目 录

绪 论

一、物理实验课的地位和作用

物理学本质上是一门实验科学。物理学的发展过程中，物理实验是一个重要的、决定性的环节。在科学技术迅猛发展的今天，物理实验技术和方法几乎介入自然科学所有领域，成为工程技术的重要基础。

物理实验课是工科学生进入大学后，受到系统实验技能训练的开端，是一系列专门实验训练的重要基础。它是在教师指导下，让学生动手，通过对各种基本物理量的测定，对实验现象的观察、分析、总结，逐步掌握实验知识和方法，培养学生的实验技能和科学作风的一门课程。因此，它与理论教学具有同等重要的地位。

二、物理实验课教学目的和要求

物理实验课教学的目的是：训练学生的科学实验能力与提高学生的科学实验素质，以使学生掌握独立进行科学实验的基础知识与基本技能。

科学实验能力包括自学能力、动手能力、分析解决问题能力、安装调试仪器能力、排除故障能力、文字表达能力、归纳综合能力、设计创新能力、科学想象能力等。科学实验素质包括理论联系实际和实事求是的科学作风，严谨务实、认真细致的工作态度，遵守纪律、爱护公物的良好品德，善于思考、主动探究的钻研精神等。能力和素质二者同时具备才是实验课教学根本目的，也是今后科学研究取得重大成就的前提。

物理实验课的要求如下：

（一）学习并掌握物理量的基本测量方法

（1）长度、时间（周期）、质量、转动惯量、杨氏模量、黏度等；

（2）温度、湿度、气压等；

（3）电流、电压、电阻、电容、电感、电动势（电池的电动势、温差电势、霍尔电势）、电阻温度系数、磁感应强度等；

（4）波长、波速、频率、光学元件参数等。

（二）熟悉常用仪器和器件的基本原理和性能，掌握其正确使用方法

（1）米尺、游标尺、千分尺（螺旋测微器）、物理天平、秒表、光杠杆等；

（2）温度计、气压计、湿度计等；

（3）实验室常用电源、电键、电阻箱、滑线变阻器、直流电表、灵敏电流计、标准电池、电位差计、电桥、电子示波器、信号发生器等；

（4）测量望远镜、读数显微镜、测微目镜、分光计、光具座、单色光源、光学元件等。

（三）学习并逐步掌握处理实验数据的方法

（1）能按读数规则如实地正确记录数据，并能按有效数字的运算法则进行正确运算；

（2）懂得多次测量的意义，学会计算平均值、绝对误差、相对误差、不确定度、了解标准差的概念，能给出测量结果的正确表示；

（3）学会处理实验结果的图示法（包括函数曲线和校正曲线）。

（四）实验过程中有意识地培养、训练学生良好的实验习惯和作风

（1）重视安全（人身安全，仪器、装置安全），爱护实验仪器和装置，严格遵守操作规程；

（2）重视原始数据的采集和如实记录，做到科学地处理数据；

（3）注意并记录实验环境条件，按要求撰写预习报告和实验报告。

（五）逐步提高分析实验结果的能力

（1）能逐步分析影响实验结果的因素和判断实验结果的可靠性；

（2）能够逐步提高自己排除和解决实验中出现的故障和问题；

（3）逐步了解一些制定实验方案、选配仪器的基本原则，培养自己制定实验方案、选配仪器的能力。

三、物理实验的特点

1. 科学性

理论是科学，实验也是科学。这要求实验人员：首先，必须充分尊重事实，来不得半点虚假，不可以随意更改实验数据；其次，实验数据的处理必须采用科学的方法，不可以随意处理。

2. 实践性

实验是实践活动。对于实验过程，必须考虑各种实际情况，得出的结论要符合实际：符合实际环境的设计，如温度，压强等；符合仪器的实际，如精度等；符合实验的物理条件，如物体大小，有无摩擦等。实验结果的评判、分析，只有结合实际情况才能得出合理的结论。

物理实验是以动手为主，手、脑并用的科学实践活动，必须进行实际的操作。模拟实验、仿真实验、演示实验对实验课只能起辅助作用，决不能代替实际操作，否则必然是“一看就懂，一做就错”。

3. 综合性

每个物理实验是多学科知识的综合运用，即使一个简单的力学实验，通常也涉及光学、电学、机械学等各方面的知识。

实验工作很多是借助实验仪器完成的，我们不但要搞清实验原理，还要搞清实验仪器的基本结构和工作原理，学会按要求操作，学会处理一些常见的简单问题。

因此，一个优秀的实验工作者，其知识面必须很宽广，不仅在某一领域要有很深的造诣，而且在其他学科领域也要有一定的修养，并能综合运用多学科知识。

四、物理实验课教学环节

物理实验课一般包括如下三个环节。

（一）预习阶段

实验前要求充分预习，并写出预习报告。预习报告包括下列各项内容。

（1）实验目的：扼要说明该实验所要解决的核心问题。

（2）实验原理：说明实验所依据的主要物理定律或主要公式。电学实验中，要求给出原理电路和实验电路；光学实验中，要画出光路图和装置简图。对直接采用的公式，必须说明各参数的意义和准备采用的测量方法。

（3）实验仪器：要求说明仪器的型号、规格和量程，并列出主要参数，如游标卡尺的精度、电表的级别和内阻、温度计的量限和允许误差等。

（4）实验方法和步骤：实验怎样进行？哪些是已知的？哪些是待给定的？这些都必须预先了解清楚，并拟订观测计划。拟定实验步骤或操作程序，必须注意先后顺序，合理安排。

（5）数据表格：对一切已知的、待定的和待测定的物理量，都必须一一列出待填。对那些需要多次观测或多次重复观测的待测量，应根据情况自己先设计简明合理的记录表格。

在预习过程中，应仔细阅读实验原理，经过分析，了解观测过程中应把注意力集中在哪些关键环节，决定哪些量只需作单次观测，哪些量必须进行多次重复观测。只有充分准备，才能主动、积极地进行实验，才能很好地完成实验。

（二）课堂实验

课堂实验是实验教学的中心环节。学生经过充分预习，按照拟订的方案，安排、布置实验环境，连接线路，进行实验操作、观察和测量。实验过程中，学生应在教师指导下，主动积极地去进行并完成实验。

在实验过程中如果遇到问题，应看作是学习的良机，冷静地进行分析和处理。仪器发生故障时，也要在教师指导下学习排除故障的方法。总之，要把着重点放在实验能力的培养上，而不是测出几个数据就完成任务了。实验数据要严肃对待，学生要用钢笔和圆珠笔记录原始数据。如确实记错了，也不要涂改，应轻轻画上一道痕迹，在旁边写上正确数值（错误多的须重新记录），使正误数据都能清晰可辨，以供在分析测量结果和误差时参考。实验结束时，将实验数据交教师审阅签字，整理还原仪器后方可离开实验室。

（三）撰写实验报告

完成实验以后，要把观测结果和数据记录在预习报告的“数据记录”栏中，并在预习报告的基础上完成实验报告。数据处理和误差分析是实验报告的主要内容。在预习过程中，尽管做了许多工作，但是在实验过程中，还可能出现许多原来未考虑到的问题，如何分析和解决这些问题，必须在报告中有所反映。应对实验结果进行分析和讨论，总结自己的经验、心得和体会，或提出改进的建议等。实验报告一般包括如下几项：

（1）实验名称

（2）实验目的

（3）实验原理　简要阐述有关物理内容（包括电路图、光路图或实验装置示意图）及测量中依据的主要公式，式中各量的物理含义及单位，公式成立应满足的实验条件等。

（4）实验仪器　实验过程中所用到的仪器及规格。

（5）实验步骤　根据实际的实验过程写出关键操作步骤和注意要点。

（6）实验结果　实验结果一般应包括：测量结果的数值、不确定度（包括置信概率）

和物理量的单位。

（7）小结、讨论或者回答思考题

这就是完整的结果表达式。如果实验是观察某一物理现象或验证某一物理定律，则需要根据误差判定实验是否验证了该定律，写出明确的结论。

以上三个环节的内容集中在一张实验报告纸上，构成一份完整的实验报告。撰写实验报告是对于文字表达能力、归纳综合能力、分析判断能力的有效训练。整个过程要求格式规整、字迹清楚、文理通顺、语言简明、数据齐全、图表正确、结论可靠，并按时上交。

本书给出供初学者参考实验报告模板，见附录A。

第一章 物理实验测量数据的分析与处理

第一节 测量误差的基本理论

物理实验的目的是揭示物理现象和探寻物理规律，而物理规律通常是由各物理量之间的定量关系进行描述的，探究物理现象和物理规律就需要对各物理量进行定量的测量。但是在实际测量过程中，不仅要对测量结果的大小进行评判，还要对测量的可靠性进行评判，这就是测量误差理论。

一、测量误差

在实际测量过程中，根据测量方法的不同，对物理量的测量常常分为直接测量和间接测量。直接测量就是将被测量量与标准量直接进行比较，从而获得被测量量的数值。例如，利用米尺测量钢丝的长度，则以米尺为标准，将钢丝的长度和米尺进行比较而得出钢丝的长度的量值，给出测量结果。而间接测量是指利用直接测量物理量通过函数关系而获得待测量。例如测量液体的密度，是通过测量质量和体积而获得的。但是，不论直接测量还是间接测量，任何一个物理量的大小都是客观存在的量，称为真值。在测量过程中，人们无论以何种方法得到结果，都称为测量值。由于测量值与测量所采用的理论方法和测量环境、测量人员的实验技能和判断能力、实验仪器的精度都有关，无论人们怎么改进仪器和测量方法，测量结果只是不断接近真值而不能达到真值。因此，测量值和真值之间总存在一个差值，称为测量误差。若某一物理量的测量值为 x，真值为 A，则测量误差定义为

$$\Delta x = x - A \tag{1-1-1}$$

式（1-1-1）定义的测量误差反映了测量值偏离真值的大小和方向，因此又称为绝对误差。一般来说，真值仅是一个理想概念，严格来说真值通过测量是不可能得到的。在实际测量过程中，理论计算表明多次测量的平均值$\bar{x}$可以无限接近真值。为此，其常作为最佳值来计算绝对误差。

$$\Delta x = x - \bar{x} \tag{1-1-2}$$

绝对误差可以表示某一测量结果的优劣，但比较不同测量结果则不适用。例如，测量原长为 10m 的物体结果为 10.01m 和测量原长为 1m 的物体结果为 1.01m，尽管绝对误差一样为 1cm，但是测量的精度不同。因此，通常采用相对误差来表示。

相对误差的定义：

$$E = \Delta x / A \tag{1-1-3}$$

此外，相对误差还可用“百分误差”来表示，即 $E = \Delta x / A \times 100\%$。例如，上述测量 10m 和 1m 的物体绝对误差都为 1cm，相对误差分别为 $+0.1\%$ 和 $+1\%$。

二、误差的分类及其处理方法

根据误差的特点以及对实验的影响，可以把误差分为两类：系统误差、随机误差。

1. 系统误差

在实际测量条件下，多次测量同一物理量时，测量结果始终保持恒定或按照一定的规律变化所造成的误差称为系统误差。例如，天平的零点不准、热胀冷缩使尺子的长度发生变化等。

系统误差按产生的原因分为仪器误差（仪器本身缺陷或安装调整不当造成的误差）、个人倾向误差（操作人员的个人倾向造成的误差）、理论与方法误差（实验原理不够完善或测量所依据理论的近似性造成的误差）和环境误差（环境温度和湿度与标准条件偏离造成的误差）。

系统误差在实验过程中，有些是可以避免的，有些则常采用下列方法消除或修正。

（1）交换抵消法：将测量中的某些条件（例如被测量物体的位置等）相互交换，使产生系统误差的原因对测量结果起相反的作用，再取平均值即可抵消系统误差。例如，用等臂天平称物体质量。如因天平臂长不等而引起系统误差时，可以交换被称物体和砝码所放的位置，称两次，取两次天平平衡时砝码的平均值（几何平均值）作为称量结果，即可以消除这种系统误差。

（2）替代消除法：在伏安法测电阻的实验中，如图 1-1-1 所示，理论上有 $R = V_{ab}/I$，但由于电压表有一定的内阻，因而所测电流 I 将因流入电压表而发生改变，造成系统误差。

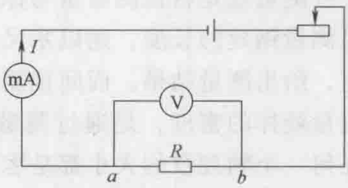

图 1-1-1 伏安法测电阻

因替代法测量，是用一只标准电阻箱替换 R，调节电阻箱的阻值，使在电源、滑线变阻的取值都不变的情况下，使毫安表的指示值与原来相同，则此时电阻箱的阻值 R_0 等于被测电阻 R，这样就消除了系统误差。在改装电表的实验中，我们就是用这种方法测量表头的阻值。

（3）对称测量法（异号法）：改变测量中的某些条件（例如测量方向）使两次测量结果的系统误差的符号相反，再取其平均值以消除系统误差。例如，霍尔效应实验中，为了消除不等位电势差等 4 种副效应造成的系统误差，常采用对称测量法使工作电流和励磁电流异号。

（4）引入修正值法：当掌握系统误差出现的规律时，按其规律计算出系统误差，就可引入修正值对结果进行修正。

修正值是为了补偿系统误差，采用代数方法加入测量结果的一个值，它和系统误差符号相反，绝对值相同。例如，常见的刻度尺零点磨损问题，常采用修正值法。

所以，测量结果 = 测量值 - 修正值。

2. 随机误差

在实际测量过程中，等精度多次测量同一被测量时，以不可预知的方式变化（大小、符号的正负随机出现）的误差称为随机误差。随机误差的特点是，单个具有随机性，而总体服从统计分布，测量中常见的分布为正态分布、均匀分布等。

随机误差是我们在测量过程中要处理的主要问题。

三、测量结果的评价

测量结果的好坏，关系到一次测量成功与否。从误差理论的角度看，测量结果的质量通常采用精密度、正确度和准确度来评价。

精密度——表示测量结果中随机误差的大小，是对测量结果重复性的评价，系指在规定条件下对被测量进行多次测量时，所得结果之间符合的程度。

正确度——表示测量结果中系统误差的大小。正确度高是指测量结果偏离真值较小，在规定条件下，测量的系统误差小，反映了测量结果中所有系统误差的综合。

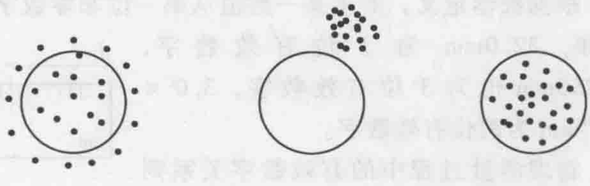

图 1-1-2　精密度、正确度和准确度

a) 正确度高，精密度低　b) 精密度高，正确度低　c) 准确度高

准确度——表示测量结果与被测量的（约定）真值之间的一致程度。准确度又称精确度，准确度高是指测量结果既精密又正确。它反映了测量结果中系统误差与随机误差的综合。

作为一种形象的说明，如图 1-1-2 所示。

第二节　测量结果与不确定度

一、测量结果的表示

测量结果的表示对一次完整的测量有十分重要的意义，它不但可以使自己明白当时的测量情况，还可以作为数据记录的原始材料。对于实际测量过程，首先，要明确对被测量的要求；其次，要选择合适的方法和正确的步骤；最后，要根据误差理论和数据处理的要求，给出完整的测量结果。

从绪论我们已经了解测量结果的表示，对于实际测量过程中完整的测量结果应该具有以下的表述才为完整的表述：

$$A=\overline{A}\pm u(A)\text{单位}\quad (P=\qquad)$$

式中，A 为待测量物理量；$\overline{A}$为待测量物理量的平均值；$u(A)$为测量结果的不确定度；P 为置信概率。

例如，利用精度为 0.02mm 的游标卡尺测量直径约为 1.5cm 的某器件直径，多次测量结果的平均值为 15.32mm，测量结果的不确定度为 0.03mm，置信概率为 0.683，则该次测量结果的正确表示为

$$D=(15.32\pm0.03)\,\text{mm}\quad (P=0.683)$$

一般来说，完整的测量结果应该包括以下三要素：测量结果的数值、物理量的单位和不确定度表示以及置信概率。

二、测量结果的数值处理

在测量过程中，受测量仪器的精度及人的感觉器官分辨本领的限制，任何测量结果的数值都不是绝对准确的，即存在一定的误差。那么，在所测的数值中，准确到哪一位？又从哪一位开始有误差？不同误差位数之间测量数值如何运算？怎样才能做到既不损害又不夸大实际测量的准确程度？这些都是测量结果所要考虑的问题。

（一）有效数字的概念

根据数学定义，对于某一数值从第一位非零数字开始后面所有的数字统称为有效数字。例如，32.0mm 为 3 位有效数字，0.0256mm 也为 3 位有效数字，3.0×10^{-6}mm 为两位有效数字。

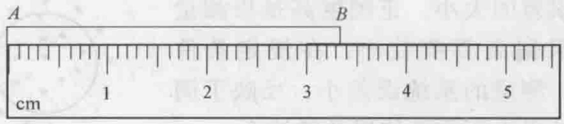

图 1-2-1 用米尺测量长度示意图

物理测量过程中的有效数字关系到测量的准确性，其取决于仪器精度。我们以用米尺测量长度为例加以说明，如图 1-2-1 所示。

设物体的 A 端与米尺的零点对齐，B 点落在 40mm 与 41mm 之间。为了准确读数，根据米尺使用规则要求估读到仪器分度值的下一位（即 0.1mm），则物体的长度为 40.3mm，从图上可以看出 40mm 为准确值，是可靠数字。而在 40 ~ 41mm 之间 0.3mm 为估读值，其取决于测量人员本身，为可疑数字，体现出了随机误差。为此，我们得到测量结果 40.3mm 为 3 位有效数字，其中末位为可疑数字。可疑数字与仪器的使用和精度有关。因此，有效数字具有双重性质：一方面它反映了数量的大小，另一方面它反映了测量仪器的精度。我们在记录实验数据时不能随意地增减有效数字的位数，而应该按有效数字的定义和读数规则来记录数据。

（二）有效数字的运算规则

正确运用有效数字的运算规则，既可以解决在数值计算中各量取值位数不同而影响实验结果原有的精度问题，又不至于去进行不必要的取位过多的运算。

有效数字进行数字运算时，一般应遵循如下原则：可靠数字与可靠数字运算，其结果仍为可靠数字；可靠数字与可疑数字或可疑数字与可疑数字相运算，其结果均为可疑数字。

1. 有效数字的加减运算规则

有效数字的加减运算法则：计算过程中有效数字的取舍一般与参与运算的所有有效数字末位最高的相同。

例 1-2-1：$20.\underline{1}+4.17\underline{8}=24.\underline{2}7\underline{8}\Rightarrow 24.3$； $19.6\underline{8}-5.84\underline{8}=13.8\underline{3}\underline{2}\Rightarrow 13.83$

2. 有效数字的乘除运算规则

有效数字的乘除运算法则：计算过程中有效数字的取舍一般与参与运算的各量中位数最少的相同。

例 1-2-2：$4.17\underline{8}\times 10.\underline{1}=42.\underline{1978}\Rightarrow 42.2$； $4821\underline{6}\div 12\underline{3}.0=39\underline{2}\Rightarrow 392.0$

3. 数字和物理、数学常数的取位规则

如若出现常数项或物理、数学常数，则其有效位数无限，运算时需要几位则取几位，如没有强调说明，为了减小舍入误差，本书要求其比计算过程中有效数字最多的再多一位处理。

例 1-2-3：若 $f=50.1\text{Hz}$，求 $\omega=2\pi f=?$

则可写为 $\omega=2\times3.142\times50.1\text{Hz}=315\text{Hz}$。注意：常数 2 虽只写一位，但不可理解为只有一位有效数字，π 的取位宜比 f 多保留一位，至少应保留 4 位。

4. 函数的有效数字运算法则

在进行函数运算时，不能搬用四则运算的有效数字运算规则。根据误差传递理论，我们给出一般的处理原则：用微分公式先给出函数微分变量，再由它确定有效数字的位数。

例 1-2-4：$x=9°24'$，求 $\cos x=?$

解：由误差传递理论 $\mathrm{d}\cos x=-\sin x\mathrm{d}x$，取 x 的末位有效数字单位 $1'$ 作为 $\mathrm{d}x$，则 $|\sin x\mathrm{d}x|=0.0000475\approx0.00005$，所以 $\cos x$ 应取 5 位有效数字，即 $\cos x=\cos9°24'=0.98657$，其有效数字为 5 位。其他函数有效数字取位，也应照此处理。

注意：这里计算要求单位统一，角度化为弧度计算。

5. 有效数字的舍入法则

对于实验数据来说，尾数的舍入对于计算数据的准确性是十分必要的。由于大量数据尾数分布的概率相同，采用“4 舍 5 入”的法则常常导致入的概率大于舍的概率；为此，现在通用的做法为“4 舍 6 入遇 5 凑偶”法则，所谓“4 舍 6 入遇 5 凑偶”法则是尾数小于 5 则舍，大于 5 则入，等于 5 若尾数前一位为奇数，则把其凑成偶数，若其已经为偶数，则直接舍掉尾数的法则。这种舍入法则的依据是，这样做可以使尾数的舍入概率相等。

例 1-2-5：将下面左边的数值取 4 位有效数字。

$7.69\underline{1}49$—7.691	$2.717\underline{2}9$—2.717
$4.51\underline{0}50$—4.510	$3.216\underline{5}0$—3.216
$5.62\underline{3}5$—5.624	$3.14\underline{1}59$—3.142

有效数字的处理与运算法则是一种粗略但实际工作中经常用到的方法，应当熟练掌握。下面以平均值计算为例说明有效数字运算规则。

实际测量过程中为了减少随机误差，常采用多次测量取平均值的方法。平均值的位数并不是位数越多越好，而是根据实际测量结果的位数及有效数字运算规则来确定平均值的有效位数。一般来说，平均值的有效数字应与误差的末位对齐，即根据使用仪器的精度来确定其有效数字。

例 1-2-6：利用游标卡尺测量物体的长度 l，测量其不同的位置长度如下：

3.58mm，3.56mm，3.57mm，3.58mm，3.57mm

则 $$\bar{l}=\frac{3.58+3.56+3.57+3.58+3.57}{5}\text{mm}=3.572\text{mm}\approx3.57\text{mm}$$

三、测量的不确定度

不确定度的表示和评定体系是在现代误差理论的基础上建立和发展起来的，是对被测物理量的真值所处量值范围的评定，表征了由于测量误差的存在使得被测量不能确定的程度。不确定度一般由许多成分组成，主要与我们讨论的系统误差、随机误差有关，其反映了随机误差分量和未定系统误差分量的联合分布范围，可以近似地将其理解为一定概率的误差限值。

不确定度理论将其按测量数据的性质分类：符合统计规律的称为 A 类不确定度，记为

u_A，而不符合统计规律的称为B类不确定度，记为u_B，二者标准差的合成称为合成标准不确定度，记为u。

不确定度的提出并不排斥误差理论，它们具有不同的性质：不确定度总是不为零的数，而误差可正可负，或是接近零；不确定度原则上是可以具体评定的，而误差一般由于真值的未知性而无法计算。由于不确定度本身为一个置信概率的问题，除某些特殊要求外，不确定度数的位数最多保留2位，再多也没有意义。作为一种教学规范，我们规定：不确定度的数值一般取位不超过2位，本书取1位，超过1位采用最大化处理，进位上去。如：

$30.05\pm0.023\Rightarrow30.05\pm0.03$；$50.6\times10^{-3}\pm0.00026\Rightarrow(50.6\pm0.3)\times10^{-3}$。

但有时计算不确定度出现测量结果本身的取位与不确定度末位不对齐的情况。一般采用尾数按“4舍6入遇5凑偶”的法则修约。如：

$8.052\pm0.02\Rightarrow8.05\pm0.02$；　$50.16\pm0.6\Rightarrow50.2\pm0.6$；　$7.205\pm0.06\Rightarrow7.20\pm0.06$

注意：在不确定度的计算中，各物理量应以不影响最终结果为原则，中间过程可比正常截断多取几位（比如1至2位），以免造成舍入误差的积累效应。

四、几种主要统计分布和置信概率

置信概率反映本次测量过程中，在某一测量范围内的可信程度，如上述过程中，

$$D=(15.32\pm0.03)\,\text{mm},\quad (P=0.683)$$

表示真值落在［15.29，15.35］内的概率为68.3%。当然，置信概率不是随意得出的，其以相应的数学理论为基础，不同的置信概率与测量结果的统计分布有关。在物理实验中最常见的概率密度分布为正态分布和均匀分布，下面分别予以简单介绍。

（一）正态分布（高斯分布）

正态分布是误差理论中应用最多的一种分布。正态分布是随机误差的一种典型分布，根据数学上中心极限定理，正态分布是其他分布的一种极限。理论和实践表明，若被测量存在多个误差来源，那么不管这些随机因素服从哪种分布，只要这些误差对测量结果总的影响不大，则该测量量总的误差分布可近似看作正态分布。

正态分布的分布密度为

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-x_0}{\sigma}\right)^2\right] \tag{1-2-1}$$

式中，x为测量值；x_0为真值；$\sqrt{2\pi}$为归一化常数；σ为标准差，它是描述测量值分散度的参数，大小可以直接描述正态分布曲线的形状，σ越小，曲线越尖，反之则相反，如图1-2-2所示。

$$\int_{x_0-\sigma}^{x_0+\sigma}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{x_0-\sigma}^{x_0+\sigma}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-x_0}{\sigma}\right)^2\right]\mathrm{d}x=0.6827 \tag{1-2-2}$$

$$\int_{x_0-2\sigma}^{x_0+2\sigma}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{x_0-2\sigma}^{x_0+2\sigma}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-x_0}{\sigma}\right)^2\right]\mathrm{d}x=0.954 \tag{1-2-3}$$

$$\int_{x_0-3\sigma}^{x_0+3\sigma}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{x_0-3\sigma}^{x_0+3\sigma}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-x_0}{\sigma}\right)^2\right]\mathrm{d}x=0.997 \tag{1-2-4}$$

计算结果表明，在正态分布的情况下，在（$x_0-\sigma$，$x_0+\sigma$）区间内的概率为68.3%；

在（$x_0-2\sigma$，$x_0+2\sigma$）区间内的概率为 95.4%；在（$x_0-3\sigma$，$x_0+3\sigma$）区间内的概率为 99.7%。理论上来讲，正态分布的随机变量取值范围可以为（$-\infty$，$+\infty$），但就具体的实验测量过程而言，测量范围在 $\pm 3\sigma$ 以外可近似认为为零。为此常取 $\Delta=3\sigma$，作为误差的最大限度处理（误差限）。例如，上述结果采用误差限表示为

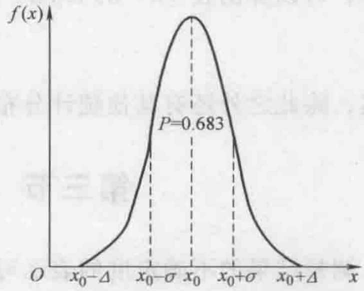

图 1-2-2　正态分布图

$$D=(15.32\pm 0.09)\ \mathrm{mm}\quad (P=0.997)$$

标准差 σ 为

$$\sigma=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_0)^2}\qquad(1\text{-}2\text{-}5)$$

由于作为 x_0 为真实值实际上是不可能知道的，但是，多次测量的平均值往往很接近真值，计算过程常用最佳值代替真值，这样标准差通常以平均值的标准偏差代替：

$$s(\bar{x})=\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\qquad(1\text{-}2\text{-}6)$$

当然，平均值毕竟不是真值，只有在多次测量的情况下，才能代替真值，确保测量结果的置信概率，当然，测量次数越多越好。但是，实践表明，从 10 次到 20 次测量结果变化不大。因此，一般测量 10 次左右足够了。但是，测量次数过少必须乘以相关系数，才能确保置信概率，具体情况在后面讨论。

（二）均匀分布

均匀分布是误差理论中常见的一种分布。测量过程中，测量仪器本身往往会造成误差。自然，每种仪器都有自己的误差限。但是，单个产品质量在误差限范围内服从一定的概率分布，常用仪器其质量指标较多服从正态分布，有的服从均匀分布或三角分布。使用仪器过程中，如果信息的具体资料不全，常认为其服从均匀分布。

均匀分布的分布密度为

$$f(x)=\begin{cases}A & a-\Delta\leqslant x\leqslant a+\Delta\\ 0 & 其他\end{cases}\qquad(1\text{-}2\text{-}7)$$

均匀分布的特点是在误差范围内误差出现的概率密度相同，而在误差范围外概率密度为 0，如图 1-2-3 所示。

根据归一化条件：

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{a-\Delta}^{a+\Delta}A\,\mathrm{d}x=1\qquad(1\text{-}2\text{-}8)$$

可以计算出 $A=1/2\Delta$。在均匀分布的情况下，标准差满足下式：

$$\sigma^2=\int_{a-\Delta}^{a+\Delta}(x-a)^2f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{\Delta^2}{3}\qquad(1\text{-}2\text{-}9)$$

所以在均匀分布的情况下，标准差 σ 和误差限 Δ 之间关系为

$$\sigma=\frac{\Delta}{\sqrt{3}}\qquad(1\text{-}2\text{-}10)$$

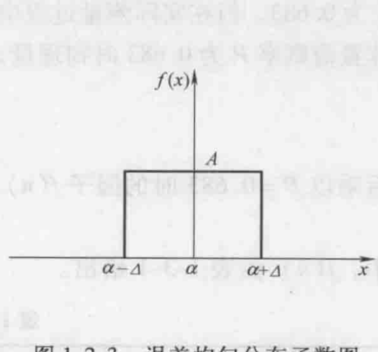

图 1-2-3　误差均匀分布函数图

这样，可以算出在 $[a-\delta, a+\delta]$ 的置信概率为

$$\int_{a+\delta}^{a-\delta} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.577 \tag{1-2-11}$$

当然，除此之外还有其他统计分布对应的置信概率，这里不再赘述。

第三节　测量结果的不确定度评定

测量结果的不确定度的表示可以直接反映测量结果的可行度。现实中，测量结果直接分为直接测量结果和间接测量结果，因此要研究两种测量结果的不确定度表示。

一、直接测量结果的不确定度的评定

实验中，有许多物理量是通过直接测量的方法获得的。例如，利用米尺测长度，利用游标卡尺、千分尺测物体直径，利用天平测质量，利用电流表测电流，利用电压表测电压，利用秒表测时间等等都是直接测量。对于直接测量量通常采用如下方法评定其不确定度。首先，采用统计方法评定 A 类不确定度，然后根据测量过程的具体情况评定 B 类不确定度。

1. 直接测量量 A 类不确定度的评定

对某一物理量 x 进行了 n 次重复测量，测量结果是 x_1，x_2，x_3，…，x_n，则测量结果的平均值

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} \tag{1-3-1}$$

以其作为物理量 x 的最佳估计值，实际测量中常以此求平均值的标准偏差 $s(\bar{x})$：

$$s(\bar{x}) = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}} \tag{1-3-2}$$

标准偏差常作为 A 类不确定度的估计。这种以统计方法给出的标准偏差称为 A 类不确定度，即

$$u_{\mathrm{A}} = s(\bar{x}) = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}} \tag{1-3-3}$$

对于上式，只有当测量的次数 n 非常大，使得测量数据的分布为正态分布时，u_{A} 的置信概率 P 才为 0.683。但在实际测量过程中测量次数较少，这时测量数据的分布通常为 t 分布。为了计算置信概率 P 为 0.683 时物理量 x 的 A 类不确定度，我们先求出该组的测量标准差 $s(x)$：

$$s(x) = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \tag{1-3-4}$$

然后乘以 $P = 0.683$ 时的因子 $f(n)$，即

$$u_{\mathrm{A}} = s(\bar{x}) = f(n)s(x) \tag{1-3-5}$$

式中，$f(n)$ 由表 1-3-1 给出。

表 1-3-1　$P = 0.683$ 时的因子 $f(n)$

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$n>10$
$f(n)$	4.58	1.27	0.81	0.63	0.54	0.47	0.43	0.39	0.38	$1/\sqrt{n}$

实际测量过程中，当要求精度不是很高时，A 类不确定度可直接采用式（1-3-3）计算。

2. 直接测量量 B 类不确定度的评定

B 类不确定度反映了测量过程中不符合统计规律的不确定度，它通常包含了因仪器精度有限所产生的最大允许误差 $\Delta_{仪}$ 和由测量者在测量过程中的估读产生的误差 $\Delta_{估}$。

$\Delta_{仪}$ 由仪器本身的特性决定，通常情况下由仪器的说明书给出。它表示同一规格型号的合格产品在正常使用下，一次测量可能产生的最大误差。一般而言，其为仪器最小刻度所对应的物理量的量级，是误差绝对值的极限值，并不是测量的真实误差。$\Delta_{仪}$ 是一种简化了的误差极限，在物理学中常用来估计由测量仪器造成的误差范围，这时称为仪器误差。

为了方便起见，我们约定本教材中常用仪器的仪器误差（限）如表 1-3-2 所示。

表 1-3-2　常用仪器的仪器误差（限）

仪器名称	$\Delta_{仪}$ 的约定取值方法
钢直尺和钢卷尺	最小分度(mm)的 1/2
游标卡尺	仪器的最小分度
千分尺	最小分度的 1/2
物理天平、分析天平、精密天平	仪器感量的 1/2
停表和数字毫秒表	机械停表和数字毫秒表为最小分度值或时基值
CASIO 电子秒表计	$\Delta_{仪}=(0.01+0.0000058t)$ s(t 为计时时间)
玻璃泡温度计和数字温度计	仪器的最小分度值
电磁仪表	$a\%\cdot A_m$，其中 A_m 为电表的量程，a 为电表所分的等级，常分 5.0, 2.5, 1.5, 1.0, 0.5, 0.2, 0.1 七等级
电阻箱	$\Delta_{仪}=\sum a_i\%\times R_i+0.005(K+1)$，其中 K 为十进制表盘个数，R_i 为第 i 个盘的示值，$a_i\%$ 为相应十进制刻度盘的准确等级。(参见仪器铭牌)

测量者对于被测量物所使用仪器示数判断的不确定性会产生估算误差 $\Delta_{估}$。对于有刻度的仪器仪表，通常 $\Delta_{估}$ 取为其最小刻度的十分之几，小于 $\Delta_{仪}$（因为 $\Delta_{仪}$ 已包含了测量者正确使用仪器的估读误差）。比如，估读螺旋测微计最小刻度的 1/10 为 0.001mm，小于其 $\Delta_{仪}$ 值 0.005mm。

一般情况下，$\Delta_{仪}$ 和 $\Delta_{估}$ 是彼此无关的，直接测量量 B 类不确定度 u_B 为

$$u_B=\sqrt{\Delta_{仪}^2+\Delta_{估}^2}/C \tag{1-3-6}$$

式中，C 为置信系数。通常情况下，$\Delta_{估}$ 远小于 $\Delta_{仪}$，故可将其略去。在基础物理实验教学中，由于基本的仪器误差（限）含有较多的系统误差分量，并兼顾保险（标准不确定度的估计值适当取大）和教学训练的规范简化，我们规定：除非另有说明，仪器误差（限）和近似标准差的关系在缺乏信息的情况下，按均匀分布近似处理，在执行概率为 $P=0.683$ 时，$C=\sqrt{3}$，则

$$u_B=\frac{\Delta_{仪}}{\sqrt{3}}\quad (P=0.683) \tag{1-3-7}$$

3. 直接测量量不确定度的评定

对于各种不确定度都进行评定后，总的不确定度应由两个不确定度的分量共同决定，由于二者为相互对立，则利用方和根法则进行合成求出直接测量量合成标准不确定度 u。

将上述 A 类和 B 类不确定度合成得到置信概率为 $P=0.683$ 时的合成标准不确定度

$$u=\sqrt{u_A^2+u_B^2}\quad (P=0.683) \tag{1-3-8}$$

则测量结果不确定度表示为

$$x=\bar{x}\pm u(x)\quad (P=0.683) \tag{1-3-9}$$

4. 单次测量不确定度的评定

只测一次的情况主要原因有以下三种。其一，仪器精度低，随机误差很小，多次测量读数相同，故不必多次测量；其二，对于测量结果要求不高，测量一次足够；其三，因测量条件限制只能测一次。这时测量结果误差就为仪器误差，其不确定度即为对应的 B 类不确定度：

$$u=u_B=\frac{\Delta_{仪}}{\sqrt{3}}\quad (P=0.683) \tag{1-3-10}$$

5. 直接测量不确定度的举例

例 1-3-1：利用分度值为 0.02mm 的游标卡尺测量某螺钉的内径 d 为（单位：mm）

29.18， 29.24， 29.28， 29.26， 29.22， 29.24

试写出其结果的正确表示。

解：先求出 6 次测量的平均值

$$\bar{d}=\frac{1}{6}\sum_i^6 d_i=29.236\,666\,67\text{mm}=29.24\text{mm}(\text{平均值与测量结果精度一致})$$

测量结果的 A 类不确定度

$$u_A=\sqrt{\frac{\sum_i^n (d_i-\bar{d})^2}{n(n-1)}}=0.014\,06\text{mm}=0.014\text{mm}(\text{中间过程不确定度保留2位})$$

测量结果的 B 类不确定度

$$u_B=\frac{\Delta_{仪}}{\sqrt{3}}=\frac{0.02}{\sqrt{3}}\text{mm}=0.0115473\text{mm}=0.012\text{mm}$$

合成标准不确定度

$$u=\sqrt{u_A^2+u_B^2}=\sqrt{(0.014)^2+(0.012)^2}\text{mm}=0.018\,439\text{mm}=0.02\text{mm}(\text{不确定度保留1位})$$

则测量结果的正确表示为

$$d=\bar{d}\pm u=(29.24\pm 0.02)\text{mm}\quad (P=0.683)$$

二、间接测量结果的不确定度表示

由于在物理实验中很多物理量并不是直接测量得到，而是通过直接测量量与被测量量的函数关系得到，这种方法称为间接测量。例如，通过测量物体的边长得到其体积，利用测量不规则物体的体积和质量得到其密度，利用测量通过某导体的电流和两端电压得到其电阻等。

间接测量结果的误差比较复杂，往往需要考虑误差的传递、各直接测量物理量之间关系等等。本教材只考虑各个物理量相互独立的情况。

1. 间接测量结果的不确定度传播公式

设间接测量量 F 由 n 个相互独立的测量物理量构成，其函数关系为

$$F=f(x_1,x_2,\cdots,x_n) \tag{1-3-11}$$

对上式两边求微分，利用多元函数微分法则可得到

$$\mathrm{d}F=\frac{\partial f}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n \tag{1-3-12}$$

式中，$\partial f/\partial x_1$，$\partial f/\partial x_2$，…，$\partial f/\partial x_n$为 F 对 x_1，x_2，…，x_n 的偏导数（即 F 只对某一变量求导，其他变量视为常数），它表示间接测量量的变化是由其各个参量变化引起的。若考虑到间接测量的函数关系式中有乘除运算和幂的运算，常采用两边取自然对数，然后再求全微分的方法，得到下式：

$$\frac{\mathrm{d}F}{F}=\frac{\partial \ln f}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1+\frac{\partial \ln f}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2+\cdots+\frac{\partial \ln f}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n \tag{1-3-13}$$

因为 $\mathrm{d}x_1$，$\mathrm{d}x_2$，…，$\mathrm{d}x_n$ 均为小量，当把它们看作直接测量结果的不确定度时，由于其相互独立，则可利用方和根法则得到间接测量结果的不确定度

$$u_F=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}u(x_1)\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}u(x_2)\right)^2+\cdots+\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}u(x_n)\right)^2} \tag{1-3-14}$$

和

$$\frac{u_F}{F}=\sqrt{\left(\frac{\partial \ln f}{\partial x_1}u(x_1)\right)^2+\left(\frac{\partial \ln f}{\partial x_2}u(x_2)\right)^2+\cdots+\left(\frac{\partial \ln f}{\partial x_n}u(x_n)\right)^2} \tag{1-3-15}$$

其中式（1-3-14）称为不确定度传播律，$\partial f/\partial x_1$，$\partial f/\partial x_2$，…，$\partial f/\partial x_n$称为不确定度的传播系数。需要说明的是，在计算过程中如果间接测量量函数关系为加减运算常考虑式（1-3-14），而如果函数关系含有较多的乘除运算和幂的运算常考虑式（1-3-15）。两种方法等效。

2. 间接测量不确定度计算举例

例 1-3-2：在利用单摆测量重力加速度实验中，分别利用米尺和螺旋测微计测量悬线长为 $l_0=(950.2\pm0.4)\,\mathrm{mm}$、小球的直径 $d=(8.952\pm0.005)\,\mathrm{mm}$。求出摆长的正确表示。

解：单摆的摆长函数关系为

$$l=l_0+d/2=(950.2+8.952/2)\,\mathrm{mm}=954.676\,\mathrm{mm}=954.7\,\mathrm{mm}$$

利用式（1-3-14），单摆摆长的不确定度为

$$u_l=\sqrt{\left(\frac{\partial l}{\partial l_0}u(l_0)\right)^2+\left(\frac{\partial l}{\partial d}u(d)\right)^2}=\sqrt{(0.4)^2+(0.005/2)^2}\,\mathrm{mm}=0.4\,\mathrm{mm}$$

则单摆摆长的正确表示为

$$l=(954.7\pm0.4)\,\mathrm{mm}\quad(P=0.683)$$

例 1-3-3：根据公式 $\rho=\dfrac{4M}{\pi D^2 H}$ 测量铜圆柱体的密度。已知：$M=(213.04\pm0.05)\,\mathrm{kg}$，$D=(19.465\pm0.003)\,\mathrm{mm}$，$H=(80.37\pm0.02)\,\mathrm{mm}$。试计算 ρ 及其不确定度，并写出结果表达式。

解：单位换算：

$$D=(19.465\pm0.003)\,\mathrm{mm}=(1.9465\pm0.0003)\,\mathrm{cm}$$

$$H=(80.37\pm0.02)\,\mathrm{mm}=(8.037\pm0.002)\,\mathrm{cm}$$

代入数据：

$$\rho=\frac{4M}{\pi D^2 H}=\frac{4\times213.04\mathrm{g}}{3.14159\times(1.9465\mathrm{cm})^2\times8.037\mathrm{cm}}=8.908\mathrm{g/cm^3}$$

计算其不确定度。由于乘除运算较多，可采用两边取对数的定义法，即

$$\ln\rho = \ln\left(\frac{4M}{\pi D^2 H}\right) = \ln 4 + \ln M - \ln\pi - 2\ln D - \ln H$$

两边求偏微分得

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dM}{M} - \frac{2dD}{D} - \frac{dH}{H}$$

分别把 $d\rho$、dM、dH 换成 $u(\rho)$、$u(M)$、$u(H)$，然后采用方和根的法则得到不确定度的表达公式，同样也可直接利用式（1-3-15）得到

$$\frac{u(\rho)}{\rho} = \sqrt{\left(\frac{u(M)}{M}\right)^2 + \left(\frac{2u(D)}{D}\right)^2 + \left(\frac{u(H)}{H}\right)^2}$$

代入数据：

$$\frac{u(\rho)}{\rho} = \sqrt{\left(\frac{u(M)}{M}\right)^2 + \left(\frac{2u(D)}{D}\right)^2 + \left(\frac{u(H)}{H}\right)^2} = 0.00046$$

$$u(\rho) = 8.908\,g/cm^3 \times 0.00046 = 0.0041\,g/cm^3 = 0.005\,g/cm^3$$

则

$$\rho = (8.908 \pm 0.005)\,g/cm^3\ (P = 0.683)$$

直接、间接不确定度的计算为大学物理实验中主要的结果数据处理方法，要求能够熟练掌握。

第四节　实验数据处理的基本方法

测量数据是整个实验的直接结果，它包含着本实验的主要结论和发现的实验规律，也是留给后人的最原始记录。关于实验数据的处理是从中分析实验成败的主要依据和挖掘规律的主要手段。本节将介绍物理实验中一些基本的实验数据处理方法，即列表法、作图法以及逐差法。

一、列表法

在记录数据和处理数据时，为了清楚明确地表示相关物理量的关系，常将测量数据或处理数据的结果列成表格。这样可以及时发现和分析所测数据是否合理，运算是否正确，并有助于找出各物理量间的规律，得出正确结论。

列表应简单明了，使之能看出有关量之间的关系，重点考虑如何才能完整地记录原始数据及揭示相关量之间的函数关系。一份完整的表格其一般的要求是：

（1）标题鲜明，能直接说明是什么量之间的关系表。

（2）物理量名称、单位及符号对应统一。如果各栏物理量不同，单位应写在标题栏内，如表 1-4-1 所示；如果各栏的单位相同，则可写在表的右上角位置。

表 1-4-1　测定铜的电阻温度系数的 R-t 关系

测量次序	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
温度 t/℃	23.1	30.8	40.6	50.2	61	71.1	80.6	90	92.8	95	98.4
电阻 R/Ω	5.093	5.239	5.438	5.615	5.838	6.029	6.218	6.405	6.471	6.515	6.581

（3）表中的数据要正确反映测量值的有效数字。应该强调的是：列表中必须有数据的