

物理大地测量学

W.A.海斯卡涅 H.莫里兹 著

测绘出版社

P22

HWA

物理大地测量学

W. A. 海斯卡涅 H. 莫里兹 著

卢福康 译
胡国理

TVV34/13



测绘出版社

500421

本书前五章阐述了地球重力场的基本理论。六至八章分别论述了本世纪六十年代这一学科的新的理论概念和这方面的实施及成就。第九章介绍了天体和人造卫星在大地测量领域的应用。

本书是基础性理论著作，文字和公式阐述系统扼要，为从事人造卫星大地测量和重力测量必备的参考书，本书可供测绘科技人员、地球物理专业人员和有关院校专业师生参考。

Weikko A Heiskanen & Helmut Moritz

Physical Geodesy

W. H. Freeman and company, 1967.

物 理 大 地 测 量 学

W.A.海斯卡涅 H.莫里斯 著

卢福康 胡国理 译

测 绘 出 版 社 出 版

河北省三河县中赵甫印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

开本 787×1092 1/16·印张16⁵/₈·字数405000

1979年9月第一版·1984年11月第二次印刷

印数5,001-7,500册·定价2.85元

统一书号：15039·新104

前 言

从根本上说，几乎每一种大地测量工作都有赖于地球重力场。因此研究重力场的物理特性及其在大地测量上的应用这一物理大地测量主题，便构成了大地测量专业教育的基本部分。

自海斯卡涅和范宁·梅尼兹合著的《地球及其重力场》问世以来，已有十年。这十年中，大地测量学取得了巨大的进展。现在要在该书的新版中编入这些理论上和应用上的新的进展成果，越来越不可能了。因此，有必要再写一本范围广泛些、立论新颖的全新的教材。由于现在所能获得的资料数量大增，需要对大地测量某些方面的篇幅作严格的限制；理论方面的新发展越来越需要倚重于数学方法。本书有意偏重于理论方面。从这个意义上讲，它可以说是一本《理论物理学》。

本书对象是，具有欧美各大学大地测量系所要求的数理知识水平的毕业学生。本书首先介绍了位论基础。书中一至五章为物理大地测量学的基本内容。六至八章论述了当前正在着重研究的一系列专门的新课题。这些章节可能比其它各章更受欢迎。读者如掌握了这几章的知识，当可以开始独立从事自己的研究工作。为了完整起见，我们还增辟了天体测量方法一章，这一章的材料也可列入基础教程之内。

我们力图使本书内容完整而自成体系。尽可能作出详细的推导。但我们对问题的讨论多采取直观方法。我们认为，从文字上对原理加以论述，比严格的数学公式推导更为重要，虽然后者亦未尝忽视。

我们总的态度是保守的。我们不相信大地水准面的概念已经过时，但这并不意味着，主要和莫洛金斯基的名字相联系的最近一系列理论发展的巨大意义，可以置之不顾。对这些新的发展，我们将在第八章予以专门讨论。

为了介绍理论方面的论述，本书有意略去了诸如重力测量和天文测量所用的观测技术，以节省篇幅。

本书正文中在方括号内所注的参考文献号，可用来查找原文题目（为方便起见，译本中将各章的文献索引统一列于书末。——译者注），供进一步研究之用。

我们并不试图先验地论述问题。人名，与公式联系在一起的人名，应该主要看作是一种论述问题的方便的标识。同样，某一作者对某一问题的著述，我们只引用了最为大众所接受或出版刊行最广泛的，而不是他的最初著作。

本书中所包括的我们自己的研究成果，大部分都是在美国俄亥俄州立大学完成的。在此，我们要对W. D. 兰勃特博士为我们仔细校正部分英文手稿表示感谢。

W. A. 海斯卡涅

H. 莫里兹

目 录

第一章 位论基础	1
1—1. 引言, 引力和位	1
1—2. 固体的位	2
1—3. 质面的位	3
1—4. 双层位	4
1—5. 高斯和格林的积分式	6
1—6. 格林积分式的应用	8
1—7. 谐函数, 司托克斯理论和底律希勒原理	10
1—8. 球坐标的拉普拉斯方程式	13
1—9. 球谐函数	14
1—10. 面球谐函数	15
1—11. 勒让德函数	16
1—12. 第二类勒让德函数	19
1—13. 展开理论和正交关系	20
1—14. 完全正规球谐函数	22
1—15. 距离倒数的展开式	23
1—16. 用球谐函数解算底律希勒问题, 布阿桑积分式	24
1—17. 其他边值问题	26
1—18. 谐函数的径向导数	27
1—19. 椭球坐标的拉普拉斯方程式	29
1—20. 椭球谐函数	30
第二章 地球重力场	34
2—1. 重力	34
2—2. 水准面和铅垂线	35
2—3. 水准面和铅垂线的弯曲	36
2—4. 自然座标	39
2—5. 球谐函数表达的地球位	41
2—6. 低阶谐函数	43
2—7. 椭球水准面的重力场	46
2—8. 正常重力	49
2—9. 正常位的球谐函数展开式	51
2—10. 正常重力场的级数展开式	54
2—11. 国际椭球的参数	59
2—12. 其它正常重力场和参考面	60

2—13. 异常重力场, 大地水准面起伏和垂线偏差	61
2—14. 球的趋近, 扰动位的球谐函数展开式	64
2—15. 地球外部的重力异常	66
2—16. 斯托克斯公式	68
2—17. 斯托克斯积分式, 斯托克斯函数展开为球谐函数	70
2—18. 任意参考椭球的建立	72
2—19. 关于斯托克斯公式 N 的推广	74
2—20. 地球物理常数的确定	79
2—21. 平均地球椭球	81
2—22. 垂线偏差, 范宁梅尼兹公式	83
2—23. 重力的垂直梯度, 归化到海水面的空间改正	85
2—24. 积分式的实用计算	87
第三章 重力测量方法	93
3—1. 重力的归化	93
3—2. 辅助公式	93
3—3. 布格改正	95
3—4. 均衡理论	97
3—5. 均衡改正	99
3—6. 间接影响	102
3—7. 其它重力改正	103
3—8. 球面影响	105
3—9. 实际求定大地水准面	109
第四章 海拔高程	114
4—1. 精密水准测量	114
4—2. 位基数和力高	115
4—3. 波因伽莱和珀雷的重力归算	116
4—4. 正高	118
4—5. 正常高	120
4—6. 高程系统的比较	122
4—7. 三角测量高程	123
第五章 天文、大地测量的方法	126
5—1. 导言	126
5—2. 投影到参考椭球上	127
5—3. 赫尔默特投影, 大地座标和直角座标	127
5—4. 天文观测值归化到椭球上	129
5—5. 水平角、垂直角和距离的归算	133
5—6. 天文座标的垂线弯曲改正	135
5—7. 求定大地水准面的天文、大地测量方法	137
5—8. 垂线偏差的内插, 天文重力水准	140

5—9.	座标变换和大地基准的变动	142
5—10.	地球大小的确定	146
5—11.	最适合的椭球和平均地球椭球	149
5—12.	三维大地测量	152
第六章	地球外部重力场	157
6—1.	引言	157
6—2.	正常重力的闭合公式	157
6—3.	正常重力的级数展开式	159
6—4.	确定扰动重力的直接方法	161
6—5.	确定扰动重力的表层法	164
6—6.	扰动重力的向上延续法	166
6—7.	其它考虑	167
6—8.	地球外部重力异常	170
第七章	物理大地测量中的数理统计法	174
7—1.	导言	174
7—2.	协方差函数	174
7—3.	协方差函数的球谐函数展开式	176
7—4.	司托克斯和范宁梅尼兹公式, 远距离带区的影响	179
7—5.	重力异常的内插和外插	183
7—6.	估算方法的精度, 最小二乘法估算	185
7—7.	误差传播, 球谐函数的精度	188
7—8.	从重力异常计算大地水准面起伏的精度	191
7—9.	平均重力异常值的精度	193
7—10.	高程的相关性	197
第八章	求定地球形体的现代方法	200
8—1.	导言	200
8—2.	重力归算和大地水准面	200
8—3.	莫洛金斯基问题	202
8—4.	线性积分方程	204
8—5.	格林恒等式的应用	206
8—6.	表面层的积分方程	209
8—7.	积分方程的解	211
8—8.	几何的解释	214
8—9.	垂线偏差	218
8—10.	向下延续到海水面	220
8—11.	现代理论中的重力归算	225
8—12.	从地面异常值求定大地水准面	227
8—13.	评论	228

第九章 天体测量方法	231
9—1. 孛言, 观测方法	231
9—2. 由月球观测确定地球大小	231
9—3. 地球扁率的力学影响	234
9—4. 从进动、流体静平衡求定扁率	236
9—5. 人造卫星的轨道	237
9—6. 带谐系数的求定	240
9—7. 卫星的直角坐标及其摄动	244
9—8. 圆谐函数和测站位置的求定	246
参考文献	250
人名对照表	258

第一章 位论基础

1-1 导言、引力和位

为了很好地理解以后各章的内容，本章先介绍位论的基础知识，包括球谐函数和椭球谐函数的知识。阐述时着重理论和公式的意义而避免教科书中能找到的冗长的推导，对问题的表述力求简明而不求完整严密。读者也许会觉得本章过于简略，比其它各章较难理解。但通过以后的实际应用，对本章的内容将有更明确的概念。因此，读者阅读本章时，开头可仅作一草读，以后遇有必要，再来细读。

依据牛顿引力定律，两个质量为 m_1 、 m_2 的质点相隔一段距离 l ，它们之间互相的引力为

$$F = k \frac{m_1 m_2}{l^2} \quad (1-1)$$

其方向为两点之间的连线， k 为牛顿引力常数，按海尔 (P. R. Heyl) 1930年测定，该值在 c 、 g 、 s 制中为

$$k = 66.7 \times 10^{-9} \text{厘米}^3 \text{克}^{-1} \text{秒}^{-2} \quad (1-2)$$

虽然，质点 m_1 、 m_2 的吸引完全相对称，但为了方便，以其中之一作为吸引质点，另一点为被吸引质点。简单地以被吸引的质点为单位质量，吸引质点的质量为 m ，则公式 (1-1) 简化为

$$F = k \frac{m}{l^2} \quad (1-3)$$

上式表示质量为 m 和质量为 1 的质点相距 l 所存在的力。

现在引进一个直角坐标系 xyz ，吸引质量 m 的坐标为 ξ 、 η 、 ζ ，被吸引质点 P 的坐标为 x 、 y 、 z ，引力的矢量以 \mathbf{F} 表示，它的标量为 F (图1-1)， \mathbf{F} 的分量为：

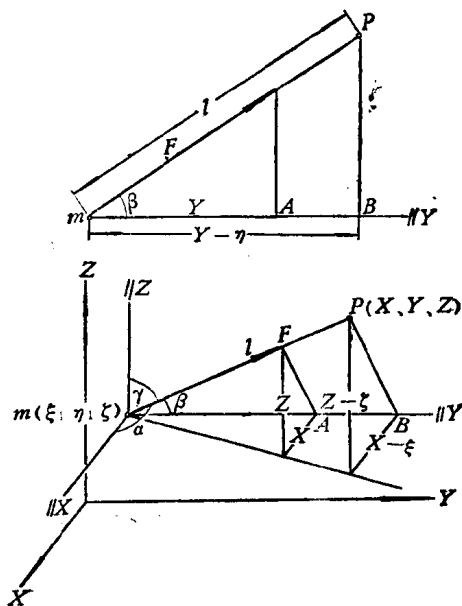


图 1-1 引力的分量，上部的图为 y 分量

$$\begin{aligned} X &= -F \cos \alpha = -\frac{km}{l^2} \frac{x-\xi}{l} = -km \frac{x-\xi}{l^3} \\ Y &= -F \cos \beta = -\frac{km}{l^2} \frac{y-\eta}{l} = -km \frac{y-\eta}{l^3} \\ Z &= -F \cos \gamma = -\frac{km}{l^2} \frac{z-\zeta}{l} = -km \frac{z-\zeta}{l^3} \end{aligned} \quad (1-4)$$

式中:
$$l = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2} \quad (1-5)$$

再引进一个纯量函数, 称为引力位

$$V = \frac{km}{l} \quad (1-6)$$

引力 \mathbf{F} 的 X, Y, Z 分量可由下式表示:

$$X = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial V}{\partial z} \quad (1-7)$$

(1-7) 式也可以从 (1-6) 式微分得到验证, 因为

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{l} \right) = -\frac{1}{l^2} \frac{\partial l}{\partial x} = -\frac{1}{l^2} \frac{x-\xi}{l} = -\frac{x-\xi}{l^3}, \quad \dots \quad (1-8)$$

(1-7) 式用矢量表示为

$$\mathbf{F} = (X, Y, Z) = \text{grad } V \quad (1-7')$$

因此, 力的矢量为函数 V 的梯度矢量。

依据 (1-7) 式, 矢量 \mathbf{F} 的三个分量, 可由一个函数 V 来代替, 这一点很重要。特别是大地测量学中考虑质点系的引力或固体的引力时, 处理位比处理三个力的分量要容易得多。甚至在这些复杂的情况下, 公式 (1-7) 仍成立。因为有 (1-6) 式的关系, 函数 V 就是各部分的和。

因此, 如有一质点系 m_1, m_2, \dots, m_n , 它们的位是各单个质量的位 (1-6) 的和, 即

$$V = \frac{km_1}{l_1} + \frac{km_2}{l_2} + \dots + \frac{km_n}{l_n} = k \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{l_i} \quad (1-9)$$

1-2 固体的位

设有一物体内部质点的分布是连续的 (图1-2), 其密度为

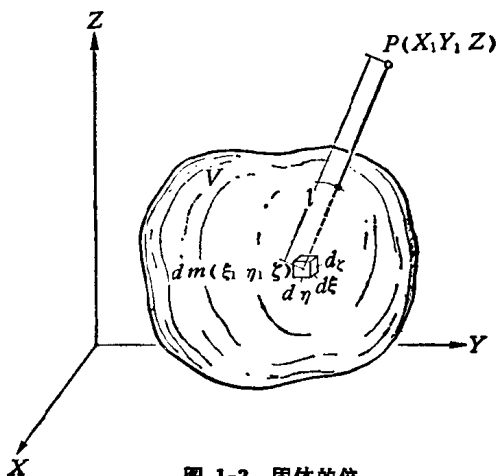


图 1-2 固体的位

$$\rho = \frac{dm}{dv} \quad (1-10)$$

dv 为体积单元, dm 为质量单元, 于是, 将 (1-9) 求和就变成积分式如下:

$$V = k \iiint_V \frac{dm}{l} = k \iiint_V \frac{\rho}{l} \cdot dv \quad (1-11)$$

上式中 l 为单元质量 $dm = \rho dv$ 到被吸点 P 的距离, 被吸点的坐标为 x, y, z , 单元质量的坐标为 ξ, η, ζ , l 由 (1-5) 式给出。因此, 明显地有

$$V(x, y, z) = k \iiint_V \frac{\rho(\xi, \eta, \zeta)}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}} d\xi d\eta d\zeta \quad (1-11')$$

单元体积 dv 为

$$dv = d\xi d\eta d\zeta$$

这是构成 (1-11) 三重积分的依据。

吸引力的分量由 (1-7) 式给出, 例如:

$$\begin{aligned} X &= \frac{\partial V}{\partial x} = k \frac{\partial}{\partial x} \iiint_V \frac{\rho(\xi, \eta, \zeta)}{l} d\xi d\eta d\zeta \\ &= k \iiint_V \rho(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{l} \right) d\xi d\eta d\zeta \end{aligned}$$

上式已改变了微分和积分的次序。将 (1-8) 式代入上式, 则有

$$X = -k \iiint_V \frac{x-\xi}{l^3} \rho dv \quad (1-12)$$

Y 和 Z 具有类似的表达式。

在整个空间的位 V 是连续的, 到无穷远时, $\frac{1}{l}$ 就消失了。从实际中可以看到, 当距离 l 非常大时, 物体可以近似地看做一个质点, 从而引力位就可近似地以 (1-6) 式表达。因此, 在天体力学中, 往往把行星当作一个质点。

V 的一阶导数, 即力的分量, 在整个空间也是连续的。但是, 二阶导数则不然。在那些质量变化不连续的点上, 二阶导数也不连续。这点很明显, 因为位 V 须适合布阿桑 (Poisson) 方程式

$$\Delta V = -4\pi k \rho \quad (1-13)$$

$$\text{式中} \quad \Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \quad (1-14)$$

符号 Δ 称为拉普拉斯算子, 它的形式为

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

从 (1-13) 和 (1-14) 式可以看出, 至少 V 的一个二阶导数必须和 ρ 一并不连续的。

吸引体的外部, 在完全真空的空间内, 密度 ρ 为零, (1-13) 式变为

$$\Delta V = 0 \quad (1-15)$$

这就是拉普拉斯方程式, 它的解为谐函数, 因此, 质体的外部引力位为谐函数。而内部则不是, 它符合布阿桑方程式。

1-3 质面的位

假设吸引的物质是一层外表面, 它是一个闭合的面 S , 厚度为零, 密度为

$$\kappa = \frac{dm}{dS}$$

式中 dS 为面积单元, 这种情况是假想的, 但在理论上非常重要。

和 (1-11) 式严格相当的位为

$$V = k \iint_S \frac{dm}{l} = k \iint_S \frac{\kappa}{l} dS \quad (1-16)$$

式中 l 为面积单元 dS 到被吸点 P 的距离 (图1-3)。

在 S 面上的位 V 是连续的, 但是, 它的导数即使是一阶导数也不连续, S 面的切向导数 (沿切面取导数) 连续, 法线方向的导数不连续, 由内部趋向 S , 和由外部趋向 S 的导数有所不同。法向导数在 S 面上的极限, 从外部趋近 S 面为

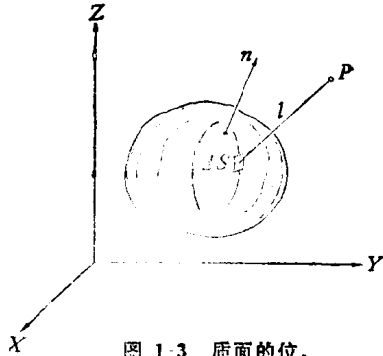


图 1-3 质面的位。

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{\text{外}} = -2\pi k\kappa + k \iint_S \kappa \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{l}\right) dS \quad (1-17 a)$$

从内部趋近 S 面为

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{\text{内}} = +2\pi k\kappa + k \iint_S \kappa \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{l}\right) dS \quad (1-17 b)$$

在本节和本书中所提到的 $\frac{\partial}{\partial n}$ 都是指外部法线 n (图1-3) 方向上的导数。

可以看出, 在 S 面上法向导数不连续,

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{\text{外}} - \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{\text{内}} = -4\pi k\kappa \quad (1-18)$$

由 (1-17 a, b) 式可以产生下列表达式, V 沿任一方向 m 的导数, 在 S 面上不连续,

$$\left(\frac{\partial V}{\partial m}\right)_{\text{外}} = -2\pi k\kappa \cos(m, n) + k \iint_S \kappa \frac{\partial}{\partial m} \left(\frac{1}{l}\right) dS \quad (1-19 a)$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial m}\right)_{\text{内}} = +2\pi k\kappa \cos(m, n) + k \iint_S \kappa \frac{\partial}{\partial m} \left(\frac{1}{l}\right) dS \quad (1-19 b)$$

式中 (m, n) 表示方向 m 和法线 n 之间的夹角。这两个公式为 (1-17 a, b) 的扩充, 同时也说明切线方向的导数是连续的。

S 面的里面和外面, 位 V 和它的所有导数都连续, 只在 S 面上不连续。除开 S 面上以外, 也都适合谐函数的拉普拉斯方程式,

$$\Delta V = 0$$

面的位在无穷远时, 也和固体的位一样, 如 $l \rightarrow \infty$, $\frac{1}{l}$ 就消失了。

为了与下节所述的双层位相区别, 本节所述的质面的位也称为单层位。

1-4 双层位

设想有两个极, 由质量相等, 符号相反 (即 $+m$ 和 $-m$) 的两个质点构成, 二质点相隔一段微小距离 h (图1-4)。在引力问题中, 这种情况完全是一种假想, 因为没有所谓负的质量, 但这概念在数学上非常有用。在磁学中, 真有两个极。正质量的位为

$$V_+ = \frac{km}{l}$$

负质量的位为

$$V_- = -\frac{km}{l_1}$$

偶极的全部位为

$$V = V_+ + V_- = km\left(\frac{1}{l} - \frac{1}{l_1}\right)$$

以 n 表示两极轴的方向, 将 $\frac{1}{l_1}$ 展开为 h 的幂级数

$$\frac{1}{l_1} = \frac{1}{l} - \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{l}\right)h + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial n^2}\left(\frac{1}{l}\right)h^2 - \dots$$

代入前式, 得

$$V = k \cdot mh \cdot \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{l}\right) - k \frac{mh^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial n^2}\left(\frac{1}{l}\right) + \dots$$

或以 $mh = M$, 则有

$$V = kM \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{l}\right) - k \frac{Mh}{2} \frac{\partial^2}{\partial n^2}\left(\frac{1}{l}\right) + \dots$$

M 称为偶极矩。现再设想 h 趋向无限小, 同时使 m 增大, 保持 $M = hm$ 不变。这样在 $h \rightarrow 0$ 时高次项就趋近于零, V 式的极限值即为

$$V = kM \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{l}\right) \quad (1-20)$$

上式为偶极的位。

在 S 面上两薄层的情况, 可以设想为两个相距微小间距 h 的单层, 面的法线 n 和两薄层相交于 P 和 P' , 它们之间非常靠近, 具有相等的面密度 κ , 不过符号相反如图 1-5。每对相应的点 P 和 P' 构成一个偶极, 其密度 (即偶极矩的密度) 为

$$\mu = \frac{dM}{dS}$$

在上述图中, $\mu = \kappa h$ (h 很小, κ 很大)。

从 (1-20) 式把所有偶极都加起来 (积分)。它在整个 S 面上分布是连续的, 可以得出

$$V = k \iint_S \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{l}\right) dM = k \iint_S \mu \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{l}\right) dS \quad (1-21)$$

上式为 S 面的双层位。

除开在 S 面上之外, 它们都是连续的, 依据从 S 面的外边或里边向面趋近, 可以得出两种不同的极限值,

$$V_{\text{外}} = 2\pi k\mu + \iint_S \mu \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{l}\right) dS \quad (1-22a)$$

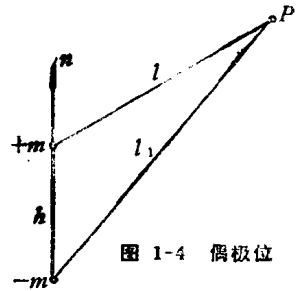


图 1-4 偶极位

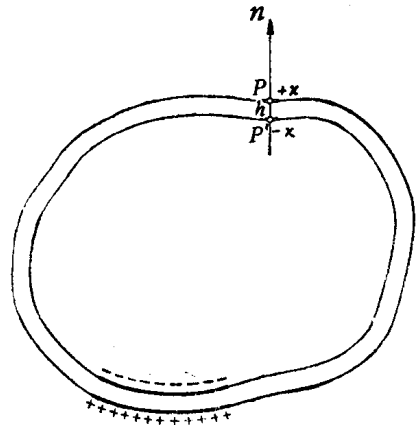


图 1-5 两个平行单层面的位的极限为双层面位。

$$V_{\text{外}} = -2\pi k\mu + \iint_S \mu \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{l} \right) dS \quad (1-22b)$$

它们的差

$$V_{\text{外}} - V_{\text{内}} = 4\pi k\mu \quad (1-23)$$

是不连续的，因为在 S 面上当我们从外部穿过 S 面到内部时， V 不连续。

(1-22 a, b) 式在表面上虽然和 (1-17 a, b) 很相似，但有根本的差别。在 (1-17 a, b) 式中， $\frac{\partial}{\partial n}$ 是对被吸点 P 在 S 面法线方向的微分，如果求极限，它将位于 S 面上。

而 (1-22 a, b) 式中的 $\frac{\partial}{\partial n}$ 是沿游动吸引点所在面元素 dS 的面法线方向的。显然，这两种法线 n 的方向都向外。

双层问题必须和单层严格区分开来，或者和表面层区分开来。其差别在于前者具有偶极性而后者仅描述质点的位。在无穷远时两者的情况有共同性（如 $\frac{1}{l}$ 等于零），而且两者在 S 面的内部或外部均为谐函数，满足拉普拉斯方程。在 S 面上它们有性质完全不同的不连续性。正是这种不连续性使设想的位在数学上很有用途，特别是和格林的理论联系起来。

1—5 高斯和格林的积分式

格林的理论和有关的积分式是位论中的基本公式，它是解决某些理论大地测量问题的有力工具。

高斯公式 我们首先研究高斯积分式

$$\iiint_v \operatorname{div} \mathbf{F} dv = \iint_S F_n dS \quad (1-24)$$

式中 v 为 S 面所包的体积， F_n 为矢量 \mathbf{F} 投影到面以外法线 n 上的分量（即 \mathbf{F} 的法线分量）， $\operatorname{div} \mathbf{F}$ 为矢量 \mathbf{F} 的散度，如 \mathbf{F} 有分量 X, Y, Z ，即

$$\mathbf{F} = (X, Y, Z)$$

则有

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \quad (1-25)$$

因为高斯公式在一般的工程数学和物理数学书中都有推导，此处无需再推证，而只需使它能直观地理解即可。

(1-24) 式无论其物理意义如何，均适用于任何矢量场。这一点尤其是在 \mathbf{F} 为一种不可压缩的流体的速度矢量的情况下，更为明显。 S 面内部可以是液体的源和沟，源则液体生成，沟则液体消失。液体源沟的强度以 $\operatorname{div} \mathbf{F}$ 计量。(1-24) 式左边的积分，为流体在单位时间的 S 面内沟源联合作用下所生成的或消失的液体量。它的右边为单位时间内通过 S 面的流量。高斯公式 (1-24) 表明了两边的量相等这一明显事实。

当 \mathbf{F} 为引力的矢量时，直观的解释不那么明确，但是，常常可用模拟液体流来加以解释。引力的分量 X, Y, Z ，可以从 (1-7) 式位的微分得出：

$$X = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial V}{\partial z}$$

因此, $\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \Delta V$

所以, 应用布阿桑公式 (1-13) 得

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = -4\pi k\rho$$

这可以说明质量是引力场的“源”, “源”的强度 $\operatorname{div} \mathbf{F}$ 和质量密度 ρ 成正比。(1-24) 式的右边部份称为“力束”, 在我们所讨论的情况中称为“引力束”, 也与液体流相似。

任何力的分量都能根据 (1-7) 式从位 V 推导出来。高斯公式可以用位 V 表达, 这时我们假定 x 轴正方向和面的向外法线一致, 则 \mathbf{F} 矢量的法线分量就是 x 分量 X , 即 $F_n = X$ 。

于是, 有 $\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial n}$. 向外法线 n 上的 V 的法向导数为

$$F_n = \frac{\partial V}{\partial n}$$

将这一关系式和 $\operatorname{div} \mathbf{F} = \Delta V$ 代入 (1-24) 式, 则

$$\iiint_v \Delta V dv = \iint_s \frac{\partial V}{\partial n} dS \quad (1-26)$$

这就是位的高斯积分公式。

在从 (1-24) 式导出 (1-26) 式时, 我们只借用了 \mathbf{F} 为函数 V 的梯度这一事实。不需要假设 V 须满足关于引力场的布阿桑方程式。于是高斯积分适合于任何一个正则可微分的函数 V 。

格林公式 格林公式是从 (1-24) 式将下列关系式代入推导出来的,

$$X = U \frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = U \frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = U \frac{\partial V}{\partial z}$$

其中 U, V 为 x, y, z 的函数, 矢量 $\mathbf{F} = (X, Y, Z)$ 的法线分量为

$$F_n = U \frac{\partial V}{\partial n}$$

为了说明这点再将 x 轴和法线重合, 应用 (1-25) 式, 则

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial z} + U \Delta V$$

因此, (1-24) 式变为

$$\iiint_v U \Delta V dv + \iiint_v \left(\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial z} \right) dv = \iint_s U \frac{dV}{dn} dS \quad (1-27)$$

上式为格林第一恒等式。

如果在这一公式中, 把 U, V 函数互换, 而且从原来的方程式减去新的方程式, 则得

$$\iiint_v (U \Delta V - V \Delta U) dv = \iint_s \left(U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n} \right) dS \quad (1-28)$$

上式为格林第二恒等式。

在这些公式中, 我们已经先假设 U, V 为连续函数, 而且在空间范围 v 内 (即 S 面所

包的内部和它的面上) 为有限的, 它的一次和二次偏导数也是连续而有限的。下列情况更为重要, 即

$$U = \frac{1}{l}$$

其中 l 是从某一固定点 P 起算的距离, 如果 P 点在 S 面以外, 则在 S 面内和 S 面上 $\frac{1}{l}$ 就是正则的, 并且 U 满足前述条件。但如果 P 在 S 面内或 S 面上, 则在 v 内的点上 $\frac{1}{l}$ 变成无限, 同时 (1-28) 式不能直接应用, 而必须加以改化。现在省掉方程式的推导, 只把结果写在下面,

$$\iiint_v \frac{1}{l} \Delta V dv = -pV + \iint_S \left[\frac{1}{l} \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{l} \right) \right] dS \quad (1-29)$$

式中,
$$p = \begin{cases} 4\pi & P \text{ 点在 } S \text{ 面内} \\ 2\pi & P \text{ 点在 } S \text{ 面上} \\ 0 & P \text{ 点在 } S \text{ 面外} \end{cases}$$

(1-29) 式是格林第三恒等式。它和第二恒等式所不同的是多一 pV 项。(1-29) 式在形式上不同的原因, 主要由于 P 点在 S 面内, 在 S 面上或者在 S 面外, $\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{l} \right)$ 项就有所不同, 它可以看成是双层位, 在 S 面上不连续。如果 P 点在 S 面外, 则 $\frac{1}{l}$ 在 v 以内是正则的, 而方程式 (1-28) 便是 (1-29) 当 $p = 0$ 时的结果; v 是 S 面的里面部分 (包括 S 本身在内), n 为 S 面的法线, 方向向外。

格林的第三恒等式 (1-29) 也可适用于 v 在 S 面的外部, 而法线 n 为 S 面的内向法线, 如果我们希望 n 为向外的法线, 须将 $\frac{\partial}{\partial n}$ 的符号反号, 得到

$$\iiint_v \frac{1}{l} \Delta V dv = -pV - \iint_S \left[\frac{1}{l} \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{l} \right) \right] dS \quad (1-29')$$

式中,
$$p = \begin{cases} 4\pi & P \text{ 在 } S \text{ 面外} \\ 2\pi & P \text{ 在 } S \text{ 面上} \\ 0 & P \text{ 在 } S \text{ 面内} \end{cases}$$

(1-29') 为 S 面外部的格林第三恒等式。它适用于函数 V , 除了满足格林恒等式的一般要求外, 还满足在无穷远处的某些情况 (如在那里 V 为零)。

1—6 格林积分式的应用

为了说明格林恒等式的意义和用途, 我们把它们应用于一些特殊情况。

1. 在第三恒等式 (1-29) 中, 我们使 $V \equiv 1$, 于是有,

$$\iint_S \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{l} \right) dS = \begin{cases} -4\pi & P \text{ 在 } S \text{ 面内} \\ -2\pi & P \text{ 在 } S \text{ 面上} \\ 0 & P \text{ 在 } S \text{ 面外} \end{cases} \quad (1-30)$$

这些由高斯提出的公式，有时很有用处。这些公式可以认为是密度为常数 $k \rho = 1$ 的双层位的理论。这种位在 S 面内为一常数，在 S 面外为零，在 S 面上具有 (1-23) 式的不连续性。

2. 在 S 面外 V 为谐函数的情况中， $\Delta V = 0$ ，如果 P 点也在 S 面外 ($\phi = 4\pi$)，则由第三恒等式 (1-29') 得：

$$V = -\frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{1}{l} \frac{\partial V}{\partial n} dS + \frac{1}{4\pi} \iint_S V \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{l} \right) dS \quad (1-31)$$

(1-31) 式说明，每个谐函数可以表示为密度为

$$\kappa = -\frac{1}{4\pi k} \frac{\partial V}{\partial n}$$

的面位 (1-16) 及密度为 $\rho = \frac{V}{(4\pi k)}$ 的双层位 (1-21) 的和。

3. 在 S 面外 V 仍为谐函数。

我们进一步假设 S 为等位面， $V = V_0 = \text{常数}$ 。当 P 点在 S 外时，从 (1-31) 式得

$$V = -\frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{1}{l} \frac{\partial V}{\partial n} dS + \frac{V_0}{4\pi} \iint_S \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{l} \right) dS$$

依据 (1-30) 式，第二个积分项为零，因此

$$V = -\frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{1}{l} \frac{\partial V}{\partial n} dS \quad (1-32)$$

(1-32) 式由查斯莱士 (Chasles) 提出，说明每个谐函数可以被表达为任何等位面 $V = \text{常数}$ 的单层位。假使 V 是一个 S 面内的固体的引力位，则我们可以说任何固体都能用它的一个外部等位面 S 的一个适当的面层来代替，而不会改变 S 面外的位 (图1-6)。

我们再列举两个物理大地测量学中重要的实际例子。

4. 在第二恒等式 (1-28) 中，使 $U = 1$ ，则得高斯公式 (1-26)：

$$\iiint_v \Delta V dv = \iint_S \frac{\partial V}{\partial n} dS$$

将此公式应用于重力位 W (引力加离心力，参阅式2-1)，得

$$\iiint_v \Delta W dv = \iint_S \frac{\partial W}{\partial n} dS$$

W 函数适合于下一章的 (2-6) 式，即

$$\Delta W = -4\pi k \rho + 2\omega^2$$

它和布阿桑方程式 (1-13) 很相似， ω 为地球自转角速度。

设 v 为地球体积， S 为实际的地球表面，由此可以看出

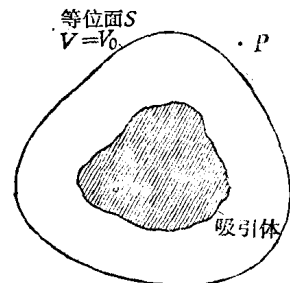


图 1-6 查斯莱士理论。在 S 面外任何一点 P 处，密度为 $\kappa = -(4\pi k)^{-1} \frac{\partial V}{\partial n}$ 的面层的位和吸引固体的位完全一样