数学史の訳文集

of the Treatise on the
istory of Mathematics

数学史译文集 续集

中国科学院自然科学史研究所数学史组
中国科学院数学研究所数学史组

OS TRATADOS DE LA
TORIA MATEMATICA

目录

ueil de version sur
l'histoire mathematique

EINE HISTORISHE AUSFÜHRUNG DER MATHEMATIK

ОРНИК ПЕРЕВОДНЫХ СТАТВЕИ
ОБ ИСТОРИИ МАТЕМАТЕКИ

海科学技术出版社

数学史译文集续集

中国科学院自然科学史研究所数学史组
中国科学院数学研究所数学史组

上海科学技术出版社

数学史译文集续集

中国科学院自然科学史研究所数学史组

中国科学院数学研究所数学史组

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路 450 号）

新华书店上海发行所发行　浙江诸暨印刷厂印刷

开本787×1092 1/16　印张11　字数260,000

1985年11月第1版　1985年11月第1次印刷

印数：1—3,400

统一书号：13119·1239　定价：2.50元

出 版 前 言

数学史的研究和探讨不仅是为了了解数学的发展过程，更重要的是，也为现代数学的研究提供必要的参考材料.莱布尼茨也说:“数学史的用处不仅在于历史公正地衡量每一个人，使得后人可能得到同样的称赞，而且还在于促进发展的艺术，而它的方法是通过有名的范例为大家所了解.”

许多近现代著名数学家的工作成就、他们从事科学事业的感人品格以及他们关于数学学科的重要论述，都一直深深地影响着数学科学的发展. 他们提供和保存的大量第一流数学工作的“有名的范例”，不仅为数学家们所神往，而且也深深地吸引着社会上对伟大科学家的不平常的经历感兴趣的每一个人. 然而这方面史料的中译本过去很少出版. 为此由中国科学院自然科学史研究所和中国科学院数学研究所翻译了著名数学家克莱因、希尔伯特、冯·诺依曼等的重要论著和介绍他们工作成就的论文，汇成《数学史译文集》于1980年出版. 为了介绍更多的数学名著和数学史重要论文. 又由研究所组织翻译了罗巴切夫斯基、赫尔曼·外尔、理查德·库朗和布尔巴基学派的重要论文，邦加雷、维纳、诺特和布尔巴基学派的传记以及其他数学史论文，汇集为《数学史译文集续集》予以出版，供广大读者参考借鉴.

上海科学技术出版社

目　录

论 几 何 原 理[1)*]

尼古拉·伊万诺维奇·罗巴切夫斯基

概念的复杂性似乎视其接近自然界原始真理的程度而扩大，正象在另一方面，在走向智慧所致力的新知识的境界时，这一复杂性同样在增长。正因为如此，几何学中的疑难首先应当属于对象本身，其次是在这里为了达到最终严格性所应使用的工具，未必能符合该学说的目的和单纯性。那些希冀满足于这种要求的人们，把自己禁锢在狭隘的圈子之中，他们所有的努力都不可能获得成功。终于，我们看到，从牛顿和笛卡儿的时代以来，被分析学改造了的整个数学，以如此迅速的步伐向前迈进，远远地把那些学说甩在自己的后边：没有这些学说数学已经能够对付得了，同时这些学说也不再受到原先所博得的重视。这样，欧几里得的原理尽管历史悠久，尽管它在数学中的成就辉煌，到此时还保存着自己最初的缺陷。

事实上，谁不同意，无论怎样的数学学科都不应当肇始于那种狭隘的概念，据欧几里得的观点，我们由这种概念才开创了几何学；谁不同意，数学中无论何处都不能容忍这种严格性的不足，它是在平行线理论中才被勉强允许的。诚然，我们的头脑对各种对象本身的认识可以预先警告我们防止因几何学中初始的和一般的概念含糊不清而导致的错误结论，而我们之所以深信那些不经证明就被接受的真理[公理]**是正确的，则由于这些真理[公理]是朴素的，由于我们具有诸如天文观察之类的经验；然而所有这一切依然一点也不能使惯于严格判断的智慧满足。何况当解决问题的方法尚未揭晓，当我们还不知道这种方法是否还可用来解决别的问题的时候，我们也无权藐视这种方法。

在这里我打算说明，我想用什么样的方式补充几何学中的这些遗漏。我对应有联系的全部研究，叙述起来将要用太多的篇幅，并要求对整个学科有面目全新的概念。关于几何学其他的缺点，例如难度这并不重要，我认为没有必要详加说明，我只限于对与教学的方法有关的缺点作一些简评。无论谁也不希望能够区别开：什么才唯一地属于几何学，在何处这一学科却变成了另一种，即分析学。

无论什么样的学科据以发端的初始概念，都应当清晰和简化到最少的数目，只有它们才能充当学说的可靠和充分的基础。不应相信，这样的概念要靠天赋的知觉（Врождённые чувства）而获得。

无论什么都不可能比作为算术基础的那些概念更简单的了。我们轻易地认为，自然中的一切都应当受测量，一切都能够被计数。力学的情况却不是那样：人借助于自己的一些日常经验不可能做到这些。在一次被触发的运动的永恒与同一性那里，速度是该运动和各种物

1) 由作者本人从题为“几何原理简述”(Exposition succincte des principes de la Géométrie etc.)一文中抽出，该文曾于1826年2月12日在[喀山大学]数理系的会议上宣读。——作者注

* 这是 А. П. Нордин 编的«Об основаниях геометрии»论文集中由罗巴切夫斯基在1929年写的一篇非欧几何论文。该文集中还收有罗巴切夫斯基1835年另两篇非欧几何论文。——译者注

** 方括号为译者所加，下同。——译者

体质量的尺度——这种类型的真理，它需要时间、其他知识的参考材料，并期待着天才[2]．

一切物体共同的属性中，有一应称为几何属性的——即相切（прикосновение）．我们在此是指，由知觉而获得概念，大半是由视觉，我们据此种知觉来理解它，这是用片言只语所不能表达清楚的．相切是物体的特殊属性，无论在力或时间中、无论在自然界的任何地方我们都找不到它．从所有其他属性中抽象出来，给予物体一个名称——几何体（геометрическое тело）．

相切把两个物体合而为一．这样，我们把所有物体说成是一个空间的部分．物体有限，当周围另一物体与之相切时，使任何第三者的相切成为不可能*．这第二者即周围空间（окружающее пространство），若它与前者组成了整个空间．在空间内部被物体所占据的空处称做位（место）．两个物体是全等（одинаковы）的，如果每一个物体都没有任何区别地占满位，亦即补足空间．它们是相等（равны）的，只有当一个物体补足位时，要求另一个物体分成部分，并将这些部分连结成新的顺序[3]．

设想把物体一分为二，我们称为分割（сечение）．二者之中的每一部分规定为分割的一方面（сторона）．

我们认识到，物体的几何属性在于将它分成部分的各种方法之中，它们是几何的基础，并包含以下几点．

I．任何物体都能分成部分，各部分不经任一点相切触（касаются）．这种分割我们称做持续分割（поступательные）；分割的数目不予限定．

II．任何物体都能分成部分，各部分全都互相切触，其数目随每次新的分割而增加两个．这样的分割称做循环分割（обращательные）；其数目不予限定．

III．任何物体都能由三次分割而成 8 部分，它们全都互相切触；但用新的分割已不可能进一步使部分的数目加倍．这样的分割称做三次主要分割（три главных）．

循环分割只用一次就能增加部分的数目，这是当继续的分割所得到的部分又可合并为一新物体时**；因此循环分割的特征原不在于部分的数目，而在于它们彼此相切．然而，这一点还不够．对两次循环分割而处于相对方面的那两份物体，持续分割总在一份中分出一些与另一份互不相切的部分，这是必然的***．

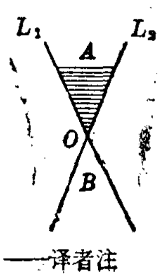
对三次主要分割也持有类似的看法，这种分割中的每两次往往同是循环分割．

对于物体在三个主要［方向］上的持续分割规定为它的三度（три протяжения）．

量度（измерять）物体意味着计算相同的部分，用被选来度量的另一物体把这个物体沿

---

2) 在这篇序之后，罗巴切夫斯基转入叙述几何原理．对这一问题进一步展开的叙述，由罗巴切夫斯基在他的著作的第一部分“具有完整平行线理论的几何学新原理”（Новые начала геометрии с полной теорией параллельных）中给出；该文见«Оь основаниях геометрии» стр. 61，以及 Н. И. Лобачевский，Полн. собр. соч.，Т. II，стр. 200 и след.，后者有 Б. Л. Лаптев 详细的注解．——原编者注



* 任何两物相切即视为一物，因此只存在第二者的相切，不存在第三者的相切．——译者注

3) 罗巴切夫斯基用的术语 одинаковы（全等），即我们现在所说的 конгруэнтны（合同或全合）；而他所用的 равны（相等），即我们所说的 равносоставлены（同拼构或同排列）．——原编者注

** 意译．原文较费解：Оьращательные сечения могут увеличивать число частей и одним только. Это будет тогда, когда недостающее число частей пополняется присоединением нового тела и продолжением сюда сечений；——译者注

*** 设 L_1、L_2 为两次循环分割，A、B 为处于相对方面的两份物体，A 中的持续分割与 B 互不相触．——译者注

三度以持续分割划分成部分.

把两个物体合而为一同时是在这一物体中的分割*. 相切是面的、线的或在一点上，这要看相切只属于一次分割,或者属于某些循环分割,或者属于三次主要分割. 设想物体用三次主要分割分成八部分,它们不可能来源于其他分割,在这样的情况下,我们从第一次分割得到了两部分的表面相切. 第二次分割造成的、处于两次分割相对的方面的两部分切触于线. 第三次分割造成的、处于所有三次分割相对的方面的两部分切触于点**.

当一个物体与另一个物体以表面相切触、并认为只是这两物彼此相切,因而允许抛开一物所有不与另物相切的部分,这时的物体被称为面(поверхность). 于是,从三度中消去了一度,并把表面不需要的部分分离出去,便达到如纸叶之薄或想象力所能及的程度.

在此被视为相切的两物体表面有两个方面.

当一个物体与另一个物体以线相切触、因而允许抛开一物所有与另物不相切的部分,这时的物体被称为线(линия). 于是便达到如毛发之细,或如笔在纸上画线之细,等等. 随着物体转化为线而消去了两度. 因为在空间中两次分割形成线,对这两次分割以持续分割可分离出那些不必要的部分.

当一个物体与另一个物体被视为相切于一点,因而允许抛开前者与后者不相切的部分,这时物体被称为点(точка). 于是,可以达到如沙粒之微,或如笔尖在纸上点点之微.

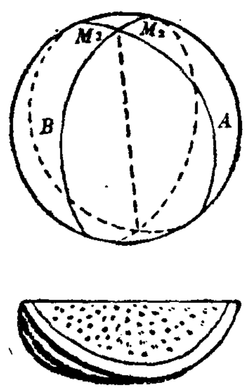
在空间里用三次主要分割形成了点,持续分割对这三次分割分离出一些多余的部分;因而在点中连一度也没有.

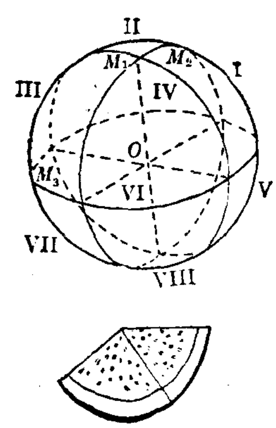
在面、线和点上只注意两物的相切. 这意味着允许一个物体中的一切变化而不会使与之相切的另一物体丧失一些部分,也不会添加切于另一物体的新部分. 正因为如此,在测量面和线的条件下,用以规定度的所有持续分割,允许用它们的循环分割来代替. 随此而来的是,线不改变面的大小,点不改变线的长短. 由此同样可以看出,线应当属于循环分割的整个系统,因为形成线必须有两个面,人们说这两个面相交于线. 两个面中的每一个都包括有分成两部分的线,这两部分是线的两个方面.

点不仅属于三次主要分割,而且属于所有和这些分割一同进行的循环分割;因此为了形成点必须有两条线,人们说这两条线相交于点. 每条线都包括[将它本身]分成两部分的点,这两部分规定为点的两个方面.

* 原文: Соединение двух тел в одно будет вместе сечением в этом одном. ——译者注

** 设球体经 M_1、M_2 两次分割,相当于把西瓜切成相等的四块,两部分相切触于线. M_1、M_2、M_3 为三次分割,相当于把西瓜切成相等的八块. A、B 即处于相对方面. 卦限 I 与 VII、II 与 VIII、III 与 V、IV 与 VI 即相触于点 O. ——译者注





点无大小，因没有度，故不允许测量.

当两个物体 A, B 同任意第三物 C 切触于一点，若是 A 和 B 同不与 C 相切的物体 D 结合，即使这时在 A, B, D 中发生了变化：分离，或者结合了不与 C 相切的新部分，或者在 A, B 与 C 的这类相切中发生在 A 和 B 中的变化是被允许的，那么[任意]两点的相对位置，或如所称两点相互距离(расстояние)全都被确定. 于是，圆规便用来规定距离.

具备了关于空间的这样的概念和测量空间的度的方法，就能够用完全严格的证明把几何学引向下文还要叙述的那种有条有理的状态，在那里如果不给出新的定义，所用名称指的就是已为大家所采纳者.

所有点与一点——中心——处于相等距离的表面称做球面(сфера). 这个距离是球面的半径. 球面内部指它的中心所在的一方面，球面外部指另一方面.

限于球面的物体称做球体(шар)，其中心和半径同球面的一样.

球体和球面全等，当它们的半径相等时*.

全等的球面合并(сливаются)，即互相覆盖，当它们的中心重合时，它们不会有[除合并外的]任何其他状态.

相反地，有不同半径的许多同心球面连一个公共点也不会有. 这样的球面乃是空间中的持续分割. 处在球面内部的另一球面的半径公认为是较小者. 这是距离在本身间的第一次比较.

球面从各个方面限定空间，因为位于第一个球面之外的另一同心球面连接了这样的层**，它使任何新物体对第一个球面的球体相切成为不可能.

不同中心附近的两个球面，一个球面进入另一球面并留有部分在外，把空间分成四部分：一部分 A 属于两球面内部的方面，另一部分 B 属于两球面外部的方面，第三部分 C 属于一球面外部的方面和另一球面内部的方面，而第四部分 D 正好相反. 在那些中心附近的新球面将从 A 分离出不同 B 相切的部分，或者相反；同样地，将从 C 分离出不同 D 相切的部分，或者相反. 于是，两球面相交给出称做圆(КРУГ)的曲线.

因此相交的两球面是空间中的两次主要分割，或者两次循环分割，反正一样. 据同一原因，三球面若相交即是三次主要分割.

在两点——起源的中心(центры происхождения)附近，由相同球面相交而得到的一切圆所在的表面(поверхность)称做平面(плоскость). 因而随着相同球面半径的扩大，平面可以不受限制地延展.

两全等球面相交，当球面的两中心各据其位，或两球心互相换位时，所得到的圆自相覆盖(покрывает сам себя)，而不论该圆从哪一方面和在怎样的状态中被放置.

圆心位于平面上任何圆的内部，从圆周上所有点到圆心的距离——半径——均相等. 平面上所有这样作出的圆，只有一点可以作为[该圆]圆心.

两点间的线在任何位置上都自相覆盖者称做直线***. 过平面上两不动点的圆弧线，当

---

* 原文 Шары и сферы одинаковы, когда их полупоперечники равны. 关于罗巴切夫斯基所用术语 одинаковы 与 равны 的含义，见 2 页原编者注. ——译者注

** "层"(слой)原文未予定义，据上下文，似指两同心球面间的空间，或每两次空间持续分割所分出的部分. ——译者注

*** 原文：Прямая линия называется та, которая между двух точек сама себя покрывает во всех положениях. ——译者注

圆从另一方面自相覆盖时就变成了这样的直线*.

两点的距离可由直线限定，就直线的性质而言，任何距离由另一[单位]距离及其部分的重复而形成.

直线全部落在一平面内，若是它的两点在一平面上.

过不在一直线上的三点能且只能引出一个平面.

平面外任何一点可以用来作为产生平面的中心，于是位于相对的一面有另一相应的中心.

两平面相交于直线.

一直线[段]的长短取决于它与另一直线[段]的比较.

同样地，一圆弧的大小可根据它与圆周的比较而定义，弧仅为圆周的部分．这个比[4]不依赖于半径的长短，而依赖于过弧端点的那两半径相互的位置．为了有所依据，取怎样的弧来作单位？我们将把圆周记作 2π．这样表示的弧叫做线性角(линейный угол)，或者叫做过弧端点、交于圆心的那两直线的夹角.

同样地，我们将把球面记作 2π[5]，规定它的截口[6]与它相比较．当一截口由过球心的两平面而产生，那么此截口的大小就是平面角(плоскостной угол)；而其他截口——立体角**(телесный угол).

立体角[的大小]不依赖于球面半径，而依赖于过球心的平面的相对位置．平面角[的大小]也不依赖于[该]两平面交线上球心的位置.

平面角等于线性角．过两平面交线上一点在两平面内各引交线的垂线，线性角即夹在两垂线间的角.

为使直线垂直于平面，只要这直线垂直于平面内的两条[相交]直线.

直边三角形(прямолинейный треугольник)各角的和不可能 $>\pi$；相反地，球面三角形各角的和永远 $>\pi$.

球面三角形的两角和总与它们所对的两边和一同 $>\pi$，$=\pi$，$<\pi$.

如果球面直角三角形的一直角边 $<\pi$，则另一直角边与它所对角一同 $>\frac{\pi}{2}$，$=\frac{\pi}{2}$，$<\frac{\pi}{2}$.

在直边三角形中对大边的角也大，对小边的角也小.

直边三角形两边和大于第三边.

在球面三角形中，两边中较大者所对角是大还是小，要依第三边 $<\pi$ 或 $>\pi$ 而定.

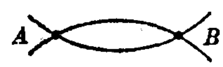
球面三角形两边和大于第三边，如果这第三边 $<\pi$.

立体角的大小 $=\frac{S-(n-2)\pi}{2}$，这里 S 是球面多角形各角之和，n 是它的边的数目.

把 n 视为面数或限制着规则物体的图形数；m 为图形的边数；t 为与一立体角密切结合

---

* 两圆交于 A、B，当两圆半径无穷大时，两弧自相覆盖而成 AB 直线．——译者注



4) 罗巴切夫斯基称 отношение(比)为 содержание(内容)．——原编者注

5) 罗巴切夫斯基在自己所有的著作中为测量立体角而采用的单位比通常大一倍(关于这一点见 Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч., Т. II, стр. 115 примечание [23])；因此他认为，有公共顶点而占满整个空间的立体角的和不等于 4π，而等于 2π．——原编者注

6) 球面截口(вырезок)——球表面的一部分，以两支半个大圆为界限．——原编者注

** 罗巴切夫斯基度量平面角和立体角的单位相同，这里用二面角的平角来表示立体角．——译者注

的面的数目．物体的每一面对应着在球心的角$\frac{2\pi}{n}$，其平面角的数目为m，而它们的大小为$\frac{2\pi}{t}$；此外，比较立体角的两个值，我们得到

$$n=\frac{4t}{2m-(m-2)t}.$$ [7]

这里m和t不能大于5，否则使n成负值；因此，所有的假设可能是这样的：

$m=3$, $t=3$, $n=4$；物体称为**正四面体**.

$m=3$, $t=4$, $n=8$ 物体称为**正八面体**.

$m=3$, $t=5$, $n=20$ 物体称为**正二十面体**.

$m=4$, $t=3$, $n=6$ 物体称为**正方体**.

$m=5$, $t=3$, $n=12$ 物体称为**正十二面体**.

在规则物体上的角或棱角的数目$=\frac{nm}{t}$，因此：

在正四面体上………4，

在正八面体上………6，

在正二十面体上……12，

在正方体上…………8，

在正十二面体上……20.

值得注意的是，以上给出的值n可以不用推理的方法获得，而据立体角以何种方式由它的平面角所规定．的确，立体角上所凑集的面其[棱]线的数目清楚地应是$\frac{nm}{2}$，而据著名的欧拉公式[8]它是$\frac{nm}{t}+n-2$；比较这两个公式，我们重新用的n与上面列出的相同.

三角形全等(одинаковость)的所有情况，现在可以不借助于平行线理论而被证明.

两直边三角形总是全等的(одинаковы)，当它们[以下条件对应]相等时：

(1) 一边与两角；

(2) 两边与其夹角；

(3) 两边与对大边之角；

(4) 三边.

两球面三角形总是全等的，当它们[以下条件对应]相等时：

(1) 三边；

(2) 两边与其夹角；

(3) 两边与对其中一边的角，但在两三角形中对另一边的角的和不$=\pi$；

(4) 一边与它的两邻角；

(5) 两角与对其中一角的边，但在两三角形中对另一角的边的和不为π；

(6) 三角.

两个直边三角形，当它们的三个角[对应]相等时，如果假设每个三角形中各角和为π，它们可能不全等(могут быть не одинаковы)．相反地，如果它们的各角和正象在球面三角形

7) 此公式出处在 Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч., Т. I, стр. 263, примечание [7]．——原编者注

8) 此结论的最简证明由 Груперт 作出(见 Journal für die Mathemat. v. Crelle, Tom 2, p. 367)．——作者注

中一样区别于π，它们则应当全等.

我们看到[9]，直边三角形各角之和不可能$>\pi$. 留下的假设是这个和$=\pi$或$<\pi$. 两者都可以被采纳而结果毫不矛盾，由此而产生两种几何学：一种是就其单纯性而言迄今通用的，承认所有事实上的度；另一种是虚想的，更加一般的，因而它的计算是困难的，它容许直线依赖于角的可能性.

如果在一个直边三角形中认为各角的和为π，那么在所有的三角形中都已是这个和. 相反地，在一个直边三角形中允许各角和小于π，易于证明，它随三角形边的增长而减少.

因此，平面上两直线当同第三条直线构成角、而这些角的和为π时，这两直线总不能相交. 在另一种情况下，当这个和$<\pi$，如果对此假设三角形各角和$<\pi$时，它们也能不相交（они могут не пересекаться）.

这样，平面上任何直线同一条直线的关系可分成会聚的（сходящиеся）和非会聚的（несходящиеся）. 如果它们具有界限（они представляют границу），或者换句话说，在由一点引出的所有直线之间，它们可从一些直线过渡到另一些直线，这种非会聚的直线将称为平行的（параллельные）*.

我们设想从一点作垂线a垂直于已知直线，并从该点向这直线作平行线；记$F(a)$为a和平行线间的角[10]. 易于证明，如果三角形中各角和$=\pi$，对于任何直线a都有角$F(a)=\frac{\pi}{2}$；但在另一假设中角$F(a)$随a而变化，随直线a的[无限]增长而减少到零，并经常保持$<\frac{\pi}{2}$. 为了推广，在这后一假设中，把所有直线a上的角记作$F(a)$，我们将取

$$F(0)=\frac{\pi}{2},\ F(-a)=\pi-F(a).$$

为了使任何锐角$A=F(a)$，对A可以设想直线a是正的；而对任何钝角A，可以设想直线a是负的.

不过，在这两个假设中，平行线都具有以下性质.

当两直线平行，那么过这两直线的两平面相交后给出的直线同样平行于该两直线.

平行于第三条直线的两直线互相平行.

当三平面相交于平行直线，则平面内角和$=\pi$.

假设三角形内角和$<\pi$，就导致出圆随半径的增长不趋于直线，而趋于一特种曲线，我们称它为极限圆（предельный круг）. 球面在这种情况下也趋向于一曲面，类似地，我们称它为极限球面（предельная сфера）. 在与平面相交时，这一曲面给出或者圆、或者极限圆.

9）从这个地方开始叙述"虚几何学"（Воображаемая геометрия）的基础. 它表述得非常简要，没有证明. 在罗巴切夫斯基的著作"平行线理论的几何研究"（Геометрические исследования по теории параллельных линий, Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч., Т. I, стр. 79—127）中和在著作"具有完整平行线理论的几何学新原理"（Новые начала геометрии с полной теорией параллельных, 同上书, Т. II. стр. 267—345）中有证明. 还可看 А. П. Котельников 对本文（О началах геометрии, 同上书, Т. I. стр. 262）的注释. ——原编者注

* 作者在这里提出了罗巴切夫斯基几何学的平行概念：在平面内过直线外的一点可作无数多条直线与该直线平行. ——译者注

10）罗巴切夫斯基在自己的其他著作中称$F(x)$为 угол параллельности（平行角）. 他为此引入了记号x'（见 Воображаемая геометрия）和$\Pi(x)$（在 Новые начала геометрии 和 Геометрические исследования 中）. ——原编者注

在极限球面上的几何学同我们在平面上所知的完全一样．极限圆最终代替了直线，而在其中有极限圆的平面间的各角代替了直线间各夹角的位置．

极限圆的弧越小，它们就越向直线靠近，因此直线与弧长相比的差别可为任意小．所以，如果取弧与直线之长均为特别小，则任意弧既算弧也算直线．

这样，如果在自然界中存在着的几何学是两平行线与第三直线交角之和可以 $<\pi$，那么我们通用的几何学与那些三角形各角和同 π 有可觉察到的区别的几何学相比，是特别小直线的几何学．

刚才说过，极限球面上的几何学亦即平面上的几何学．在前者中极限圆代替了直线；其中有极限圆的平面间的各角代替了直线间各夹角的位置．然而，在极限球面上三角形的度量应当发生在三角函数学说之前；至于几何结构，则在极限球面上的三角形，应当处理得如同球面上的一样．在其中有极限圆并可称为法面(нормальные плоскости)的平面，是球面大圆的平面，而前者自己相交的交线，也就成了法线或极限球面的轴(оси)，亦即普通球面的直径．

在此之后，我们将不加区别地谈到关于直边三角形，用这个词时指的也有极限球面上由极限圆弧组成的三角形．

在直边三角形中，我们记 a、b 为直角边，A、B 为所对的角，c 为斜边．

在这样的三角形中 $\frac{a}{c}$ 不是别的，而是随角 A 而变化，$\frac{a}{c}$ 依赖于 A 记作

$$\frac{a}{c}=\sin A$$

$\frac{a}{c}$ 称做 A 的正弦．把 $\sin A$ 的定义推广到其他角，除了正的锐角 A 外，取

$$\sin 0=0,\quad \sin\frac{\pi}{2}=1,$$

$$\sin(n\pi+A)=(-1)^n\sin A;\quad \sin(\pi-A)=\sin A,$$

这里 A 是从 0 到 $\frac{\pi}{2}$ 的角，n 是正整数．最后，对所有的正角 A，有

$$\sin(-A)=-\sin A;$$

对负 A 和对 $A=0$ 也一样．

这样，可以把任意角的正弦化成零、或 $\frac{\pi}{2}$、或正锐角的正弦．前两角的〔正弦〕值已给出；后者的值是直角三角形中两边之比．

由此易于看出，无论 A 是什么样的角，总有

$$\sin(\pi+A)=-\sin A.$$

三角函数除了如上述的正弦之外，常用的还有：余弦、正切和余切，其定义和符号由以下等式表出：

$$\cos A=\sin\left(\frac{\pi}{2}-A\right),\quad \operatorname{tg} A=\frac{\sin A}{\cos A},\ \operatorname{ctg} A=\frac{\cos A}{\sin A}.$$

当我们把角加上 2π 时，所有这些三角函数的值都不变化．

在直角三角形中我们得到

$$\sin A^2+\cos A^2=1^{11)},$$

对任意角 A 均成立.

在任何直边三角形中，a, b, c 三边对 A, B, C 三角，有

$$\frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B};\quad c=a\cos B+b\cos A.$$

后式借助于前式，因为 $\sin C=\sin(A+B)$，给出

$$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$$

对所有的其和 $<\pi$ 的正角 A、B 成立. 易于看出，这里的角 A 和 B 可以是: $A=0$, $B=0$, $A+B=\pi$. 进而使 $A=n\pi+\alpha$, $B=m\pi+\beta$; n, m 是正整数; α, β 是正角，>0 而 $<\pi$; 于是，从等式分出 $(-1)^{n+m}$，所得也仅是 A 随 α, B 随 β 的变化，因而在这里 $\alpha+\beta<\pi$. 但是，因为当我们用 $\pi-\alpha$, $\pi-\beta$ 代替 α, β 时等式不变，故我们可取 $\alpha+\beta>\pi$. 这样，等式对一切正角 A, B 都已证明; 而负角可以表成从正角中减去 2π，但这样的减法不改变公式的形状.

置 $\frac{\pi}{2}-A$, $-B$ 以代 A, B，我们得到:

$$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B.$$

设 $A=B$，再取 $A=\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{8}$ 等等，我们得到三角函数一切角 $\frac{m}{2^n}\pi$ 的值，这里 m, n 是整数.

所有的另一角 A 可表成 $B+2\omega$ 之和: 这里 $B=\frac{m}{2^n}\pi$, m 和 n 是整数，而角 ω 任意小. 于是

$$\sin A=\sin B+2\sin\omega\cos(B+\omega),$$
$$\cos A=\cos B-2\sin\omega\sin(B+\omega).$$

在直角三角形中随着锐角变小，所对的直角边也变小，这一直角边和另一直角边之比可为任意小. 作 $\operatorname{tg}\omega$ 为任意小，我们所得到的 $\sin\omega$ 还要小，其实 $\sin(B+\omega)$, $\cos(B+\omega)$ 不会超出一个单位. 于是差 $\sin A-\sin B$, $\cos A-\cos B$ 可以如此之小，以致可把 $\sin B$, $\cos B$ 当成 $\sin A$, $\cos A$. 这可以理解为对所有的角，三角函数的值在[实]数内定义.

现在我们开始着手研究三角形的度量和平行线问题的解.

只有这种判断我们才认为是正确的，即垂直于一平行线的垂线与另一平行线相交成锐角. 我们已约定，当 a 为垂线时，将这样的锐角记为 $F(a)$. 另一判断，即迄今几何学家认为可能的，也包含在这一般判断之中，它带有限制: 直线应当看成无限小*，因此，在计算中与一阶无限小相比，应忽略它们的乘积、二阶和以上各阶的无限小.

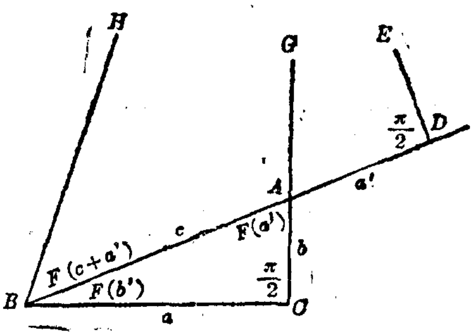


图 1

这样，在直角三角形中，与直角边 a, b 相对的锐角应当是 $F(a')$, $F(b')$，这里 a', b' 是带 + 号的直线[段]，+ 号记在表示其度量的数字之前.

我们把直角边 b 和斜边 c 通过它们的交点 A 延长 (图 1). 取 c 的延长线 $AD=a'$,

11) 罗巴切夫斯基把 $\sin^2 A$ 和 $\cos^2 A$ 写成 $\sin A^2$ 和 $\cos A^2$，相应的形式也出现在其他场合. ——原编者注

* 原文: линии должно рассматривать бесконечно малыми. ——译者注

在 b 的延长线 AG 的同侧过端点 D 作垂线 DE，从角 $F(b')$ 的顶点 B 到与 AG 同侧的平行线 BH．三条直线 BH, AG, DE 是平行的，也同 b 平行，b 与 a 的交点记作 C．

这里
$$\angle HBA+\angle ABC=\angle HBC,$$
亦即
$$F(c+a')+F(b')=F(a). \tag{1}$$

在此 $\triangle ABC$ 中，如果把 a' 从 A 到 B 沿直线 C 放下，过端点 D 作垂线 DE，并过点 B 引它的平行线 BH，那么，和平行于 b 的直线一起我们将得到直线 c, a, a', b' 间的新关系．然而，需要区别三种情况：

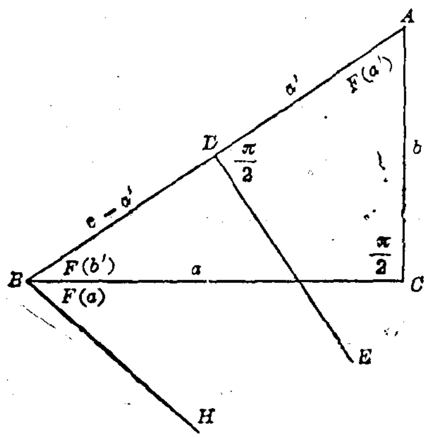


图 2

如果 $c>a'$（图 2），则得
$$\angle DBH=\angle DBC+\angle CBH$$
或
$$F(c-a')=F(b')+F(a) \tag{2}$$
如果 $c=a'$（图 3），则
$$\frac{\pi}{2}=F(b')+F(a).$$
如果 $c<a'$（图 4），则
$$\pi-F(a'-c)=F(b')+F(a).$$

然而在第二种情况下 $\frac{\pi}{2}=F(0)=F(c-a')$，而在后一种情况下
$$\pi-F(a'-c)=F(c-a');$$
因而，在所有三种情况下等式(2)成立．

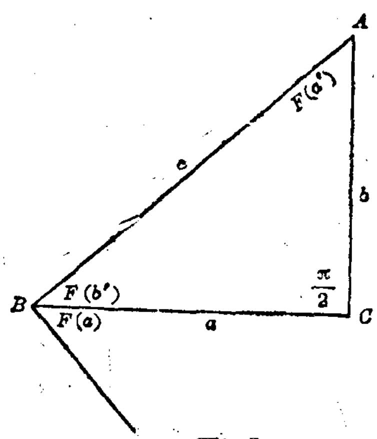


图 3

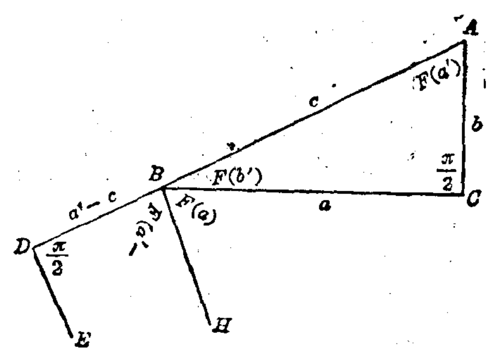


图 4

合式(1)，(2)，给出
$$2F(a)=F(c-a')+F(c+a'), \tag{3}$$
$$2F(b')=F(c-a')-F(c+a'). \tag{4}$$

再过点 A 延长 b 和 c（图 5），过点 C 延长 a；做 $AI=a'$，$CN=b'-a$；作 IK，NO 分别垂直于 CI 和 CN，则 IK，AL，ON 是平行线．再向它们引平行线 CM；于是
$$\angle MCN+\angle MCI=\frac{\pi}{2},$$
亦即

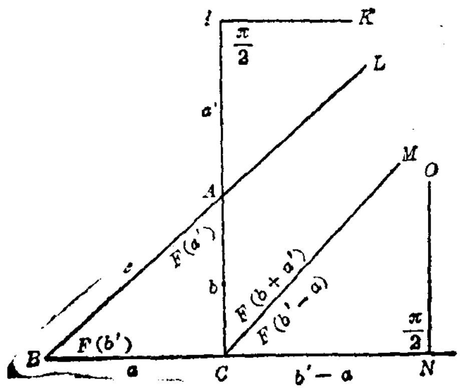


图 5

图 6

$$F(b'-a)+F(a'+b)=\frac{\pi}{2}. \tag{5}$$

现在把等式所确定的直线记为 α

$$F(\alpha)+F(a)=\frac{\pi}{2}.$$

与 b, c, a', b' 相比，把类似的直线记为 β, γ, α', β'，等式(4)另可表为

$$2F(\beta')=F(a'-c)+F(a'+c),$$

假设存在直角三角形，它的 a' 是斜边，β' 是直角边，$F(c)$ 是 β' 相对的角(图 6).

在这以后就可以推出，在等式(3)，(4)，(5)中，就象直角三角形中边和角的所有假设的依存关系一样，随着 a' 变成 b'，不仅可以使 a 变成 b，而且可以使

a 变成 β' $\quad$ α 变成 b'

c 变成 a' $\quad$ γ 变成 α'

a' 变成 c $\quad$ α' 变成 γ

b' 变成 α $\quad$ β' 变成 a,

与此同时余下 b 和 β 没有变化，这样式(3)和(4)给出

$$\left.\begin{aligned}2F(a)&=F(c-a')+F(c+a'),\\2F(b)&=F(c-b')+F(c+b'),\\2F(b)&=F(a'-\alpha)+F(a'+\alpha),\\2F(a)&=F(b'-\beta)+F(b'+\beta);\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned}2F(b')&=F(c-a')-F(c+a'),\\2F(a')&=F(c-b')-F(c+b'),\\2F(c)&=F(a'-\alpha)-F(a'+\alpha),\\2F(c)&=F(b'-\beta)-F(b'+\beta);\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

$$\left.\begin{aligned}2F(a')&=F(\alpha-\beta)-F(\alpha+\beta),\\2F(b')&=F(\beta-\alpha)-F(\alpha+\beta).\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

式(5)给出：

$$\left.\begin{aligned}F(b'-a)+F(a'+b)&=\frac{\pi}{2},\\F(c-a)+F(\beta+\alpha')&=\frac{\pi}{2},\\F(a'-\beta')+F(\beta+\gamma)&=\frac{\pi}{2};\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

$$
\left.\begin{aligned}
F(b'+a)+F(a'-b)&=\frac{\pi}{2},\\
F(c+a)+F(\beta-\alpha')&=\frac{\pi}{2},\\
F(a'+\beta')+F(\beta-\gamma)&=\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}\right\} \tag{10}
$$

所有这些等式，作为直角三角形边和角的各种形式的依从关系，都是任意直线 a 依赖于角 $F(a)$ 的定义；然而对于解决这后一问题可用以下的方法.

对直角三角形 ABC 所在平面过点 B 作垂线 BB'(图 7). 过点 A 和 C 向 BB' 引平行线 AA', CC'. 在其上有三条平行线的平面的内角和由在棱 AA' 附近的角 $\frac{\pi}{2}-F(b')$ 给出*. 设想在 A 附近，以 A 为中心作球面；它与直线 AA', AB, AC 相交构成球面直角三角形 $A'BC$ (图 8)，这里 $A'C=F(b)$ 为斜边；$A'B=F(c)$, $BC=F(a')$ 为直角边，$F(a)$ 和 $\frac{\pi}{2}-F(b')$ 为相对角.

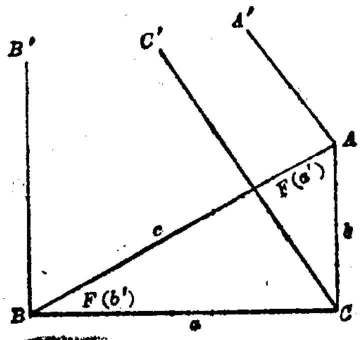


图 7

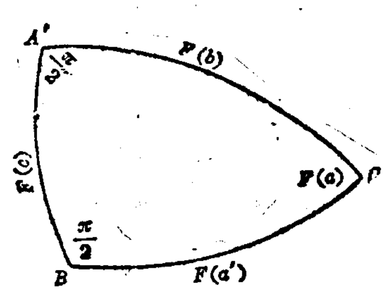


图 8

在这里可顺便提及，这样的三角形的存在须以直边的直角三角形(图 6)为前提，在那里 a' 是斜边，β', b 是直角边，$F(c)$, $\frac{\pi}{2}-F(a)$ 是它们的相对角；因此，正是这种三角形，其构成上边已经证明. 在两个假设中留下的一个不著名，却是真的，就必须这样来检查结论.

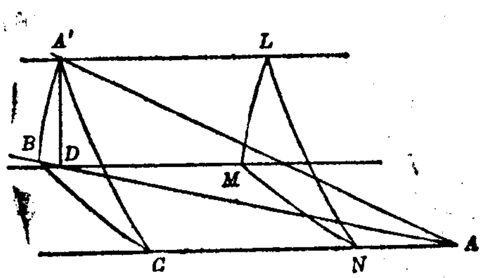


图 9

再设想一个球面三角形 $A'BC$, 其球面中心为 A(图 9). 从 A' 作 $A'D$ 垂直于 AB. 引 AC 的平行线：在平面 ABC 内过点 D 引 DM；在平面 $A'AC$ 内过点 A' 引 $A'L$. 使 LMN 为极限球面上的三角形，$A'L$, DM, CA 为其轴.

可以证明，半径 AC 越长，在 $\triangle A'BC$ 和 $\triangle LMN$ 中边长的区别就越小，或者直线 a' 成为 $BC=F(a')$，这个差能够取成任意小. 两直线之比所趋向的极限，我们在前边记作 lim，于是写成：

$$
\lim\frac{A'C}{BC}=\frac{LN}{NM};\ \lim\frac{A'B}{BC}=\frac{LM}{NM},
$$

亦即

$$
\lim\frac{F(b)}{F(a')}=\frac{1}{\cos F(a)};\ \lim\frac{F(c)}{F(a')}=\operatorname{tg}F(a).
$$

* 原文：Сумма внутренних углов плоскостей, в которых лежат три параллельные, дает $\frac{\pi}{2}-F(b')$ угол при лезвее AA'. ——译者注