高等数学

（物理类）

第二册

兰州大学出版社

牛亚轩　段炎伏　杨凤翔

高等数学

（物理类）

第二册

牛亚轩　段炎伏　杨凤翔

兰州大学出版社

（甘）新登字第08号

高等数学（物理类）

第二册

牛亚轩　段炎伏　杨凤翔

兰州大学出版社出版

兰州市天水路216号　电话：8883156　邮政编码：730000

兰州人民印刷厂印刷

开本：850×1168毫米 1/32　印张：14.625

1996年6月第1版　1996年6月第1次印刷

字数：365千字　印数：1—3000册

ISBN7-311-01052-7/O·124　定价：17.60元

目　录

（第二册）

第五章　空间解析几何与向量代数

§1　空间直角坐标系

一　空间直角坐标系的建立　点和坐标的对应

两两垂直且相交于原点的三个数轴便构成空间直角坐标系，平常称三个数轴为 X 轴，Y 轴和 Z 轴，且使 OX，OY，OZ 的正向成右手系，即以右手姆指表 OZ 轴正向时，从 OX 轴正向到 OY 轴正向的旋转方向（转 90°）正好是右手握起时的四指的方向，其中 O 为三个轴的交点，也称为该空间直角坐标系的原点。

显然，此时 OY，OZ，OX，或 OZ，OX，OY 也成右手系。X 轴，Y 轴，Z 轴称为坐标轴，而 X 轴与 Y 轴、Y 轴与 Z 轴、Z 轴与 X 轴所在平面称为坐标平面，分别记为 XOY，YOZ，ZOX 平面。由此，三个坐标轴也可看成三个坐标平面两两的交线，而坐标原点也可看成三个坐标平面的交点。

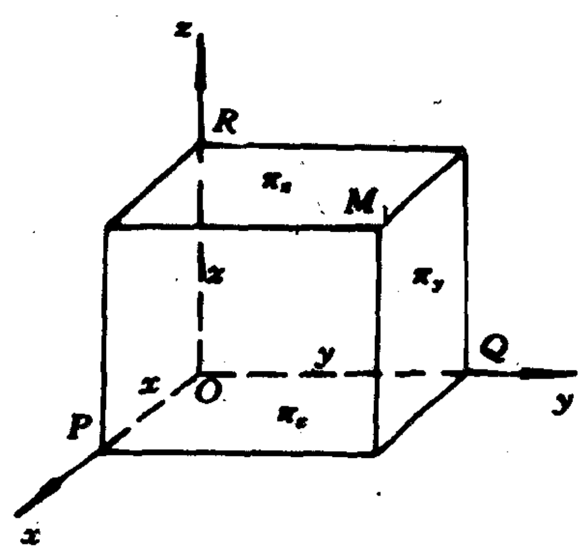

图 5.1

建立了空间直角坐标系，空间的任一点都可以和它的坐标建立一一对应的关系。设 M

为空间 $O—XYZ$ 中一点，过 M 作 X 轴的垂直平面 π_x，交 X 轴于 P，作 Y 轴、Z 轴的垂直平面 π_y、π_z，分别交 Y 轴、Z 轴于 Q 和 R，设 P、Q、R 分别在 X 轴，Y 轴，Z 轴上的坐标为 x,y,z，那么 (x,y,z) 便是由 M 唯一确定的一个三元有序组，称之为 M（在 $O—XYZ$ 之下）的坐标（图 5.1）。反之，若 (x,y,z) 为任一有序三元组，分别在 X 轴、Y 轴及 Z 轴上取点 P、Q、R，使得以 x,y,z 为其相应坐标，过 P、Q、R 分别作 X 轴，Y 轴，Z 轴的垂直平面 π_x,π_y,π_z，则此三平面有唯一的交点 M，称此点为以 (x,y,z) 为坐标的点。由此，在 $O—XYZ$ 确定之后，点 M 和其坐标 (x,y,z) 一一对应，因此经常写成 $M(x,y,x)$。当然随着坐标系的不同，同一个点的坐标将随之而异。

下面我们看看一些特殊的点的坐标。

点 $M(x,y,z)$ 在 XOY 平面的充分必要条件是 $z=0$，因此 M 应有坐标 $(x,y,0)$，类似地，YOZ，ZOX 平面上的点分别有坐标 $(0,y,x)$ 和 $(x,0,z)$。

坐标轴可以看成是两坐标平面的交线，从而，X 轴（Y 轴，Z 轴）上点的坐标应为 $(x,0,0)$（$(0,y,0)$，$(0,0,z)$）。而作为三坐标轴交点（也可看成三坐标面交点）的坐标原点 O 的坐标应为 $(0,0,0)$。

平面解析几何中，在 $O—XY$ 之下，将平面分成四个象限。空间直角坐标系的实质就是在平面直角坐标系 $O—XY$ 的基础上，再增加一个和该平面垂直且相交于原点的 Z 轴（成右手系），所以 $O—XY$ 中的第Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ象限连同 $z>0$，构成 $O—XYZ$ 中的第一、二、三、四卦限；而 $O—XY$ 中的Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ象限连同 $z<0$，构成 $O—XYZ$ 中的第五、六、七、八卦限。

利用坐标，我们也可以描述对称关系，点 $M(x,y,z)$ 关于 XOY 平面的对称点是 $M_{xy}(x,y,-z)$，关于 X 轴的对称点是 $M_x(x,-y,-z)$，关于原点的对称点为 $M_O(-x,-y;-z)$，对其他坐

标面和坐标轴的对称点也可类似确定。

二　距离公式

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为空间 $O\text{—}XYZ$ 中两点，定义数 $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$ 为 M_1，M_2 之间的**距离**，记为 $d(M_1,M_2)$。（有时也记为 $\rho(M_1,M_2)$）

定义了如上距离的空间，称之为三维欧几里德(Euclid)空间，显然它是欧几里德平面（二维欧几里德空间）的推广，同时这个定义也可推广到 n 维欧几里德空间。

上面定义的距离，有如下性质：

1)　$d(M_1,M_2)\geqslant 0$，且 $d(M_1,M_2)=0$ 的必要充分条件是 M_1，M_2 为同一个点；

2)　$d(M_1,M_2)=d(M_2,M_1)$；

3)　对任 M'，$d(M_1,M')+d(M',M_2)\geqslant d(M_1,M_2)$。

其中 1)称之为**非负性**；2)称之为**对称性**；3)称之为**次可加性**，或者叫做三角不等式，它是说三角形的任一边长不超过另两边长之和。

我们列出几种特殊的距离：$M(x,y,z)$ 到坐标平面 XOY 的距离应为 M 到 M 所作 XOY 的垂线的垂足 $M_{xy}(x,y,0)$ 之间距离，$d_{xy}=\sqrt{(z-0)^2}=|z|$，同样，$M$ 到 ZOX（YOZ）的距离为 $|y|$（$|x|$）；而 M 到 X 轴（Y 轴，Z 轴）的距离为 $\sqrt{y^2+z^2}$（$\sqrt{z^2+x^2}$，$\sqrt{x^2+y^2}$）；到原点 O 的距离为 $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$。

利用距离的定义，我们还可以描述具有某种特征的点的坐标应满足的条件，也可以利用其特征来确定点的坐标。例如，设 $M(x,y,z)$ 在以 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 为心，以 a 为半径的球面上，则 M 的坐标应当满足条件 $d(M,M_0)=a$，即

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=a^2;$$

又如，设 M 和点 $A(-2,5,3)$，$B(3,2,-1)$ 等距离，且在 X 轴上，则可求出 M 的坐标。事实上，设 M 的坐标为 $(x,0,0)$，则由

$$(x-12)^2+5^2+3^2=(x-3)^2+2^2+(-1)^2$$

使 $4x+6x=-2^2-5^2-3^2+3^2+2^2+1=-24$

从而 $x=-\dfrac{12}{5}$，所以 M 的坐标为 $(-\dfrac{12}{5},0,0)$。

若限 M 在 Y 轴上，则由

$$2^2+(y-5)^2+3^2=(-3)^2+(y-2)^2+(+1)^2$$

使 $-10y+4y=3^2+2^2+1^2-2^2-5^2-3^2=-24$

从而 $y=4$，所以 M 的坐标为 $(0,4,0)$。

三　定比分点公式

在平面解析几何中，我们讲过定比分点公式：若 $P(x,y)$ 分有向线段 P_1P_2 为定比 λ，即 $\lambda=\dfrac{P_1P}{PP_2}$，其中 P_1P，PP_2 表相应有向线段的数量。设 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$，则

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\qquad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$$

我们将此公式推广到（三维）空间：若 $P(x,y,z)$ 分有向线段 P_1P_2 为定比 λ，$P_1(x_1,y_1,z_1)$，$P_2(x_2,y_2,z_2)$，则有

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y+\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}。$$

当 $\lambda\in(0,+\infty)$ 时，P 为 P_1P_2 的内分点；当 $\lambda\longrightarrow 0^+$ 时，$x\longrightarrow x_1$，$y\longrightarrow y_1$，$z\longrightarrow z_1$，使 P 无限接近于 P_1；当 $\lambda\longrightarrow+\infty$ 时，则 P 无限接近于 P_2；特别当 $\lambda=1$ 时，由 $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$，$y=\dfrac{y_1+y_2}{2}$，$z=\dfrac{z_1+z_2}{2}$，即 P 为 P_1P_2 的中点。

当 $\lambda\in(-1,0)$ 时，P 在 P_1P_2 的延线上；当 $\lambda\in(-\infty,-1)$ 时，P 在 P_2P_1 的延线上。这两种情况下的 P，均称为外分点。在定比分点公式中，$\lambda\neq-1$。

例 1 设 $P_1(x_1,y_1,z_1)$,($P_2(x_2,y_2,z_2)$。$P(x,y,z)$为线段 P_1P_2 上的点,讨论 P 的坐标的表示形式。

解 由 P 分 P_1P_2 为定比 $\lambda(\in(0,+\infty))$,使

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda},$$

令 $\frac{\lambda}{1+\lambda}=t$,则 $t\in(0,1)$,且$\frac{1}{1+\lambda}=1-t$,于是

$$x=(1-t)x_1+tx_2,y=(1-t)y_1+ty_2,z=(1-t)z_1+tz_2$$

而且当 t 自 0 到 1 变动时,P 自 P_1 变到 P_2。

例 2 设 $P_1(2,3,5)$,$P_2(-1,2,-3)$为两点,求过 P_1,P_2 的直线和 YOZ 平面的交点 P 的坐标。

解 由 P 在 P_1P_2 上,使定比分 P_1P_2,设其比为 λ,则 P 的坐标(x,y,z)满足条件。

$$x=\frac{2-\lambda}{1+\lambda},\quad y=\frac{3+2\lambda}{1+\lambda},\quad z=\frac{-5-3\lambda}{1+\lambda},$$

由 $x=0$,使 $\lambda=2$,($\lambda\neq-1$),从而

$$x=0,y=\frac{7}{3},\quad z=\frac{-11}{3}。$$

四 空间方向的确定

在空间,可用自原点发出的一条射线表示一个方向,下面我们介绍几种描述方向的方法:

1. 方向角 射线 l 和 X 轴、Y 轴及 Z 轴正向的夹角 α、β、γ,称之为方向 l 的**方向角**,由于一个方向和一组方向角(α、β、γ)一一对应(α、β、$\gamma\in[0,\pi]$),所以,可以用方向角(α、β、γ)描述方向。

2. 方向余弦 设(α、β、γ)为 l 的方向角,则$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$称为该方向的**方向余弦**,因为 α、β、$\gamma\in[0,\pi]$,使方向余弦和方向角一一对应,从而和方向一一对应,所以也可用方向余弦来描述一个方向。

3. 方向数 任一不全为 0 的三元有序数组(l,m,n)确定原点

外一点 P，又$\overline{OP}$可确定一个射线，从而也唯一确定一个方向。设 α，β，γ 为该方向的方向角，则由 $\cos\alpha=\dfrac{l}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$，$\cos\beta=\dfrac{n}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$，$\cos\gamma=\dfrac{n}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$，使 (l,m,n) 和 $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 成比例。一般说，和一个方向的方向余弦成比例的一个三元有序数组 (l,m,n) 称为该方向的一个**方向数**，显然一个方向和这个方向的方向数并不是一一对应的。

4. 设 $P(x,y,z)$ 为 l 上一点（不同于 0），令 $\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，则由 $x=\rho\cos\alpha$，$y=\rho\cos\beta$，$z=\rho\cos\gamma$，使 (x,y,z) 是一个方向数，且有

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

这里一方面给出了已知射线上一点 $P(x,y,z)$ 求其方向余弦的方法，同时还说明并不是任意三个角 α,β,γ 都能当方向角，它们之间应由 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ 相关联着。

例 3 若一方向的方向角 α,β,γ 相等，求其方向余弦和方向角。

解 由 $1=\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=3\cos^2\alpha=3\cos^2\beta=3\cos^2\gamma$

使 $\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma$，

从而 $\alpha=\beta=\gamma=\arccos(\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3})$，

例 4 设一射线的方向角中两个为$\dfrac{\pi}{3}$，求其第三个角。

解 设 $\alpha=\beta=\dfrac{\pi}{3}$，由 $\cos^2\gamma=1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta$

$$=1-((\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^2)=\frac{1}{2},$$

所以，$\cos\gamma=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，