

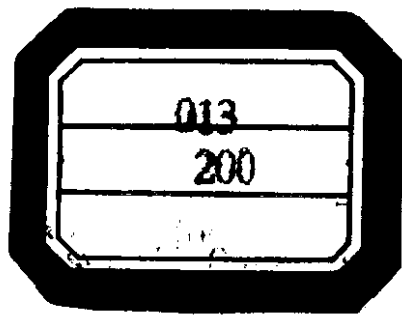
# 高等数学

（物理类）

第二册

兰州大学出版社

牛亚轩 段炎伏 杨凤翔



1706175

# 高等数学

(物理类)

JY1/38/02

第二册

牛亚轩 段炎伏 杨凤翔



兰州大学出版社



\*B1319176\*

(甘)新登字第 08 号

高等数学(物理类)

第二册

牛亚轩 段炎伏 杨凤翔

兰州大学出版社出版

兰州市天水路 216 号 电话:8883156 邮政编码:730000

---

兰州人民印刷厂印刷

开本:850×1168 毫米 1/32 印张:14.625

---

1996 年 6 月第 1 版 1996 年 6 月第 1 次印刷

字数:365 千字 印数:1—3000 册

---

ISBN7-311-01052-7/O·124 定价:17.60 元

# 目 录

(第二册)

第五章 空间解析几何与向量代数	(1)
§ 1 空间直角坐标系	(1)
一 空间直角坐标系的建立 点和坐标的对应	(1)
二 距离公式	(3)
三 定比分点公式	(4)
四 空间方向的确定	(5)
习题一	(7)
§ 2 向量及其代数运算	(7)
一 基本概念	(8)
二 向量的加法运算和向量的数乘	(9)
三 向量的分解 向量在坐标轴上的分量	(12)
四 向量在轴上的投影 向量的坐标	(13)
五 向量的数量积与向量积	(16)
六 向量的二次积	(20)
七 向量函数	(22)
习题二	(23)
§ 3 平面的方程	(24)
一 确定平面的条件	(24)
二 平面的几种方程	(24)
三 两平面的位置关系	(28)
四 点到平面的距离	(29)

习题三 .....	(31)
§ 4 直线的方程 .....	(32)
一 直线的各种方程 .....	(32)
二 两直线的位置关系 .....	(35)
三 平面与直线间的位置关系 .....	(36)
习题四 .....	(36)
§ 5 二次曲面 .....	(37)
一 旋转曲面 .....	(39)
二 椭球面 .....	(42)
三 单叶双曲面 .....	(43)
四 双叶双曲面 .....	(44)
五 双曲抛物面 .....	(45)
六 椭圆抛物面 .....	(45)
七 二次锥面 .....	(46)
八 柱面和锥面 .....	(47)
习题五 .....	(48)
§ 6 空间曲线 .....	(49)
习题六 .....	(53)
§ 7' 直角坐标系的变换 .....	(53)
一 平面直角坐标的变换 .....	(54)
二 空间直角坐标的变换 .....	(57)
综合练习 .....	(62)
<b>第六章 多元函数微分学 .....</b>	<b>(64)</b>
§ 1 多元函数的概念 .....	(64)
一 平面点集和平面区域 .....	(64)
二 二元函数的概念 .....	(67)
习题一 .....	(70)
§ 2 二元函数的极限和连续 .....	(71)
一 函数极限的定义 .....	(71)

二 二次极限	(74)
三 连续	(77)
四 无穷远处的极限	(78)
习题二	(79)
§ 3 偏导数和全微分	(80)
一 偏导数	(80)
二 高阶偏导数	(85)
三 全微分	(89)
习题三	(93)
§ 4 方向导数 梯度	(94)
习题四	(98)
§ 5 复合函数的偏导数 链式法则	(98)
一 复合函数的概念	(99)
二 链式法则	(99)
三 复合函数的高阶偏导数	(104)
四 隐函数求导	(106)
习题五	(114)
§ 6 空间曲线的切线和法平面与曲面的切平面和法线	(115)
一 空间曲线的切线和法平面	(116)
二 曲面的切平面和法线	(119)
习题六	(122)
§ 7 泰勒公式	(123)
习题七	(128)
§ 8 二元函数的极值	(129)
一 一般极值	(129)
二 条件极值	(135)
三 最小二乘法	(139)
习题八	(140)

§ 9	向量函数和雅可比矩阵 .....	(141)
	综合练习 .....	(147)
<b>第七章</b>	<b>多元函数积分学</b> .....	<b>(151)</b>
§ 1	可度量几何体上函数的积分 .....	(151)
一	积分的物理背景举例 .....	(151)
二	可度量几何体上积分的定义 .....	(153)
三	几何体的度量及可度量几何体 .....	(155)
四	积分的性质 .....	(156)
§ 2	二重积分的计算 .....	(157)
一	直角坐标系下化二重积分为二次积分 .....	(158)
二	极坐标系下二重积分的计算 .....	(167)
三	二重积分的一般坐标变换公式 .....	(171)
四	反常二重积分 .....	(177)
	习题一 .....	(179)
§ 3	三重积分的计算 .....	(180)
一	化为累次积分 .....	(180)
二	柱坐标和球坐标 .....	(183)
三	三重积分的一般坐标变换公式 .....	(184)
	习题二 .....	(189)
§ 4	重积分的应用 .....	(189)
	习题三 .....	(196)
§ 5	曲线积分 .....	(197)
一	第一型曲线积分的计算 .....	(197)
二	第二型曲线积分的定义 .....	(198)
三	第二型曲线积分的基本算法 .....	(200)
	习题四 .....	(203)
§ 6	格林公式 平面曲线积分与积分路径无关性 .....	(204)
一	格林公式 .....	(204)
二	第二型曲面积分与积分路径无关的条件 .....	(210)

习题五.....	(214)
§ 7 曲面积分 .....	(215)
一 曲面面积 .....	(215)
二 第一型曲面积分的计算 .....	(219)
三 第二型曲面积分 .....	(222)
习题六.....	(228)
§ 8 高斯公式和斯托克斯公式 .....	(229)
一 高斯公式 .....	(230)
二 斯托克斯公式 .....	(234)
三 各种积分间的联系 .....	(240)
习题七.....	(241)
综合练习.....	(242)
<b>第八章 场论初步.....</b>	<b>(246)</b>
§ 1 数量场的梯度场 .....	(246)
一 梯度场与等量面(线) .....	(247)
二 方向导数和梯度 .....	(250)
三 哈密顿算子 .....	(251)
习题一.....	(253)
§ 2 向量场的散度 管量场 .....	(253)
一 向量曲线 .....	(253)
二 通量 向量场的散度 .....	(255)
三 散度的计算公式 .....	(257)
四 高斯公式的物理意义 管量场 .....	(259)
习题二.....	(261)
§ 3 向量场的旋度 有势场.....	(262)
一 平面向量场的旋度 .....	(263)
二 空间向量场的旋度 .....	(267)
三 二阶度 几种特殊的场 .....	(272)
习题三.....	(274)



§ 4* 正交曲线坐标系 $F\nabla u$ 、 $\nabla \cdot F$ 、 $x_F$ 的表达式	(275)
综合练习	(282)
<b>第九章 无穷级数</b>	<b>(283)</b>
§ 1 数项级数的收敛性	(283)
一 级数的敛散性定义	(283)
二 收敛级数的基本性质	(286)
三 正项级数敛散性判别	(288)
四 一般项级数敛散性判别	(295)
五 条件收敛级数和绝对收敛级数的差别	(300)
习题一	(301)
§ 2 反常积分和无穷级数的类比	(302)
习题二	(308)
§ 3 函数项级数	(309)
一 收敛和一致收敛	(309)
二 和函数的性质	(312)
习题三	(316)
§ 4 幂级数	(317)
一 收敛半径与收敛域	(317)
二 和函数的性质与求和函数	(320)
三 泰勒级数及函数的幂级数展开	(323)
习题四	(330)
§ 5 付里叶级数	(331)
一 三角函数系及其性质	(331)
二 付里叶系数和付里叶级数	(332)
三 付里叶级数的收敛性	(334)
四 以 $2l$ 为周期的函数的付里叶级数	(336)
五 付里叶级数的复数形式	(340)
习题五	(341)
§ 5 含参变量的积分	(342)

一	含参变量的定积分 .....	(342)
二	含参变量的反常积分的收敛和一致收敛 .....	(345)
三	与函数项级数的类比 积分函数的性质 .....	(347)
四	欧拉积分 .....	(350)
习题五	.....	(353)
综合练习	.....	(354)
<b>第十章</b>	<b>常微分方程(续)</b> .....	<b>(356)</b>
§ 1	一阶常微分方程的其它可积类型 .....	(356)
一	全微分方程 积分因子 .....	(356)
二	隐式方程 .....	(363)
习题一	.....	(368)
§ 2	一阶常微分方程初值问题解的存在唯一性及其它 解法 .....	(369)
一	解的存在唯一性定理 .....	(369)
二	逐次逼近法 .....	(374)
三	数值解法 .....	(376)
习题二	.....	(381)
§ 3*	二阶变系数线性常微分方程的幂级数解法 .....	(381)
一	幂级数解法及例 .....	(382)
二	广义幂级数解法及例 .....	(385)
习题三	.....	(388)
§ 4	常微分方程组 .....	(388)
一	方程组概说 .....	(388)
二	方程组的初等解法 .....	(390)
三	常微分方程组与一阶线性偏微分方程的关系 .....	(399)
四	线性方程组的基本理论 .....	(403)
五	常系数线性方程组 .....	(407)
习题四	.....	(416)
§ 5*	拉普拉斯变换及其应用 .....	(417)

一 基本概念及理论 .....	(418)
二 应用举例 .....	(428)
习题五 .....	(432)
<b>附录三 微分形式的积分</b> .....	<b>(434)</b>
一 定向 .....	(434)
二 外积和外微分 .....	(437)
三 微分形式的积分 .....	(442)
四 Stokes(斯托克斯)公式 .....	(449)

## 第五章 空间解析几何与向量代数

### § 1 空间直角坐标系

#### 一 空间直角坐标系的建立 点和坐标的对应

两两垂直且相交于原点的三个数轴便构成空间直角坐标系，平常称三个数轴为  $X$  轴， $Y$  轴和  $Z$  轴，且使  $OX, OY, OZ$  的正向成右手系，即以右手姆指表  $OZ$  轴正向时，从  $OX$  轴正向到  $OY$  轴正向的旋转方向（转  $90^\circ$ ）正好是右手握起时的四指的方向，其中  $O$  为三个轴的交点，也称为该空间直角坐标系的原点。

显然，此时  $OY, OZ, OX$ ，或  $OZ, OX, OY$  也成右手系。 $X$  轴， $Y$  轴， $Z$  轴称为坐标轴，而  $X$  轴与  $Y$  轴、 $Y$  轴与  $Z$  轴、 $Z$  轴与  $X$  轴所在平面称为坐标平面，分别记为  $XOY, YOZ, ZOX$  平面。由此，三个坐标轴也可看成三个坐标平面两两的交线，而坐标原点也可看成三个坐标平面的交点。

建立了空间直角坐标系，空间的任一点都可以和它的坐标建立一一对应的关系。设  $M$

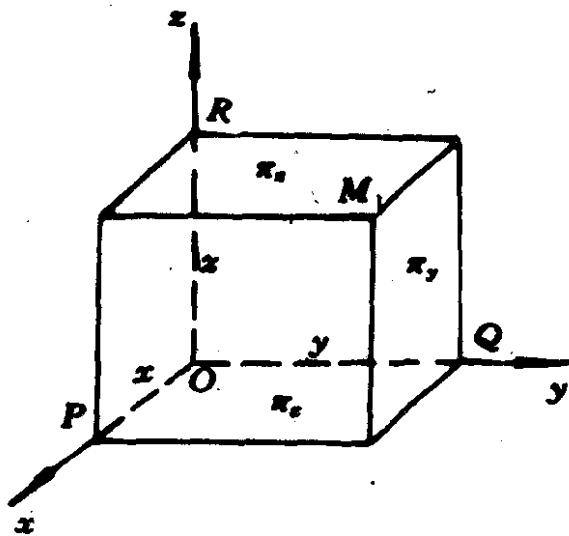


图 5.1

为空间  $O-XYZ$  中一点, 过  $M$  作  $X$  轴的垂直平面  $\pi_x$ , 交  $X$  轴于  $P$ , 作  $Y$  轴、 $Z$  轴的垂直平面  $\pi_y, \pi_z$ , 分别交  $Y$  轴、 $Z$  轴于  $Q$  和  $R$ , 设  $P, Q, R$  分别在  $X$  轴、 $Y$  轴、 $Z$  轴上的坐标为  $x, y, z$ , 那么  $(x, y, z)$  便是由  $M$  唯一确定的一个三元有序组, 称之为  $M$  (在  $O-XYZ$  之下) 的坐标 (图 5.1)。反之, 若  $(x, y, z)$  为任一有序三元组, 分别在  $X$  轴、 $Y$  轴及  $Z$  轴上取点  $P, Q, R$ , 使得以  $x, y, z$  为其相应坐标, 过  $P, Q, R$  分别作  $X$  轴、 $Y$  轴、 $Z$  轴的垂直平面  $\pi_x, \pi_y, \pi_z$ , 则此三平面有唯一的交点  $M$ , 称此点为以  $(x, y, z)$  为坐标的点。由此, 在  $O-XYZ$  确定之后, 点  $M$  和其坐标  $(x, y, z)$  一一对应, 因此经常写成  $M(x, y, z)$ 。当然随着坐标系的不同, 同一个点的坐标将随之而异。

下面我们看看一些特殊的点的坐标。

点  $M(x, y, z)$  在  $XOY$  平面的充分必要条件是  $z=0$ , 因此  $M$  应有坐标  $(x, y, 0)$ , 类似地,  $YOZ, ZOY$  平面上的点分别有坐标  $(0, y, z)$  和  $(x, 0, z)$ 。

坐标轴可以看成是两坐标平面的交线, 从而,  $X$  轴 ( $Y$  轴,  $Z$  轴) 上点的坐标应为  $(x, 0, 0)$  ( $(0, y, 0), (0, 0, z)$ )。而作为三坐标轴交点 (也可看成三坐标面交点) 的坐标原点  $O$  的坐标应为  $(0, 0, 0)$ 。

平面解析几何中, 在  $O-XY$  之下, 将平面分成四个象限。空间直角坐标系的实质就是在平面直角坐标系  $O-XY$  的基础上, 再增加一个和该平面垂直且相交于原点的  $Z$  轴 (成右手系), 所以  $O-XY$  中的第 I、II、III、IV 象限连同  $z>0$ , 构成  $O-XYZ$  中的第一、二、三、四卦限; 而  $O-XY$  中的 I、II、III、IV 象限连同  $z<0$ , 构成  $O-XYZ$  中的第五、六、七、八卦限。

利用坐标, 我们也可以描述对称关系, 点  $M(x, y, z)$  关于  $XOY$  平面的对称点是  $M_{xy}(x, y, -z)$ , 关于  $X$  轴的对称点是  $M_x(x, -y, -z)$ , 关于原点的对称点为  $M_o(-x, -y, -z)$ , 对其他坐

标面和坐标轴的对称点也可类似确定。

## 二 距离公式

设  $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$  为空间  $O-XYZ$  中两点, 定义数  $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$  为  $M_1, M_2$  之间的距离, 记为  $d(M_1, M_2)$ 。(有时也记为  $\rho(M_1, M_2)$ )

定义了如上距离的空间, 称之为三维欧几里德(Euclid)空间, 显然它是欧几里德平面(二维欧几里德空间)的推广, 同时这个定义也可推广到  $n$  维欧几里德空间。

上面定义的距离, 有如下性质:

1)  $d(M_1, M_2) \geq 0$ , 且  $d(M_1, M_2) = 0$  的必要充分条件是  $M_1, M_2$  为同一个点;

2)  $d(M_1, M_2) = d(M_2, M_1)$ ;

3) 对任  $M', d(M_1, M') + d(M', M_2) \geq d(M_1, M_2)$ 。

其中 1) 称之为非负性; 2) 称之为对称性; 3) 称之为次可加性, 或者叫做三角不等式, 它是说三角形的任一边长不超过另两边长之和。

我们列出几种特殊的距离:  $M(x, y, z)$  到坐标平面  $XOY$  的距离应为  $M$  到  $M$  所作  $XOY$  的垂线的垂足  $M_{xy}(x, y, 0)$  之间距离,  $d_{xy} = \sqrt{(z-0)^2} = |z|$ , 同样,  $M$  到  $ZOX$  ( $YOZ$ ) 的距离为  $|y|$  ( $|x|$ ); 而  $M$  到  $X$  轴 ( $Y$  轴,  $Z$  轴) 的距离为  $\sqrt{y^2+z^2}$  ( $\sqrt{z^2+x^2}$ ,  $\sqrt{x^2+y^2}$ ); 到原点  $O$  的距离为  $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 。

利用距离的定义, 我们还可以描述具有某种特征的点的坐标应满足的条件, 也可以利用其特征来确定点的坐标。例如, 设  $M(x, y, z)$  在以  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  为心, 以  $a$  为半径的球面上, 则  $M$  的坐标应当满足条件  $d(M, M_0) = a$ , 即

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=a^2;$$

又如, 设  $M$  和点  $A(-2, 5, 3), B(3, 2, -1)$  等距离, 且在  $X$  轴上, 则可求出  $M$  的坐标。事实上, 设  $M$  的坐标为  $(x, 0, 0)$ , 则由

$$(x-2)^2 + 5^2 + 3^2 = (x-3)^2 + 2^2 + (-1)^2$$

使  $4x + 6x = -2^2 - 5^2 - 3^2 + 3^2 + 2^2 + 1 = -24$

从而  $x = -\frac{12}{5}$ , 所以  $M$  的坐标为  $(-\frac{12}{5}, 0, 0)$ 。

若限  $M$  在  $Y$  轴上, 则由

$$2^2 + (y-5)^2 + 3^2 = (-3)^2 + (y-2)^2 + (+1)^2$$

使  $-10y + 4y = 3^2 + 2^2 + 1^2 - 2^2 - 5^2 - 3^2 = -24$

从而  $y = 4$ , 所以  $M$  的坐标为  $(0, 4, 0)$ 。

### 三 定比分点公式

在平面解析几何中, 我们讲过定比分点公式: 若  $P(x, y)$  分有向线段  $P_1P_2$  为定比  $\lambda$ , 即  $\lambda = \frac{P_1P}{PP_2}$ , 其中  $P_1P, PP_2$  表相应向有向线段的数量。设  $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ , 则

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$$

我们将此公式推广到(三维)空间: 若  $P(x, y, z)$  分有向线段  $P_1P_2$  为定比  $\lambda, P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2)$ , 则有

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}。$$

当  $\lambda \in (0, +\infty)$  时,  $P$  为  $P_1P_2$  的内分点; 当  $\lambda \rightarrow 0^+$  时,  $x \rightarrow x_1, y \rightarrow y_1, z \rightarrow z_1$ , 使  $P$  无限接近于  $P_1$ ; 当  $\lambda \rightarrow +\infty$  时, 则  $P$  无限接近于  $P_2$ ; 特别当  $\lambda = 1$  时, 由  $x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y = \frac{y_1 + y_2}{2}, z = \frac{z_1 + z_2}{2}$ , 即  $P$  为  $P_1P_2$  的中点。

当  $\lambda \in (-1, 0)$  时,  $P$  在  $P_1P_2$  的延线上; 当  $\lambda \in (-\infty, -1)$  时,  $P$  在  $P_2P_1$  的延线上。这两种情况下的  $P$ , 均称为外分点。在定比分点公式中,  $\lambda \neq -1$ 。

**例1** 设  $P_1(x_1, y_1, z_1), (P_2(x_2, y_2, z_2))$ .  $P(x, y, z)$  为线段  $P_1P_2$  上的点, 讨论  $P$  的坐标的表示形式.

**解** 由  $P$  分  $P_1P_2$  为定比  $\lambda(\in(0, +\infty))$ , 使

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda},$$

令  $\frac{\lambda}{1 + \lambda} = t$ , 则  $t \in (0, 1)$ , 且  $\frac{1}{1 + \lambda} = 1 - t$ , 于是

$$x = (1 - t)x_1 + tx_2, y = (1 - t)y_1 + ty_2, z = (1 - t)z_1 + tz_2$$

而且当  $t$  自 0 到 1 变动时,  $P$  自  $P_1$  变到  $P_2$ .

**例2** 设  $P_1(2, 3, 5), P_2(-1, 2, -3)$  为两点, 求过  $P_1, P_2$  的直线和  $YOZ$  平面的交点  $P$  的坐标.

**解** 由  $P$  在  $P_1P_2$  上, 使定比分  $P_1P_2$ , 设其比为  $\lambda$ , 则  $P$  的坐标  $(x, y, z)$  满足条件.

$$x = \frac{2 - \lambda}{1 + \lambda}, y = \frac{3 + 2\lambda}{1 + \lambda}, z = \frac{-5 - 3\lambda}{1 + \lambda},$$

由  $x = 0$ , 使  $\lambda = 2$ , ( $\lambda \neq -1$ ), 从而

$$x = 0, y = \frac{7}{3}, z = \frac{-11}{3}.$$

#### 四 空间方向的确定

在空间, 可用自原点发出的一条射线表示一个方向, 下面我们介绍几种描述方向的方法:

1. 方向角 射线  $l$  和  $X$  轴、 $Y$  轴及  $Z$  轴正向的夹角  $\alpha, \beta, \gamma$ , 称之为方向  $l$  的方向角, 由于一个方向和一组方向角  $(\alpha, \beta, \gamma)$  一一对应 ( $\alpha, \beta, \gamma \in [0, \pi]$ ), 所以, 可以用方向角  $(\alpha, \beta, \gamma)$  描述方向.

2. 方向余弦 设  $(\alpha, \beta, \gamma)$  为  $l$  的方向角, 则  $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$  称为该方向的方向余弦, 因为  $\alpha, \beta, \gamma \in [0, \pi]$ , 使方向余弦和方向角一一对应, 从而和方向一一对应, 所以也可用方向余弦来描述一个方向.

3. 方向数 任一不全为 0 的三元有序数组  $(l, m, n)$  确定原点



外一点  $P$ , 又  $\overline{OP}$  可确定一个射线, 从而也唯一确定一个方向。设  $\alpha, \beta, \gamma$  为该方向的方向角, 则由  $\cos\alpha = \frac{l}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}, \cos\beta = \frac{m}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}, \cos\gamma = \frac{n}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$ , 使  $(l, m, n)$  和  $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$  成比例。一般说, 和一个方向的方向余弦成比例的一个三元有序数组  $(l, m, n)$  称为该方向的一个方向数, 显然一个方向和这个方向的方向数并不是一一对应的。

4. 设  $P(x, y, z)$  为  $l$  上一点 (不同于 0), 令  $\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ , 则由  $x = \rho\cos\alpha, y = \rho\cos\beta, z = \rho\cos\gamma$ , 使  $(x, y, z)$  是一个方向数, 且有

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

这里一方面给出了已知射线上一点  $P(x, y, z)$  求其方向余弦的方法, 同时还说明并不是任意三个角  $\alpha, \beta, \gamma$  都能当方向角, 它们之间应由  $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$  相关联着。

**例 3** 若一方向的方向角  $\alpha, \beta, \gamma$  相等, 求其方向余弦和方向角。

**解** 由  $1 = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 3\cos^2\alpha = 3\cos^2\beta = 3\cos^2\gamma$   
使  $\pm \frac{\sqrt{3}}{3} = \cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma$ ,

从而  $\alpha = \beta = \gamma = \arccos\left(\pm \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ ,

**例 4** 设一射线的方向角中两个为  $\frac{\pi}{3}$ , 求其第三个角。

**解** 设  $\alpha = \beta = \frac{\pi}{3}$ , 由  $\cos^2\gamma = 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta$   
 $= 1 - \left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = \frac{1}{2}$ ,

所以,  $\cos\gamma = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,