概率论习题集

【苏】X·M·安德罗哈耶夫著
高尚华 译

辽宁教育出版社

概 率 论 习 题 集

〔苏〕X. M. 安德罗哈耶夫　著
高尚华　译

辽 宁 教 育 出 版 社

1987年·沈阳

概率论习题集

高尚华 译

辽宁教育出版社出版 辽宁省新华书店发行
(沈阳市南京街6段1里2号) 沈阳七二一二印刷厂

字数：205,000 开本：787×1092 1/32 印张：7 3/4
印数：1—4,491
1987年11月第1版 1987年11月第1次印刷

责任编辑：谭 坚 责任校对：言 覃
封面设计：曹太文

ISBN 7—5382—0014—2/G·14 定价：1.70元

译者的话

本书是根据苏联莫斯科知识出版社1985年出版的X.M. Андрухаев 著《Сборник Задач по Теории Верятностей》一书译出的，原书是苏联教育部批准的教学参考书，适用于苏联师范学院数学专业、主修数学兼修物理的专业以及主修物理兼修数学的专业。

本书的每一节实际分成三部分：首先概括地叙述有关内容：概念、定义、性质、定理、公式等；然后选配若干道例题作解法示范；最后是习题部分．书末附有习题答案．由于作了这样编排，读者使用起来会感到非常方便．本书的习题侧重于基本理论和基本方法的应用，不求难求偏，不少题目对我国读者来说很有新意。

本书可供我国师范院校、师专、教师进修学院等教学概率论时参考，也可供工科院校、电大、职大师生阅读。

译者在翻译本书过程中，改正了所发现的贻误．但限于水平，书中错误疏漏一定不少，恳请广大读者批评指正。

译者

1986年9月于北京

前　言

这本概率论习题集对师范院校物理—数学专业的学生适用，它跟 А.С.Соподовников 编写的教学参考书《概率论》（莫斯科，知识出版社，1983）相配套.

第一章收集了应用不同方法确定概率的习题和应用概率基本理论的习题，重点是应用组合分析直接计算古典概型概率的习题. 第二章研究解贝努里概型范围内的习题. 第三章用于随机变量的分布律和数字特征. 第四章讨论数理统计的习题.

在本书准备出版的过程中，А. С. Соподовников 教授作了很多建议和帮助，我在此向他表示真挚的感谢.

Х. М. 安德罗哈耶夫

目　录

前言

第一章　事件及其概率……………………………………1

§1．事件、事件的相等、事件的和与积、对立事件……………………………………1

§2．随机事件的频率与概率的统计定义…………9

§3．概率论公理……………………………………11

§4．概率计算的古典方法…………………………15

§5．几何概率………………………………………19

§6．组合分析与牛顿二项式………………………24

§7．运用组合分析计算概率………………………31

§8．概率的加法原理与概率的乘法原理…………37

§9．全概率公式与贝叶斯公式……………………44

第二章　贝努里概型……………………………………53

§10．贝努里公式及其推广．沿着直线的随机游动……………………………………53

§11．拉普拉斯近似公式与泊松近似公式…………69

§12．马尔可夫链……………………………………74

第三章　随机变量………………………………………82

§13. 离散的随机变量及其分布律. 分布多边形……82
§14. 一般形式的随机变量. 分布函数……91
§15. 连续的随机变量. 概率密度……100
§16. 二维随机向量. 离散型随机向量. 有概率密度的随机向量……112
§17. 随机变量的函数……126
§18. 随机变量的数字特征……139
§19. 契比习夫不等式与大数定律……154
第四章 数理统计基础……160
§20. 变差级数. 频率表. 多边形与直方图……160
§21. 分布的参数估计……167
§22. 分布参数的置信估计. 用频率估计未知概率……173
§23. 相关. 最小二乘方法……180

答 案……189
参考书目……235

附录1. 函数$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$值表……236
2. 函数$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$值表……237
3. $t_\gamma=t(\gamma, n)$值表……238
4. 函数$p_k(\lambda)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$值表……238

第一章　事件及其概率

§1 . 事件、事件的相等、事件的和与积、对立事件

从直观上说，某个试验（实验、观测等）的结果称为**事件**.

对于给定的试验，如果当这试验实现时，一事件可能发生，也可能不发生，则称它为**随机事件**.

随机事件用A，B，C，…来表示.

如果根据试验的结果，一事件一定会发生，则称它为**必然事件**. 如果根据试验的结果，一事件显然不发生，则称它为**不可能事件**. 必然事件与不可能事件分别用U与V来表示.

如果当事件A发生时，事件B也发生，则A称为B的部分事件，记作$A\subset B$.

如果事件A与B中的每一个都是另一个的部分事件，则称它们**相等**，记作$A=B$.

对于事件A与B，如果当且仅当A或B中至少一个发生时，第三个事件$A+B$发生，则称$A+B$为事件A与B的

和. 如果当且仅当A与B都发生时，第三个事件AB发生，则称AB为事件A与B的**积**.

两个事件的和与积的概念容易推广到任意个事件的情况中去.

如果当且仅当事件A不发生时，事件$\overline{A}$发生，则$\overline{A}$称为A的**对立事件**.

当约定用记号“+”表示事件发生，用记号“−”表示事件不发生时，两个事件的和与积以及对立事件可以用下面的表来确定：

A	B	A+B
+	+	+
+	−	+
−	+	+
−	−	−

A	B	AB
+	+	+
+	−	−
−	+	−
−	−	−

A	$\overline{A}$
+	−
−	+

例1. 试验是掷玩耍的骰子。事件A_i($i=1,2,3,4,5,6$)是掷出i点，事件A是掷出偶数点，事件B是掷出奇数点，事件C是掷出能被3除尽的点数，事件D是掷出比3大的点数. 试用A_i（$i=1,2,3,4,5,6$）表示事件A，B，C以及D.

解. 事件A发生当且仅当A_2发生或A_4发生或A_6发生. 这表明$A=A_2+A_4+A_6$. 类似地有

$$B=A_1+A_3+A_5,\qquad C=A_3+A_6,$$

$$D=A_4+A_5+A_6.$$

例 2. 借助于确定$A+B$，AB以及$\overline{A}$的表，证明等式

$$A+\overline{B}=A+\overline{A}\,\overline{B}.$$

解. 列出表示所证等式左边与右边所有发生与不发生情况的表：

A	B	$\overline{B}$	$A+\overline{B}$
+	+	−	+
+	−	+	+
−	+	−	−
−	−	+	+

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A}\,\overline{B}$	$A+\overline{A}\,\overline{B}$
+	+	−	−	−	+
+	−	−	+	−	+
−	+	+	−	−	−
−	−	+	+	+	+

上列两表的最后一栏相同，这表明等式$A+\overline{B}=A+\overline{A}\,\overline{B}$成立。

例 3. 根据事件A，B，C的发生与不发生，借助于表来列举事件$A\overline{B}+C$所有发生与不发生的情况.

解. 列出下面的表：

A	B	C	$\overline{B}$	$A\overline{B}$	$A\overline{B}+C$
+	+	+	−	−	+
+	+	−	−	−	−
+	−	+	+	+	+
−	+	+	−	−	+
+	−	−	+	+	+
−	+	−	−	−	−
−	−	+	+	−	+
−	−	−	+	−	−

例4．设A，B，C是表示点分别投在区域A，B，C内的事件（图1）．试问事件AB＋C表示什么？

解．事件AB＋C表示点投在区域$(A\cap B)\cup C$内，在图2中这区域画上了阴影。

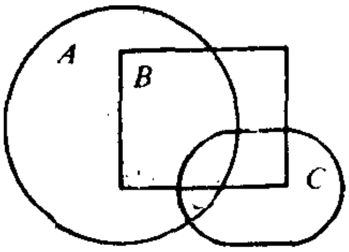

图 1

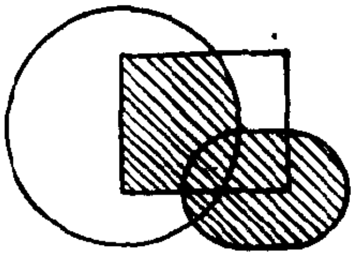

图 2

习　　题

1．试验是射手对着靶子射击三次，事件A_i是第i次射击中靶（i＝1，2，3）．用A_1，A_2，A_3表示下列事件：

A——至少一次射中；

B——三次都没有射中；

C——三次都射中；

D——至少一次没有射中；

E——射中不少于两次；

F——射中不多于一次；

G——第一次射击后才中靶。

2．试验是掷三枚硬币．设硬币编上了号并且事件Γ_1，Γ_2，Γ_3分别表示第一，二，三枚硬币掷出国徽．用Γ_1，Γ_2，Γ_3表示下列事件：

A——掷出一个国徽与两个金额；

B——掷出不多于一个国徽；

C——掷出的国徽个数小于掷出的金额个数；

D——掷出至少两个国徽；

E——第一枚硬币掷出国徽，而其余是金额；

F——第一枚硬币掷出金额并且其余的至少有一枚掷出国徽.

3. 设A，B，C是任意事件，下列事件表示什么：$\overline{A}BC$，$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$，$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$，$A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C$，$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C+\overline{A}B\overline{C}+A\overline{B}\,\overline{C}$.

4. 根据下列事件所包含的事件A，B，C发生或不发生，列举它们所有发生与不发生的情况：

a） $A\overline{B}+C$；　　b） $\overline{AB}+\overline{C}$；

c） $A+BC$；　　d） $(A+B)C$；

e） $A(\overline{B}+C)$.

5. 列举下列等式（事件的运算性质）左边与右边事件的所有发生与不发生情况，来证明这些等式：

1） $A+A=A$，$AA=A$；

2） $A+B=B+A$，$AB=BA$；

3） $A+V=A$，$AV=V$，$A+U=U$，$AU=A$；

4） $(A+B)+C=A+(B+C)$，$(AB)C=A(BC)$，

5） $(A+B)C=AC+BC$，$A+BC$
$=(A+B)(A+C)$；

6） $\overline{B+A}=\overline{A}\,\overline{B}$，$\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$，$A+\overline{A}=U$，$A\overline{A}=V$.

6. 应用运算性质（参看第5题）证明下列等式：

a） $A+B=AB$；　　b） $AB=A+B$；

c） $A\overline{B}+\overline{A}B=(A+B)\overline{AB}$；

d） $A\overline{B}+B\overline{C}+\overline{A}C+ABC=A+B+C$；

e） $A\cdot\overline{AB}+B=A+B$.

7．证明下列事件的必然性：

a） $(A+B)(\bar{A}+B)+(A+B)(\bar{A}+\bar{B})$；

b） $(A+B)(\bar{A}+B)+(A+\bar{B})(\bar{A}+\bar{B})$.

8．化简下列表示式：

a） $(A+B)(A+\bar{B})$；

b） $(A+B)(A+\bar{B})(\bar{A}+B)$.

9．证明下列等式：

a） $\overline{A+B+C}=\bar{A}\bar{B}\bar{C}$； b） $\overline{ABC}=\bar{A}+\bar{B}+\bar{C}$.

10. 用数学归纳法证明：

a） $\overline{A_1+A_2+\cdots+A_n}=\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_n$；

b） $\overline{A_1A_2\cdots A_n}=\bar{A}_1+\bar{A}_2+\cdots+\bar{A}_n$.

11. 试确定下列哪些命题为真：

a） $ABC\subset AB+AC+BC$； b） $A\bar{B}C\subset A+B$；

c） $AB+AC+BC\subset A+B+C$；

d） $(A+B)\bar{C}=A+B\bar{C}$.

12. 证明下列命题：

a） $B\subset A\Rightarrow A\bar{B}+B=A$；

b） $AB=V\Rightarrow(A+B)\bar{B}=A$；

c） $A\subset B\Rightarrow AC\subset BC$；

d） $BC=V\Rightarrow\bar{B}\bar{C}+C=\bar{B}$；

e） $A\bar{B}+\bar{A}B=\bar{C}D+C\bar{D}\Rightarrow\bar{A}C+A\bar{C}$

$$=B\bar{D}+\bar{B}D；$$

f） $(\overline{A+B})C=\bar{A}C+\bar{B}C\Rightarrow AC=BC$；

g） $A\bar{B}+\bar{A}B\subset C\Rightarrow A\subset B\bar{C}+\bar{B}C$.

13. 仪表由 2 个 Ⅰ 类部件与 3 个 Ⅱ 类部件 组 成. 事 件 $A_k(k=1,2)$ 是修理第 k 个 Ⅰ 类部件,事件 $B_i(i=1,$

2，3）是修理第 i 个Ⅱ类部件．如果修理了至少一个Ⅰ类部件与不少于两个Ⅱ类部件，这仪表就能使用．试用 A_k 与 B_i 来表示仪表能使用的事件 C．

14．船舶有1个操舵设备、4个锅炉与2个轮机．事件 A 表示修理操舵设备，$B_k(k=1,2,3,4)$ 表示修理第 k 锅炉，$C_i(i=1,2)$ 表示修理第 i 个轮机．事件 D 表示船舶能驾驶，这只有当修理了操舵设备、至少一个锅炉以及至少一个轮机才可以．试用 A，B_k，C_i 表示 D 与 $\overline{D}$．

15．如图3所示那样接好电路．事件 $A_k(k=1,2)$ 表示元件 a_k 在电路中失效，事件 $B_i(i=1,2)$ 表示元件 b_i 在电路中失效．如果事件 C 表示断路，试写出 C 与 $\overline{C}$．

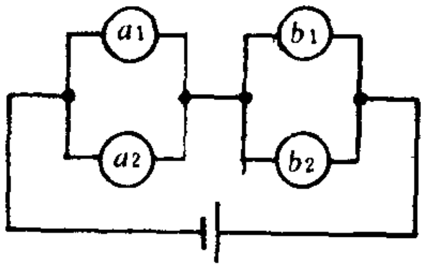

图 3

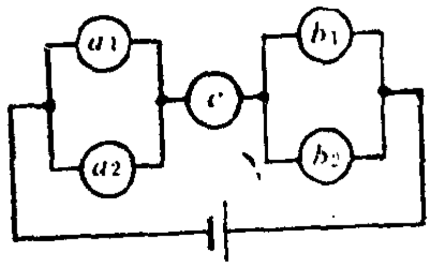

图 4

16．如图4所示那样接好电路．事件 $A_k(k=1,2)$ 表示元件 a_k 在电路中失效，事件 C 表示元件 c 失效，事件 $B_i(i=1,2)$ 表示元件 b_i 失效．如果事件 D 表示断路，试写出 D 与 $\overline{D}$．

17．如图5所示那样接好电路．事件 A 表示元件 a 在电路中失效，事件 $B_k(k=1,2)$ 表示元件 b_k 失效，事件 C 表示元件 c 失效．如果事件 D 表示断路，试写出 D 与 $\overline{D}$．

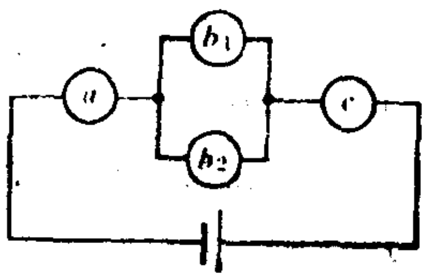

图 5

18. 对4个同类对象组成的群进行观察，它们中的每一个在观察时间内可能被发现或者没被发现. 考虑下列事件：

A——恰好发现4个对象中的1个；

B——发现至少1个对象；

C——发现不少于2个对象；

D——恰好发现2个对象；

E——恰好发现3个对象；

F——发现全部4个对象.

试指出下列事件是什么：

1）$A+B$；2）AB；3）$B+C$；4）BC；5）$D+E+F$；6）BF.

事件BF与CF重合吗？BC与D重合吗？

19. 试验是在矩形中掷点. 事件A，B，C分别表示点落到区域A，B，C中（图6）. 下列事件表示什么：

a）$A+B+C$；

b）ABC；

c）$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$；

d）$\overline{A}+\overline{B}+C$；

e）$A+B+\overline{C}$；

f）$AB+\overline{C}$；

g）$AB\overline{C}$；

h）$A\overline{B}+C$.

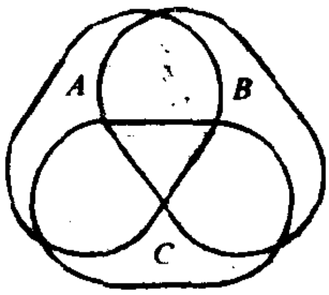

图 6

（题意要求在每种情况下描出图6，并把相应的区域画上阴影.）

§2．随机事件的频率与概率的统计定义

设A是对于某一试验的随机事件．假定这试验进行了N次，其中有N_A次事件A发生了，那么比

$$\mu=\frac{N_A}{N}$$

称为事件A在给定试验序列中的**频率**．

定义．在长的试验序列中，随机事件A的频率围绕着某个数P(A)摆动，那么P(A)就称为随机事件A的**概率**．

例1．观察表明，在1000个新生儿中有515个男孩．于是，男孩在这一观察序列中的出生频率等于0.515．

例2．法国的自然科学家蒲丰（十八世纪）把硬币掷了4040次，其中有2048次掷出国徽．因此，在给定试验序列中掷出国徽的频率等于

$$\mu=\frac{2048}{4040}=0.50693\cdots.$$

例3．英国数学家皮尔逊（1857—1936）把硬币掷了24000次，其中掷出国徽12012次。因此，在给定试验序列中掷出国徽的频率等于

$$\mu=\frac{12012}{24000}=0.5005.$$

例2与例3证实了这样的自然假定：当掷硬币一次时掷出国徽的概率等于0.5．

习　题

20．技术检查部门从一批1000件产品中发现5件废品．试求生产废品的频率．

21．为了查明种子的质量，取出1000粒种子并在实验室条件下播种，有980粒正常发芽．试求种子正常发芽的频率．

22．利用素数表求出素数在下面部分自然数列中出现的频率：1～100，101～200，201—300，…，901～1000．

23．在教学参考书《概率论》〔6〕第10页的正文中试求字母“O”出现的频率．

24．把玩耍的骰子掷60次，求6点出现的频率．

25．在俄文报刊的任一文章中，求出由6个字母组成的单词的频率．

26．在俄文报刊的任一文章中，求出名词的频率．

27．在书面文章中，把单词之间的间隔看作一个“字母”．试在俄文报刊的任一文章中求出间隔的频率．

28．在一张大纸上画上一些彼此相矩6厘米的平行线，把这张纸铺在水面平上，并在纸上任意地扔一根长4厘米的针200次．在给定的试验序列中求出针与任一条直线相交的频率．

29．通过询问大学三年级全体学生，确定生日在一年每个月中的频率．

30．使用Н．А．Некрасоb 的诗“祖国”（Родина）来建立俄文字母表中字母的频率表．

31．使用随机数表中前5列与前10行的随机数，来求数0，1，2，…，9的频率分布．

32．两人轮流掷硬币，谁先掷出国徽就获胜．把这游戏