极小曲面概论

〔美〕R·奥斯曼 著

崔玉衡 姚婷婷 译
彭家贵 校

辽宁大学出版社

极 小 曲 面 概 论

〔美〕R·奥斯曼　著

崔玉衡　姚婷婷　译

彭家贵　校

辽 宁 大 学 出 版 社

一九八八年·沈阳

责任编辑　张春光
封面设计　王红玫
责任校对　初　文

极小曲面概论

〔美〕R·奥斯曼　著

崔玉衡　姚婷婷　译

※

辽宁大学出版社出版（沈阳市崇山西路3段4号）
辽宁省新华书店发行　沈阳市四建公司印刷厂印刷

※

开本：787×1092　1/32　印张：4.875　字数：100千
1988年5月第1版　1988年5月第1次印刷
印数：1—1,000

※

ISBN 7-5610-0223-8
O·5　定价：1.35元

新 版 序 言

在近二三十年中极小曲面理论继续蓬勃发展並且取得了许多令人注目的成果。在过去十年内，相对论和拓扑学中许多重要的猜想出人意料地利用极小曲面解决了。此外，极小曲面本身的许多新性质也被揭示出来。在这一版我们将有限地选择一部份新近成果，扩充了参考文献（见补充参考文献），新加了“附录 3”概要地叙述了一些新结果（在原文中加了一些脚注以使读者查阅附录 3 中的有关章节）。我们着重讨论与正文主题的关系最密切的结果，也提到了一些最引人注目的方向和应用。幸运的是在这段时期内出现了许多综合报告和著作，其中包括 Nitsche 的百科全书式的著作〔I〕，以及由Allard 和 Almgren编辑的AMS（美国数学会）会议录—讨论几何测度论方法，这两本著作都有丰富的参考文献。在本书原先的参考文献之后，增加了一节“补充参考文献”，在开头列出了一些著作和综合报告，从那里可以找到许多其它方面的内容。

新版改正了不少印刷错误，完善了参考文献。除此而外，正文只作了个别的更动。

注：引用参考文献时，罗马数字代表“补充参考文献”中的著作和综合报告，而阿拉伯数字代表新旧参考文献中的研究论文。MSG 代表“极小子流形和测地线”这是 1977 年东京讨论会的会议录。SMS 代表“极小子流形讨论班”，这里收集了1979—1980普林斯顿高等研究所学术年送交的文章。这两本书列为“补充参考文献”的第一和第二。

第一版序言

本书是原先用俄文发表的一篇文章（参考文献〔8〕）的英文文本。原文发表至今已有三年了。三年来这个领域已有了不少变化，一些最引人注目的新结果在附录2里作了讨论，同时企图加进直至最近的参考文献。对正文也作了一些修改，这是为了使原文表达得更清楚更详尽。除去这些变动，本书可以看成是俄文原作的英译本。

R·奥斯曼

引　言

整个十九世纪期间，极小曲面的理论在迅速地发展着，关于这个时期的一些主要成就详细地请见Darboux〔1〕及Bianchi〔1〕。本世纪的前半期人们几乎把全部注意力放在关于Plateau问题的解上。他们所获得的大多数成果可在Douglas〔1，2〕的论文及Radó〔3〕和Courant〔2〕的著作中找到。Bernstein〔1，2，3〕的工作是用偏微分方程的观点去研究极小曲面，这是与当时研究极小曲面理论方法的主要不同之处。近廿年来，极小曲面的理论极为盛行，这个时期的一部分工作是把极小曲面理论直接推广到高维空间、黎曼空间或更广泛的一类曲面上去；而另一部份工作是关于古典极小曲面的许多新成果。

本概论的主要目的是回顾一下过去廿年来的某些主要发展，为了使叙述具有连贯性，必须选用一些基本的观点。我们的基本做法是尽可能地把任意维欧氏空间的二维极小曲面的理论阐述清楚，但是当有些相应的结果在高维空间里似乎並不成立时，就只限制在三维空间里进行讨论。Nitsch〔4〕的综合报告更详细地报导了近几年来在三维空间里的一些成果，在这篇论文中不仅附有较广泛的文献目录，也列出了一些悬而未解的问题。关于在高维空间中的极小曲面的最早历史在Struik〔1〕中作了叙述。

在这种概论性质的著作中，要做到包罗万象是不可能的。因此，本书仅收集那些看起来既有兴趣又有代表性的结

果，这些结果提供了一些很好的证明方法。这些方法对于研究极小曲面理论是非常有用的。此外，为了方便读者我们还把书中论证的定理列表放在附录1中。

在这本概论中，较多的工作是对已有的一些成果作一些系统的归纳整理，但是在有些地方也给出一些新的结果。特别是在§2—§5中处理了E^n里的非参数曲面，在§11里又讨论了极小曲面方程的外 Dirichlet 问题。

为了使人们对近几年来所得到的关于极小曲面理论的各种推广有所了解，我们把它们放在附录2中。

下面再谈谈本书的表达形式。大多数微分几何所论述的不是经典的三维空间的曲面论就是现代的可微流形的理论，而因为这本概论的一些主要结果並不需要任何可微流形的知识，因此只对E^n里曲面的一般理论作较精细的介绍。出于同一理由，本概论还专门用了一节来叙述E^n内关于单个约当曲线的 Plateau 问题的最简单情形。这样做的目的是希望对于近代的一些问题与成果能直接提供一种方法，使得预先没有这方面知识的读者也能掌握它。

R·奥斯曼

目　　录

§1 参数曲面：局部理论

在本书中，我们用$X=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$表示n维欧氏空间$E^n$中的一个点，并设D是u平面$u=(u_1, u_2)$内的一个区域。这里，暂时把$E^n$内的一个曲面定义为u平面内某个域D到$E^n$内的一个可微变换$x(u)$。以后，在§6中将给出曲面的整体定义。但是，在那以前"曲面"这个词将表示上述意义。

我们用

$$M=(m_{ij});\quad m_{ij}=\frac{\partial x_i}{\partial x_j}\quad i=1, \cdots, n;\ j=1, 2$$

来表示映射$x(u)$的雅可比(Jacobian)矩阵。但是，要注意M的行向量是

$$\frac{\partial x}{\partial u_j}=\left(\frac{\partial x_1}{\partial u_j}, \cdots, \frac{\partial x_n}{\partial u_j}\right)$$

两个向量$V=(v_1, \cdots, v_n)$，$W=(w_1, \cdots, w_n)$的内积用

$$V\cdot W=\sum_{k=1}^{n}V_k W_k$$

来表示，而用

$$V\wedge W;\quad V\wedge W\in E^N,\quad N=\binom{n}{2}$$

表示外积。在这里$V\wedge W$的分量是按一定顺序排列的行列式

$$\det\begin{pmatrix} v_i & v_j \\ w_i & w_j \end{pmatrix},\qquad i<j.$$

最后，引进矩阵

$$G=(g_{ij})=M^T M,$$

$$g_{ij}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial x_k}{\partial u_i}\frac{\partial x_k}{\partial u_j}=\frac{\partial x}{\partial u_i}\cdot\frac{\partial x}{\partial u_j}, \tag{1.1}$$

并根据拉格朗日 (Lagrange) 恒等式可得：

$$\det G=\left|\frac{\partial x}{\partial u_1}\wedge\frac{\partial x}{\partial u_2}\right|^2=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\left(\frac{\partial(x_i, x_j)}{\partial(u_1, u_2)}\right)^2 \tag{1.2}$$

有了以上准备工作，我们可以给出一个纯代数形式的基本引理：

引理 1.1 设X (u) 是 $D\to E^n$的一个可微映射，则在D的每一点处以下各条件是等价的：

向量 $\frac{\partial x}{\partial u_1}$，$\frac{\partial x}{\partial u_2}$ 是无关的． (1.3)

雅可比矩阵M的秩为 2， (1.4)

$\exists i, j$：$1\leqslant i<j\leqslant n$，使得

$$\frac{\partial(x_i, x_j)}{\partial(u_1, u_2)}\neq 0, \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial x}{\partial u_1}\wedge\frac{\partial x}{\partial u_2}\neq 0, \tag{1.6}$$

$$\det G>0. \tag{1.7}$$

证明：利用公式（1.2）以及关于矩阵秩的一些基本性

质就可证得它们的等价性。

定义： 如果在曲面S上某点处，引理1.1的条件成立，则称S在此点正则。如果S在D的每一点正则，则称S是一个正则曲面。

若在区域D内，函数 $X(u)\in C^r$ 级也就是说S的每个点的坐标 x_k 在D内是 u_1，u_2 的r次连续可微函数，则记作 $S\in C^r$ 级，而在本书中，始终假定 $S\in C^r$ 级且 $r\geqslant 1$。

假设S是域D内的一个曲面，$X(u)\in C^r$ 级，$u(\tilde{u})\in C^r$ 级是域 $\tilde{D}$ 到D上的一个微分同胚，那么就把在 $\tilde{D}$ 内由 $X(u(\tilde{u}))$ 所确定的曲面 $\tilde{S}$ 称作是由曲面S通过参数变换而得到的。当把S通过参数变换而得到了曲面 $\tilde{S}$ 时，如果S的所有性质在 $\tilde{S}$ 的所有对应点上也具备，则称S的这个性质是与参数无关的。微分几何的任务就是准确地研究那些与参数无关的性质。下面举一些例子：

首先可注意，若变换 $u(\tilde{u})$ 的雅可比矩阵是

$$U=(u_{ij}); \qquad u_{ij}=\frac{\partial u_i}{\partial \tilde{u}_j},$$

则由 $u(\tilde{u})$ 是微分同胚这个条件就可得出在 $\tilde{D}$ 内，

$$\frac{\partial(u_1,\ u_2)}{\partial(\tilde{u}_1,\ \tilde{u}_2)}=\det U\neq 0。$$

再根据链法则，由 $S\in C^r$ 级及 $u(\tilde{u})\in C^r$ 级可见 $\tilde{S}\in C^r$ 级。因此，$S\in C^r$ 级这个性质是与参数（C^r 级参数变换）无关的。特别是，根据

$$\frac{\partial x_i}{\partial \tilde{u}_k}=\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial x_i}{\partial u_j}\frac{\partial u_j}{\partial \tilde{u}_k},$$

或写成矩阵形式

$$\tilde{M}=MU,$$

可得

$$\tilde{G}=U^{T}GU \tag{1.8}$$

及

$$\begin{aligned}\det\tilde{G}&=\det G(\det U)^2\\&=\det G\left(\frac{\partial(u_1,\ u_2)}{\partial(\tilde{u}_1,\ \tilde{u}_2)}\right)^2。\end{aligned} \tag{1.9}$$

于是，根据（1.7），从（1.9）可直接推出S在某点是正则的这个性质也是与参数无关的。

现在，假设Δ是D的一个子域且Δ的闭包$\overline{\Delta}\subset D$，设Σ是曲面X(u)限于u∈Δ上的一部份，则定义Σ的面积为

$$A(\Sigma)=\iint_{\Delta}\sqrt{\det G}\ du_1du_2 \tag{1.10}$$

如果$u(\tilde{u})$是把$\overline{\Delta}$映射到Δ的一个参数变换，利用（1.9）以及重积分的变量替换法则可得到相应的曲面$\tilde{\Sigma}$的面积为

$$A(\tilde{\Sigma})=\iint_{\tilde{\Sigma}^{*}}\sqrt{\det\tilde{G}}\ d\tilde{u}_1d\tilde{u}_2$$

* 译者注：此处原书为$\tilde{\Delta}$

$$=\iint\limits_{\widetilde{\Delta}}\sqrt{\det G}\left|\frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(\widetilde{u_1}, \widetilde{u_2})}\right| d\widetilde{u_1}, d\widetilde{u_2}$$

$$=\iint\limits_{\Delta}\sqrt{\det G}\ du_1du_2=A(\Sigma)$$

所以，曲面的面积也是与参数无关的。

为了研究问题方便，经常需要选取特殊的参数，令 i 和 j表示从 1 至n中任意两个固定的不同整数，並设D是x_i，x_j平面内的一个域，则方程

$$x_k=f_k(x_i, x_j) \qquad K=1, \cdots, n;$$
$$K\neq i, j; (x_i, x_j)\in D \quad (1.11)$$

就确定了E^n内的一个曲面，按这种方法定义的曲面称作是给出了曲面的非参数形式或显式方程。当然这是一种特殊情形，所取的参数是 E^n 内的两个坐标。换句话说，可以把（1.11）再写成下述形式：

$$x_i=u_1, \quad x_j=u_2, \quad x_k=f_k(u_1, u_2),$$
$$k\neq i, j \qquad (1.12)$$

在 n=3 的情况下，函数 f_k 只有一个，因此可以通过把某一个坐标表示成另外两个坐标的函数来定义曲面。

为了把曲面表示成非参数形式，显然必须要求限制于曲面上的射影映射

$$(x_1, \cdots, x_n)\to(x_i, x_j) \qquad (1.13)$$

是 1—1 的。一般讲，这个要求对整个曲面是不成立的，但是我们有下面重要的引理。

引理 1.2 设S是一个曲面x(u)，u=a是曲面上的一个

正则点，则存在着 a 的一个邻域Δ，使得当把 $x(u)$ 限制于Δ而得到的曲面 Σ，有一个以非参数形式再参数化了的曲面$\tilde{\Sigma}$。

证明：根据正则性条件（1.5），並利用逆映射定理可知：存在着 a 的一个邻域Δ，在这个邻域 Δ 内，映射 $(u_1, u_2) \longrightarrow (x_i, x_j)$ 是微分同胚的。此外，如果 $x(u) \in C^r$ 级，则其逆映射 $(x_i, x_j) \longrightarrow (u_1, u_2)$ 也是 C^r 级的，因此，确定曲面$\tilde{\Sigma}$的复合映射

$$(x_i, x_j) \rightarrow (u_1, u_2) \rightarrow (x_1, \cdots, x_n) \qquad (1.14)$$

同样也是C^r级的。

于是，在研究曲面局部性质时，只要假设曲面是非参数形式的就会带来很大的方便。同时，还要注意再参数化法（1.14）表示在一个正则点的邻域内，映射$x(u)$总是 1—1 的。

为了更精确地研究曲面在一个已知点邻近的形状，就必须研究曲面上过这一点的所有曲线。首先“E^n内的曲线C”的含意是一个连续可微映射

$$\phi: (\alpha, \beta) \longrightarrow E^n。 \qquad (1.15)$$

其中 (α, β) 表示实直线上的某个区间，並记作

$$x = \phi(t), \qquad \alpha \leqslant t \leqslant \beta;$$
$$\phi(t) = (\phi_1(t), \cdots, \phi_n(t)) \in C^1 \qquad (1.16)$$

曲线在t_0的切向量是向量

$$x'(t_0) = (\phi_1'(t_0), \cdots, \phi_n'(t_0))。 \qquad (1.17)$$

如果$x'(t_0) \neq 0$，则称曲线在t_0点是正则的。

现在，假设用$x(u)$，$u\in D$来定义曲面S，並根据(1.15)来定义一条曲线C，如果在映射ϕ下，$(\alpha,\ \beta)$的象包含在映射$x(u)$下D的象内，则称曲线C在曲面S上。因为我们现在仅至力于研究局部曲面S，所以在曲面S上取某个正则点$u=a$，而且，把$x(u)$*限制于a的一个邻域，使得在此邻域内引理1.2成立。

下面仍用D来表示这个被限制的区域，用S来表示这个曲面，于是可得到表达式（1.14）而且可知映射$x(u)$在D内是1—1的。观察通过点$b=x(a)$並且在曲面S上的所有曲线C，为了固定记法可以假设存在一个固定值$t_0(\alpha<t_0<\beta)$，对于每条曲线C都有$\phi(t_0)=b$，再根据表达式（1.14）可知，对于每一条满足这个条件的曲线都对应了D内一条曲线$u(t)$而且$u(t_0)=a$，反过来，对于在D内满足$u(t_0)=a$的每条曲线$u(t)$，显然也对应了曲面S上的一条曲线$\phi(t)=x(u(t))$，而且它满足条件$\phi(t_0)=b$。求这条曲线C的切向量的公式是：

$$x'(t_0)=u_1'(t_0)\frac{\partial x}{\partial u_1}+u_2'(t_0)\frac{\partial x}{\partial u_2}, \qquad (1.18)$$

式中$\dfrac{\partial x}{\partial u_1}$与$\dfrac{\partial x}{\partial u_2}$在$u=a$点取值。

引理 1.3 在曲面S的一个正则点，如果研究过这点的所有曲线的集合则曲线在此点的所有切向量构成一个二维向量空间。

证明：显然，在D内可找到满足条件$u(t_0)=a$並且$u_1'(t_0)$及$u_2'(t_0)$取任意指定值的曲线$u(t)$，根据（1.18）

---

*译者注：原书是$x(a)$

可知切向量$x'(t_0)$的集合就是由两个向量$\frac{\partial x}{\partial u_1}$及$\frac{\partial x}{\partial u_2}$的所有线性组合组成的。但是又由正则性条件（1.3）可知这两个向量是无关的，因此就张成了一个二维向量空间。

定义：引理1.3所给出的向量空间称作曲面S在点$b=x(a)$的切平面，记作π或$\pi(a)$。

因此，一个曲面S在每个正则点都有一个切平面，根据定义可知它与参数无关。

由（1.11）及（1.18）可得切向量的长为

$$\begin{aligned}|x'(t_0)|^2 &= x'(t_0)\cdot x'(t_0)\\ &= \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}u_i'(t_0)u_j'(t_0) \qquad (1.19)\end{aligned}$$

也就是说切向量$x'(t_0)$长度的平方可以用相应的切向量$u'(t_0)$的二次型来表示，这个二次型的系数矩阵为G，通常称此二次型为曲面的第一基本形式，由公式（1.10）看出可用这个二次型的系数矩阵的行列式计算曲面的面积，因为在E^n内，曲线$x(t)\ \alpha\leqslant t\leqslant\beta$的长度是由公式

$$L=\int_\alpha^\beta |x'(t)|dt \qquad (1.20)$$

计算的，因此根据公式（1.19）就可类似地求出曲面上曲线的长度。用它来计算形如（1.16）的任意曲线C，很容易求得

$$S(t_0)=\int_\alpha^{t_0}|x'(t)|dt \qquad (1.21)$$

因为$S'(t_0)=|x'(t_0)|\geqslant 0\quad(\alpha\leqslant t_0\leqslant\beta)$，于是得到一个单调映射：

$$S(t): (\alpha, \beta) \longrightarrow (0, L) \tag{1.22}$$

若曲线C是一条正则曲线，则 $S'(t)=|x'(t)|>0$，因此映射（1.22）存在着可微逆映射$t(s)$。复合映射

$$\widetilde{\phi}(s): (0, L) \xrightarrow{t(s)} (\alpha, \beta) \xrightarrow{\phi(t)} E^n \tag{1.23}$$

就定义了一条曲线$\widetilde{C}$，称$\widetilde{C}$为曲线C关于弧长为参数的参数化曲线，在每一点$\widetilde{C}$的切向量是单位切向量：

$$T=\frac{dx}{ds}=\frac{x'(t)}{s'(t)}; \quad \left|\frac{dx}{ds}\right|=\frac{|x'(t)|}{s'(t)}=1 \tag{1.24}$$

下面，我们想研究一下二阶导数的意义（“二阶效应”）从现在开始，假定所讨论的曲线都是 C^2 级正则曲线。这样就可以按（1.23）把曲线关于弧长参数化了，此外，在每一点把单位切向量关于弧长的导数

$$\frac{d^2x}{ds^2}=\frac{dT}{dS} \tag{1.25}$$

定义为曲率向量。

在以下的讨论将采用引理1.3前面一段的记法，不过又附加了曲面 $S\in C^2$ 级这个假设並且规定 S 上通过正则点$b=x(a)$的曲线都是S的 C^2 级正则曲线。下面将设法描述通过$b=x(a)$点的所有曲线在此点的曲率向量。确切地说就是，如果 π 是曲面S在 $x=b(a)$ 处的切平面，用$\pi^{\perp}$表示它的正交余集，把这个n—2维空间称作S在这点的法空间。每一个向量都由它在切空间π及冷空间 $\pi^{\perp}$ 的射影所确定。为此，我们将检查一下曲率向量在$\pi^{\perp}$的射影。

法空间 $\pi^{\perp}$内的任一向量N称作曲面S的法向量，又因为