A_α在上面给出构造的意义下的自由积，而取同态对应φ_α为群A_α到自身上的恒等映射. 此时依假设存在的同态φ实际上就变成了G到H上的同构对应.

针对每一情况选用上述自由积的几种定义形式中最方便者，读者不难证明自由积的下列简单性质：

I. 若$G=\prod\limits_\alpha{}^* A_\alpha$且若每一$A_\alpha$本身可分解为自由积，$A_\alpha=\prod\limits_\beta{}^* B_{\alpha\beta}$，则群$G$也是所有$B_{\alpha\beta}$的自由积. 群$G$的这个新的自由分解叫作原来自由分解的接续.

II. 若给定群G的一个自由分解，则如下法可得到G的一个新的自由分解：把给定分解中的自由因子集合划分为互不相交的子系并取每一子系内所有因子的乘积. 特别，可分解成自由积的任意群都可表成两个群的自由积.

III. 若$G=\prod\limits_\alpha{}^* A_\alpha$且若在每一因子$A_\alpha$中取一子群$A'_\alpha$，$E\subseteq$

$A'_\alpha \subseteq A_\alpha$，则在 G 中所有这些子群 A'_α 生成的子群是这些子群的自由积。

IV. 若 $G=A*B$ 且若 N 是子群 B 在 G 中生成的正规子群，则 $A\simeq G/N$.

这是因为，过渡到关于 N 的商群等价于添加令 B 的所有生成元等于 1 的关系式. 然而这样作了之后保留下来的就仅是群 A 的生成元和定义关系式了.

可分解成自由积的群的一个有趣例子是模群，即是复平面的分式-线性变换群:

$$z'=\frac{az+b}{cz+d}, \tag{5}$$

其中 a, b, c, d 是整数且行列式 $ad-bc=1$. 变换(5)还可改写成下面形状:

$$z'=\frac{-az-b}{-cz-d},$$

这一点我们以后将要用到. 依次施行分式-线性变换(5)和

$$z''=\frac{\bar{a}z'+\bar{b}}{\bar{c}z'+\bar{d}} \tag{6}$$

便得变换

$$z''=\frac{(\bar{a}a+\bar{b}c)z+(\bar{a}b+\bar{b}d)}{(\bar{c}a+\bar{d}c)z+(\bar{c}b+\bar{d}d)}; \tag{7}$$

其诸系数是由变换(6)和(5)的系数依矩阵相乘的规则而得，故其行列式等于 1. 如果我们约定称变换(7)为变换(6)乘变换(5)的乘积，则由于矩阵乘法的结合律，这个乘法也是结合的. 易见，对变换(5)，(6)中之一的改变所有系数的符号，这仅引出变换(7)中系数符号的一个同样改变，这就是说，我们实际上可以谈论复平面上分式-线性变换的乘法.

这个乘法的单位元是恒等变换 $z'=z$. 变换(5)的逆变换是