计算结构力学

朱慈勉 汪 榴 江利仁 等编著

上海科学技术出版社

写;第八、九章由汪榴负责编写。此外,方稚影等参加了大量工作。蒋大骅、郑有畛、沈勤斋等对本书的编写提出了许多宝贵意见,在此特表示感谢。限于编者水平,书中一定还有许多不当之处,恳请读者批评指正。

为了便于教学和程序的工程应用,上海科学技术出版社在出版该书的同时出版与之配套的结构分析程序软盘(可执行程序),用户可根据需要选用。

编 者

1991年10月

(沪)新登字108号

计 算 结 构 力 学

朱慈勉 汪 榴 江利仁 等编著

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路450号）

新华书店上海发行所发行 无锡县人民印刷厂印刷

开本787×1092 1/16 印张19 字数447,000

1992年4月第1版 1992年4月第1次印刷

ISBN7-5323-2677-2/TB·19

印数1—5,000 定价：6.40元

内容提要

本书包括杆系结构矩阵分析的原理、结构分析程序的设计原理与应用和微机基本操作三方面内容。全书共分九章，介绍结构静力分析的矩阵方法和动力、稳定性和非线性分析的有限单元法；平面桁架、平面刚架静力分析和刚架动力、稳定性分析程序的设计与应用以及结构非线性分析程序的设计原理；微型计算机的基本操作和上述结构计算程序的运行方法。各章均有丰富的例题和习题。

本书可为高等工业院校工程结构类和力学类等专业"计算结构力学"课程的教学用书，也可供有关专业工程技术人员参考。

前　言

随着电子技术的飞速发展，电子计算机已在各个领域中得到广泛的应用。工程结构的设计和理论研究工作也步入了一个崭新的时代，这就要求结构工程师和研究人员必须具备熟练地运用计算机进行结构分析的能力。“计算结构力学”正是适应这种需要，并已成为高等工业院校工程结构类和力学类等专业学生的必修课程。

本书是笔者多年来在同济大学从事这门课程教学所用讲义的基础上写成的．书中主要包括三方面的内容：一是杆系结构矩阵分析的原理，包括结构静力分析的矩阵方法和动力、稳定性和非线性分析的有限单元法；二是结构分析程序的设计原理与应用，包括平面桁架、平面刚架静力分析和刚架动力、稳定性分析 FORTRAN 程序的设计与应用，以及结构非线性分析程序的设计原理；三是结合目前日益普及的微型计算机介绍计算机的基本操作和上述结构计算程序的运行方法。

本书将上述三方面的内容有机地结合起来，使读者能较快地学以致用。在基础理论部分，书中十分强调正确物理概念的树立与灵活运用，例题和习题具有一定深度和启发性，旨在使读者切实地掌握并熟练地运用基本概念。本书所介绍的结构分析程序是一个完整的系统，各个程序之间既是独立的又具有内在的联系。各程序的格式统一，许多子程序互相通用，这就使读者能在短期内系统地掌握一整套实用的结构计算程序，并可在工程实践和理论研究工作中加以应用。程序的设计考虑了通用性，因此很容易稍作改编后用于空间问题和各种连续体的有限元分析。

为了方便教学工作和读者自学，本书中程序的解释详尽，各章均有丰富的例题和习题，给出了习题的部分答案或提示，此外还编写了上机实习材料。本书可作为高等工业院校工程结构类和力学类等专业“计算结构力学”课程的教学用书，也可以作为专业工程技术人员、研究生、大学教师以及有关研究人员的参考书。此外本书在内容组织上还为暂时仅着眼于计算程序之工程应用的读者提供了方便。

学习本书要求读者具备结构力学、算法语言（FORTRAN）和矩阵代数方面的基础知识。由于本课程属于一门新兴学科，各学校的教学情况不尽一致，教师可根据教学需要取舍部分内容。书中冠以“*”号的章、节以及部分属于纯数学运算的子程序一般可以不讲解。

本书由朱慈勉担任主编，并负责编写第一、二、三、五、七章；第四、六章由江利仁负责编

目　录

第一章

绪论

计算结构力学是研究利用电子计算机通过离散模型的数值分析完成结构分析的一门学科，它是在工程技术进步的推动和电子计算机技术高度发展的条件下形成与发展起来的一门新兴学科。

随着经济建设的发展和科学技术的进步，工程实践中所提出的结构分析问题愈来愈向大型化和复杂化的方向发展。一是结构的构件数量常常很多。高层建筑、大跨度结构、高耸构筑物等结构的力学计算模型常常是由数百个甚至更多的构件组成。二是结构分析的对象甚为复杂。工程对象常不再限于杆件体系,而扩展到板、壳、三维连续体及其与杆系组成的各种复杂的组合结构系统。例如对于高层建筑常采用的框架剪力墙体系来说，必须研究框架、剪力墙以及楼板系统的共同工作；对于桅杆结构必须研究杆系与钢拉索的共同工作等等。三是结构力学分析的深度更大、要求更高。例如，从过去经简化的平面体系分析扩展到考虑结构空间工作的分析，从一般的线性分析扩展到考虑几何非线性和材料非线性影响的分析，从一般荷载作用下的分析扩展到各种特殊荷载作用下的结构分析等等。四是结构分析的含义也更为广泛。它不再局限于被动地对给定的结构进行力学分析，而是可以扩展到主动地对结构体系进行优化设计。所有以上种种要求都是传统的结构力学分析方法和手段难以相适应的,而其中主要的障碍是令人生畏的庞大的计算工作量。于是,高效率的计算工具的利用就成了解决以上问题的关键。

结构分析原理与电子计算机的结合需要一种媒介，这就促成了一门新兴的学科——计算结构力学的诞生和迅猛发展。从广义上说,计算结构力学可包括三方面的内容。

首要的内容是用计算机完成结构的力学分析。在传统的杆件体系结构力学中，采用力法或位移法分析结构时一个力学问题最终是演化为一组线性代数方程的求解问题。这样，在利用电子计算机进行结构的力学分析时就需要有一个统一的途径和步骤让计算机自动建立这样的方程组。这一过程可以这样实现,即先将结构离散为各个单元,建立单元性能的控制方程，再将各单元按结构的实际情况组装成原结构,得到关于结构性能的一组控制方程.然后求解这一方程组，并继而完成结构的力学分析。整个运算过程可用矩阵的形式既简洁而又完全规格化地表达，这就是结构的矩阵分析方法。有了这样一种高度统一和规格化的分析方法,就不难编制出在一定范围内带有普遍适用性的计算机程序,从而由计算机来完成上述分析过程。因此,结构的矩阵分析方法是计算结构力学的基础。

对于现实的连续介质力学问题来说,一般是难以找到解析闭合解的.过去人们曾通过运用 Ritz 法、Galerkin 法、有限差分法等把此类力学问题演化为求解线性方程组的问题,但这些方法的适用性受到各种条件的限制,其分析过程也不容易规格化,难以由计算机自动完成。至 50 年代末有限单元法的出现才解决了这一困难。有限单元法实际上是一种适用于

一般连续体分析的矩阵分析方法，它的物理概念和分析过程与上述杆件体系的矩阵分析方法基本上是一致的，所不同的主要是对于一般连续体来说，单元性能的控制方程通常无法采用静力法导出，而只能通过利用能量法或虚功原理近似地求得。

从广义的角度上讲，板、壳、薄壁杆件和三维连续体力学也都属于结构力学范围之内，这些关于工程结构的力学在基本概念和理论上是同出一源，在克服了计算上的障碍之后，就有了比较统一的分析途径。因此有关杆件结构方面的矩阵分析方法以至计算机程序就很容易推广应用到上述其他结构和各种组合结构的分析中去。现代电子计算机和随之而生的计算力学的出现对力学的发展起了飞跃的作用，这种作用冲击了传统的思考方法，解放了研究手段的约束，使人们可以向更深处探索理论，可以向更广处发展应用。

电子计算机的应用不仅使结构在力学分析方面取得飞跃性的突破，而且也使结构优化设计的问题成为可能，并提到日程上来了。这就是计算结构力学第二方面的内容。结构优化设计从给定结构的几何、拓扑和材料的情况下构件截面可变的优化设计发展为结构的几何也可以参加优化的所谓形状优化，甚至结构拓扑和材料选择优化的更高层次的优化。结构优化设计的理论也得到迅速的发展，并开始了人工智能和考虑不确定因素等方面的研究。

计算结构力学第三方面的内容是计算机应用软件的研制。计算结构力学中理论与方法固然重要，但是最终还必须通过应用软件来解决实际问题。应用软件要讲究质量，在能够解决实际问题的基础上，要达到尽可能高的计算效率和尽可能低的经济费用。应用软件还必须使应用者易读、易用、易维护、易移植。计算结构力学的软件现有下列几种类型：①研究理论和方法用的程序，主要面向研究或教学工作；②解决专门问题的专用程序；③面向一批问题的通用程序；④集成系统，为某类工程设计的全过程服务，包涵各种子程序和中央数据库。与中央数据库相连接的程序模块可以实现设计过程的各分项计算。这些模块可以由工程师按需要调用，并且还应带有智能，使集成系统成为工程师得心应手的工具。只有针对各种需要研究和开发应用软件，才能使计算结构力学发挥作用并形成生产力。在这方面也包括引进各种先进程序和结合不同计算机进行程序开发应用方面的工作。

计算结构力学的发展一方面推动了结构工程理论发展，另一方面也推动了电子计算机技术的发展。这些都确立了这一新兴学科的重要地位。计算结构力学已成为高等学校工程结构类和力学类等专业的一门必修课，其理论成为有关专业工程技术人员的必备知识和有力工具，并且也为力学理论与应用的研究开辟了非常广阔的新天地。目前，这一学科还处于相当迅速的发展阶段。

第 二 章

结构静力分析的矩阵方法

§2-1 概　　述

在结构力学课程中介绍了力法和位移法这两种基本的结构分析方法。按照这两种分析方法，求解原结构的问题都演化为求解一组线性方程组的问题。当结构的杆件数量较多时，方程组的未知量数目也随之增多，用手工求解就变得十分困难。于是就出现了通过数值运算求解结构的各种渐近法，如力矩分配法、迭代法等以及经一定简化处理的数值近似法，如剪力分配法、D 值法等。但是上述数值方法都是建立在手算的基础上，引入了诸如忽略杆件轴向变形影响、无节点线位移存在、横梁刚度远大于柱的刚度等项假定。因此上述方法适用范围一般比较窄小，所得到的结果又常有较大的误差，而且这些方法很难扩展到结构的动力、稳定以及非线性分析的问题中去，结构分析的过程也不容易规格化。因此，在研究如何运用电子计算机进行结构分析的问题时，考虑的出发点又需要回到力法、位移法这样带有根本性和普遍适用性的方法上来。

结构的矩阵分析方法实际上是将结构分析的基本原理和方法用矩阵代数的形式表达出来。这样不仅可以使结构力学的原理和分析过程表达得十分简洁，更为重要的是使结构的力学分析过程充分地规格化，便于电子计算机程序的编制。与结构力学的力法和位移法这两种最基本的方法相对应，结构的矩阵分析方法也可以分为矩阵力法和矩阵位移法这两大基本类型。

当用力法分析超静定结构时，对于同一个结构可以采用不同形式的基本结构。这样就使分析过程与基本结构的选定联系在一起。而用位移法分析时，对应一定的结构，基本结构的形式是一定的。另外，力法不能运用于求解静定结构，而位移法对超静定结构和静定结构是同样适用的，求解过程也是完全一致的。由此可见，位移法的分析过程比力法的分析过程更容易规格化，也就更适宜于用电子计算机来实现其分析过程。因此，矩阵位移法成为计算结构力学中一种最为重要的分析方法，这一方法无论在杆件体系还是连续体结构的分析中都获得最为广泛的应用。本章先着重介绍矩阵位移法的基本原理和分析过程，然后将有关矩阵力法的基本概念作简要的介绍。有关矩阵力法的简要介绍主要是为读者日后有机会了解连续体有限单元力法和混合法创造一定条件。

§2-2 矩阵位移法的基本概念

矩阵位移法实际上是以矩阵形式表达的位移法分析过程。矩阵位移法的基本原理与位移法是一致的。位移法的基本特点是以结构的节点位移作为基本未知量。这样，杆端的变形协调条件在设取基本未知量时已经满足。根据节点或截面的平衡条件可以列出一组平衡

方程，其数量等于未知节点位移的数目．对于结构线性分析来说，平衡方程是以节点位移为基本未知量的线性代数方程组．求解这组代数方程就可以得到节点位移的值．由此可计算出每一杆件的杆端力，并进而可计算杆件任一截面上的内力．

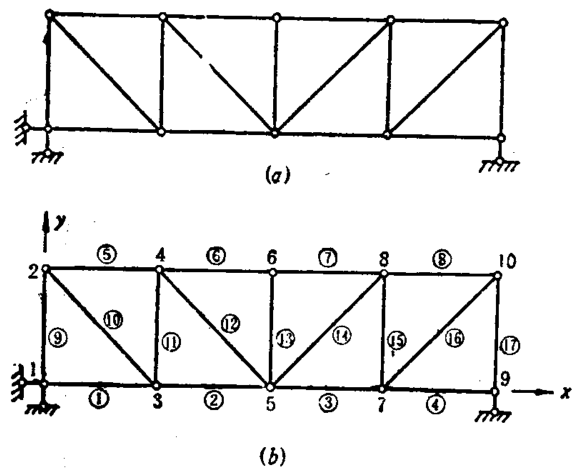


图 2-1

当采用矩阵位移法进行结构分析时，为了分析的便利，首先需对结构的节点和杆件进行编号．例如，在分析图 2-1a 所示的平面桁架时，可以如图 2-1b 那样对该桁架的每一个节点和杆件进行编号．对于图 2-2 a 所示的平面刚架的节点和杆件编号可以如图2-2b 所示．节点或杆件的编号顺序原则上是任意的，对同一个结构可以有不同的编号方法．在矩阵位移法中，将每一个编号的杆件称为一个单元，并将原结构看成是这些单元按照实际的连接条件组装而成的．这一过程常被称作为结构的离散化．为了表示位移和力的方向，为结构设定一个右手 xy 坐标系，这个坐标系称为结构的总体坐标系，以下简称为结构坐标系．

对于如图 2-1 a 所示的平面桁架，在考虑支座约束之前每个节点具有两个独立的自由度，即沿 x、y 方向的线位移；对于如图 2-2a所示的平面刚架来说，在考虑支座约束之前每个节点具有三个独立的自由度，即沿 x、y 方向的线位移和节点的角位移．这样的分析考虑了刚架杆件的轴向变形．在矩阵位移法中可以先将结构的所有节点自由度看作基本未知量．因此，如果一个平面桁架共有 n 个节点，则该桁架未知量的总数为 $2n$ 个；如果一个平面

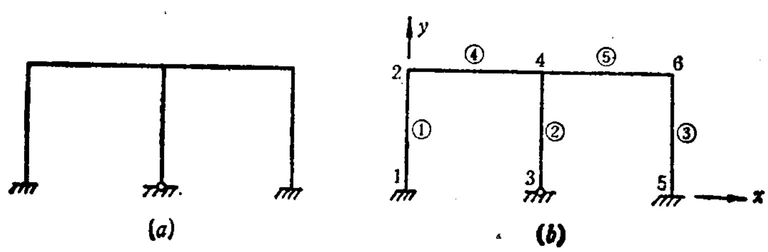


图 2-2

刚架共有 n 个节点，则该刚架未知量的总数为 $3n$ 个．显然，一旦所有这些节点位移的值被确定，就可以通过节点位移求得结构各单元的内力．

在一定荷载作用下，结构位移的大小取决于结构的刚度．刚度越大则结构的位移越小；反之，位移就越大．在矩阵位移法中，单元和结构的刚度都采用矩阵的形式表达，分别称为单元刚度矩阵和总刚度矩阵．刚度矩阵可由节点力与节点位移之间的关系得到．通过刚度矩阵可以将节点位移与节点力联系起来．对于每一个单元，杆端力与节点位移之间的关系可写成如下形式

$$[k]\{d\}=\{f\}$$

其中$[k]$即为单元刚度矩阵，$\{d\}$为单元两端的节点位移向量，$\{f\}$为单元两端的杆端力向量．上式称为单元刚度方程．同样，对于一个结构来说，节点力与节点位移之间的关系可表示为

$$[K^0]\{D^0\}=\{P^0\}$$

上式称为总刚度方程，其中$[K^0]$即为总刚度矩阵，$\{D^0\}$可称为总的节点位移向量，$\{P^0\}$可称为总的节点力向量。应该说明的是，$\{D^0\}$和$\{P^0\}$中包括了所有节点（含支座节点）的节点位移和节点力在内。总刚度矩阵$[K^0]$中的项，实际上表示当结构某一节点发生任意一单位位移而其余的节点位移均保持为零这种状态时相应的节点力。对于结构的线性分析来说，刚度矩阵元素均为常数。结构的刚度是与组成结构的每一个单元的刚度及这些单元的几何组成形式密切相关的。或者说，总刚度矩阵是按一定几何组成的各单元刚度矩阵叠加的结果。

结构是在一定的支承条件之下承受荷载的，结构的某些节点位移实际上是已知的。例如对于图 2-2a 所示的平面刚架支座节点 1、3、5 的水平和竖向位移均为零，节点 1、5 的转角位移也为零。结构的求解只有在考虑了它的支承条件之后才有可能，这样就需要将原结构的这些支座位移条件引入总刚度方程，从而得到对应于实际结构的刚度方程

$$[K]\{D\}=\{P\}$$

上式称为结构刚度方程，其中$[K]$称为结构刚度矩阵。这里，$\{D\}$中仅包括结构未知的节点位移，$\{P\}$中仅包括与未知位移相应的各节点力，可分别称为结构的节点位移向量和节点力向量。求解结构刚度方程便可得到所有未知的节点位移，此后就可通过单元刚度方程求得每一个单元的杆端力以及支座反力。

由上述可见，用矩阵位移法分析结构的步骤大体如下：

(1) 结构标识。其中包括节点、单元编号和坐标系的设定。

(2) 计算单元刚度矩阵。

(3) 形成总刚度矩阵和总刚度方程。

(4) 引入位移边界条件，形成结构刚度方程。

(5) 求解结构刚度方程，得到未知的节点位移。

(6) 计算单元杆端力和支座反力。

一般说，单元刚度矩阵的通式是在单元为等截面直杆的条件下导得的。如果结构的某一个杆件是分段等截面的，在用矩阵位移法分析时，可以将该杆件的每一段作为一个单元。如图 2-3 的刚架柱是分段等截面的，在节点和单元编号时每一根柱被作为两个单元。对于一般的变截面杆件或曲杆，可以近似地将它看作是由若干个分段等截面直杆构成的。当分

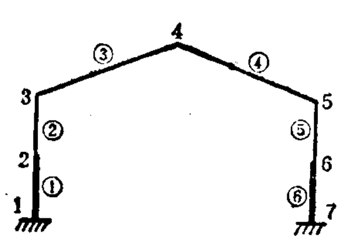


图 2-3

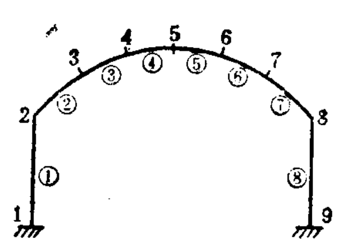
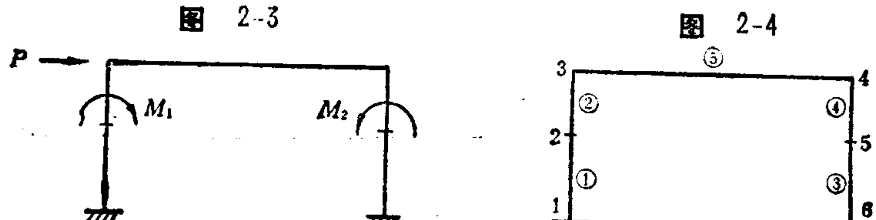


图 2-4



(a)　(b)

图 2-5

段数足够多时，这种近似处理方法的精度可以得到保证。图 2-4 给出了一横梁为曲杆的刚架结构单元的划分及节点和单元的编号方法。

在采用矩阵位移法进行结构分析时，结构刚度方程的右端为节点荷载向量。因此，所有荷载均应化为等效节点荷载。如果仅有少数的集中荷载作用于杆件时，也可以通过将集中荷载作用点作为一个节点来处理。这样，这些集中荷载也就成为节点荷载了。例如，对于图 2-5a 所示的刚架，可以采用图 2-5b 所示的单元划分和节点、单元编号方法。这样，结构所受的荷载就都成了节点荷载。

前面介绍了用矩阵位移法分析结构时总的思路与大体步骤，此时结构的支座位移边界条件是在总刚度方程形成后引入的，这种方法常称为矩阵位移法的后处理法。本书第三章所介绍的平面桁架程序和第四章所介绍的平面刚架程序就是按照后处理法设计的。另外也有一种做法是在形成总刚度矩阵时就将实际的位移边界条件以及位移关系考虑进去，由此形成的总刚度方程也就是结构刚度方程。这种分析方法称为矩阵位移法的先处理法。本书第五、六章中刚架动力和稳定性分析程序的设计便是按照先处理法进行的。

§2-3 单元刚度矩阵

单元刚度矩阵是反映单元两端节点的位移与杆端力之间关系的矩阵。对于杆件单元来说，这一关系可以通过两种途径导得。一种途径是采用静力法推导，这就是本节要介绍的方法；另一种途径是采用能量原理或虚功原理推导，将在第五章中介绍。

在上一节中提到，采用矩阵位移法分析结构时需设定一个结构坐标系，一般是采用右手坐标系，记为 xy。这样，节点位移和节点力应取与结构坐标的方向一致为正，其中节点的转角和节点力矩按右手法则均取逆时针方向为正。以下用 u、v 和 θ 分别表示节点沿结构坐标系x、y 轴的线位移和转角，用 X、Y 和 M 分别表示沿上述方向的节点力。若仅一个单元，节点力也就是单元的杆端力；对于一个结构，根据节点的平衡条件可知，节点力等于与该节点相连接的各单元在该节点的杆端力之和。

为了单元刚度矩阵推导上的方便，为每个单元设定一个单元局部坐标系 $\overline{x}\overline{y}$。局部坐标系也采用右手系，原点设在单元的一个端点，并且使它的 $\overline{x}$ 轴与杆件的轴线相重合。局部坐标系相对于结构坐标系的方位角用 α 表示，如图 2-6 所示。α 角定义为结构坐标系的 x 轴沿逆时针方向转至局部坐标系的 $\overline{x}$ 轴方向时所转过的角度。为了便于区分，将字母上加一短划表示关于局部坐标系的量。局部坐标系中的节点位移和杆端力分别用 $\overline{u}$、$\overline{v}$、$\overline{\theta}$、和 $\overline{X}$、$\overline{Y}$、$\overline{M}$ 表示，它们均以与该单元的局部坐标方向一致为正。这样，$\overline{u}$、$\overline{v}$ 和 $\overline{\theta}$ 即表示节点沿单元轴向、横向的位移和转角；$\overline{X}$、$\overline{Y}$ 和 $\overline{M}$ 也就是单元杆端的轴向力、剪力和弯矩。在学习矩阵

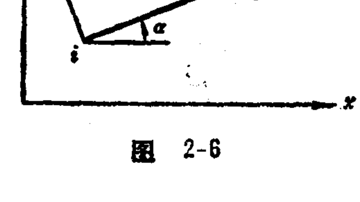


图 2-6

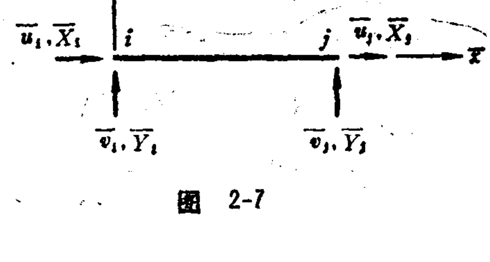


图 2-7

位移法时应特别注意有关物理量的正负号定义，尤其是它们与材料力学、结构力学中这些物理量正负号定义的差别。

在进行单元分析时首先建立局部坐标系中单元的节点位移与杆端力之间的关系，即局部坐标系中的单元刚度矩阵。然后再通过坐标转换得到结构坐标系中单元的节点位移与杆端力之间的关系，即结构坐标系中的单元刚度矩阵。

一、桁架单元的刚度矩阵

设有一任意的桁架单元如图 2-7 所示，i、j 为单元两端节点，$\bar{x}\bar{y}$为该单元的局部坐标系，其原点设在单元的 i 端。桁架单元的每一端节点可以有$\bar{x}$、$\bar{y}$方向两个独立的线位移，它们的正方向如图 2-7 所示。图中也示出了与上述节点位移相应的杆端力的正方向。

局部坐标系中单元的节点位移和杆端力可用向量的形式分别表示为

$$\{\bar{d}\}=\begin{bmatrix}\{\bar{d}_i\}\\ \hdashline \{\bar{d}_j\}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{u}_i\\ \bar{v}_i\\ \hdashline \bar{u}_j\\ \bar{v}_j\end{bmatrix} \tag{2-1}$$

$$\{\bar{f}\}=\begin{bmatrix}\{\bar{f}_i\}\\ \hdashline \{\bar{f}_j\}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{X}_i\\ \bar{Y}_i\\ \hdashline \bar{X}_j\\ \bar{Y}_j\end{bmatrix} \tag{2-2}$$

可分别称为局部坐标系中桁架单元的节点位移向量和杆端力向量。其中有关 i 节点和 j 节点的量用点线分隔以醒目。

根据材料力学有关公式，$\{\bar{f}\}$ 与 $\{\bar{d}\}$ 之间的关系为

$$\left.\begin{aligned}\bar{X}_i&=\frac{EA}{l}(\bar{u}_i-\bar{u}_j)\\ \bar{Y}_i&=0\\ \bar{X}_j&=\frac{EA}{l}(\bar{u}_j-\bar{u}_i)\\ \bar{Y}_j&=0\end{aligned}\right\}$$

式中 E 为材料的弹性模量，A、l 分别为杆件的横截面面积和长度。以上第二、四两式的右端为零是因为在小位移线性分析的情况下，节点沿 $\bar{x}$、$\bar{y}$ 方向的位移均不使杆端产生$\bar{y}$方向的反力。若将上式写成矩阵的形式则有

$$\begin{bmatrix}\bar{X}_i\\ \bar{Y}_i\\ \hdashline \bar{X}_j\\ \bar{Y}_j\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc:cc}\frac{EA}{l} & 0 & -\frac{EA}{l} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ \hdashline -\frac{EA}{l} & 0 & \frac{EA}{l} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]\begin{bmatrix}\bar{u}_i\\ \bar{v}_i\\ \hdashline \bar{u}_j\\ \bar{v}_j\end{bmatrix} \tag{2-3}$$

或缩写成

$$\begin{bmatrix} \bar{X}_i \\ \bar{X}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{EA}{l} & -\dfrac{EA}{l} \\ -\dfrac{EA}{l} & \dfrac{EA}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{u}_j \end{bmatrix} \tag{2-3'}$$

式(2-3)称为桁架单元的刚度方程。这一方程可以简洁地表达为

$$\{\bar{f}\} = [\bar{k}]\{\bar{d}\} \tag{2-4}$$

其中

$$[\bar{k}] = \left[\begin{array}{cc:cc} \dfrac{EA}{l} & 0 & -\dfrac{EA}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline -\dfrac{EA}{l} & 0 & \dfrac{EA}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \tag{2-5}$$

即为局部坐标系中桁架单元的刚度矩阵。

对于整个结构，各个单元的局部坐标系的方向不会都相同。为了建立节点的平衡方程，杆端力和节点位移必须有一个统一的正方向，即结构坐标系的正方向，这样就需要将局部坐标系中的杆端力、节点位移和单元刚度矩阵转换成结构坐标系中的杆端力、节点位移和单元刚度矩阵。

首先讨论两种坐标系中杆端力之间的变换关系。结构坐标系中单元的杆端力和节点位移可表示为

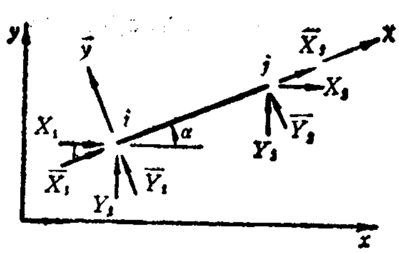


图 2-8

$$\{d\} = \left[\begin{array}{c} \{d_i\} \\ \hdashline \{d_j\} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} u_i \\ v_i \\ \hdashline u_j \\ v_j \end{array}\right] \tag{2-6}$$

$$\{f\} = \left[\begin{array}{c} \{f_i\} \\ \hdashline \{f_j\} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} X_i \\ Y_i \\ \hdashline X_j \\ Y_j \end{array}\right] \tag{2-7}$$

图 2-8 分别示出了局部坐标系和结构坐标系中桁架单元的杆端力。根据力的投影关系，有

$$\left.\begin{aligned} \bar{X}_i &= X_i\cos\alpha + Y_i\sin\alpha \\ \bar{Y}_i &= -X_i\sin\alpha + Y_i\cos\alpha \\ \bar{X}_j &= X_j\cos\alpha + Y_j\sin\alpha \\ \bar{Y}_j &= -X_j\sin\alpha + Y_j\cos\alpha \end{aligned}\right\}$$

将上式写成矩阵形式，则有

$$\left[\begin{array}{c} \bar{X}_i \\ \bar{Y}_i \\ \hdashline \bar{X}_j \\ \bar{Y}_j \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc:cc} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} X_i \\ Y_i \\ \hdashline X_j \\ Y_j \end{array}\right] \tag{2-8}$$

或简写成

$$\{\bar{f}\} = [T]\{f\} \tag{2-9}$$

式中

$$[T] = \left[\begin{array}{cc|cc} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{array}\right] \tag{2-10}$$

称为桁架单元的坐标转换矩阵。由式(2-10)可知坐标转换矩阵$[T]$是一个正交矩阵。

显然，局部坐标系和结构坐标系中杆端力之间的这种变换关系同样适用于节点位移之间的变换，即有

$$\{\bar{d}\} = [T]\{d\} \tag{2-11}$$

将式(2-9)和(2-11)代入式(2-4)，则有

$$[T]\{f\} = [\bar{k}][T]\{d\}$$

将上式的两边左乘$[T]^{-1}$后得

$$\{f\} = [T]^{-1}[\bar{k}][T]\{d\}$$

由于坐标转换矩阵$[T]$是一个正交矩阵，它的逆矩阵等于它的转置矩阵，即 $[T]^{-1} = [T]^{\mathrm{T}}$，故上式可以写成如下形式

$$\{f\} = [T]^{\mathrm{T}}[\bar{k}][T]\{d\} \tag{2-12}$$

记

$$[k] = [T]^{\mathrm{T}}[\bar{k}][T] \tag{2-13}$$

则得

$$\{f\} = [k]\{d\} \tag{2-14}$$

式(2-14)称为结构坐标系下的单元刚度方程。式中$[k]$即为结构坐标系的单元刚度矩阵，它确定了结构坐标系中单元杆端力与节点位移之间的关系。如将式(2-5)和(2-10)代入(2-13)，并记$c=\cos\alpha, s=\sin\alpha$，则得

$$[k] = \frac{EA}{l}\left[\begin{array}{cc|cc} c^2 & sc & -c^2 & -sc \\ sc & s^2 & -sc & -s^2 \\ \hline -c^2 & -cs & c^2 & sc \\ -cs & -s^2 & sc & s^2 \end{array}\right] \tag{2-15}$$

式(2-15)即为桁架单元刚度矩阵的一般表达形式。

二、刚架单元的刚度矩阵

对于一个平面刚架单元来说，每一个杆端节点具有三个独立的自由度，即沿坐标轴方向的两个线位移和一个转角位移。相应这三个位移自由度有三个杆端力与之对应。在局部坐标系中，单元的节点位移和杆端力可分别表示为