姚 晶 编著

三角函数

苏步青题

三 角 函 数

姚 晶 编著

百家出版社

(沪)新登字 120 号

三角函数
姚晶 编著
百家出版社出版
(上海绍兴路5号)
新华书店上海发行所发行 商务印书馆上海印刷厂印刷
开本 787×1092 1/32 印张 7.25 字数 167000
1992年2月第1版 1992年2月第1次印刷
印数: 1--5000册
ISBN 7-80576-235-X/G·122 定价: 3.95元

前　言

三角函数又称圆函数，它反映了圆运动和直线运动的相互转化与对应关系，是初等函数中唯一的周期函数．现实世界中这种关系普遍存在，因而三角函数是函数中应用最为广泛的一种．它的表达形式已经成了自然科学与应用技术中不可缺少的一种符号，三角变换成了数学和科学技术中经常用到的一种工具．使学生深刻理解、牢固掌握三角函数的概念、性质和应用，摆脱对大量三角公式的机械记忆，是数学教学改革的重要内容之一．

我从事这项工作的思考和研究已经40余年了，过去由于行政事务繁杂，只能从事教学改革试验的尝试，无法从事系统的研究．我曾编过一本《三角函数》，由上海教育出版社于1980年4月出版，已重印了3次，十余万册，给了中学数学教师和中学生以一定的帮助．

1980年以来，我继续从事三角函数教学体系改革的探索与试验，并自1986年起先后出了三套油印本作为教材，供教学改革试验之用．在此基础上编写了本书．本书力求体现以下几点改革精神：

1．把单位圆上的动点在圆周上运动所形成的圆位移与它在一条直径上的正投影（或它在一条切线上关于圆心的中心投影）所形成的有向线段在实数集合上的对应关系作为三角函数（圆函数）的定义．以此为出发点，在单位圆上观察三角函数的性质和诱导公式．

2．利用单位圆的一条直径或切线所对应的单位半圆表达三角函数单调区间上的反函数的对应关系，通过它观察掌握反三角函数的性质，并以此作为反三角函数运算的辅助工具．

3．分别以直角三角形三边中的一边作为单位长构造直角三角形．通过它运用锐角三角函数的定义、勾股定理、相似三角形对应边成比例等掌握同角三角函数间的关系并为以后学习三角置换打下基础．

4．把二角和、差的正、余弦展开式的导出与公式记忆统一起来．通过三角形的面积关系，直接从图上显示出已知角为锐角时的二角和、差正弦或余弦的展开式，然后运用前面学过的诱导公式证明其普遍适用性．

5．精简公式．取消和、差化积与积化和、差这两组公式，把它们分别作为二角和、差的正、余弦展开式的联用和间接逆用，让学生掌握变换方法．对于已知某角的某一三角函数求其半角的三角函数时则以解关于三角函数的二次方程组或方程取代半角公式．

6．解三角方程时先把给出的三角方程在一个周期内的全部可能出现的解与有关三角函数的不允许值都表达在单位圆上，然后把重复的解合并，解中的不允许值剔除，为写出通解创造条件．

7．充分运用单位圆解简易三角不等式，再运用它把解集所在的区间集合在一个周期内表达出来．把解三角不等式作为工具，运用在需要去根号的解三角方程和三角函数有关性质的研究上．

8．力求使每章中各个单元重点突出有利于自学者达到主要要求：如第一章中，“锐角三角函数”这一单元突出同角三角函数间的关系；“小于周角的非负角三角函数”这一单元突出不同

象限角的三角函数的符号和角的终边在坐标轴上时某些三角函数不存在；第二章中，“二角和、差的三角函数”这一单元突出二角和或差的正、余弦展开式的导出和反复运用，又力求让读者在全书的学习过程中不断加深对概念、性质的理解与掌握.

综上所述，学习三角函数的方法可以归结为以下十六个字，即“函数为纲，形数相依，脑中有图，变换靠式”.

本书主要供中学生课外阅读，也可供中学数学教师教学和业务进修时参考。

由于本书的教学体系与传统的三角函数教学体系迥异，是一个新的尝试，很难一次到位，我自己的认识也是在不断的发展和加深过程中．因此本书必然存在不少缺点和问题，希望读者及时指出以便进一步修改.

本书在编写过程中，苏步青教授一直关心、支持，并题写了书名．本书蒙复兴中学邵文宝、张富根、王吉林等同志帮助校阅，上海市城市建设工程学校从人力物力上给予帮助，王甫祥、金安蓉、杭国成、吴圣伟、喻栋仁等同志参加试教，陈梅芬、周滔同志誊写，欧建群、解小青同志绘图．本书初稿曾蒙徐为之同志阅看并提出宝贵意见，特别是周玉刚同志对本书进行了修改和编辑加工，特此一并致谢.

姚　晶

1989年6月18日

目　　录

第一章　三 角 函 数

一、角的度量单位

1.1.1　引言

如图 1.1 所示，C、D 和 B、E 分别在 $\angle A$ 的两边上，$CB \perp AB$，$ED \perp AD$，则 $\mathrm{Rt}\triangle ABC \backsim \mathrm{Rt}\triangle ADE$，相应地，$\dfrac{BC}{DE}=\dfrac{AC}{AE}$，

$\therefore \dfrac{BC}{AC}=\dfrac{DE}{AE}$.

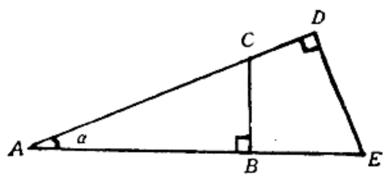

图 1.1

这里 AC 和 AE 分别是 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle ADE$ 的斜边，BC 和 DE 分别是这两个直角三角形中公共角 $\angle A$ 的对边．如果用 α 表示 $\angle A$ 的大小，则 $\sin\alpha=\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{DE}{AE}$．它说明：在任意直角三角形中，一个锐角的对边与斜边的比值是一个确定值，它随此锐角大小的变化而变化．此锐角在 $0°\sim 90°$ 之间变动，此比值在集合 $\{R^+ | R^+ < 1\}$ 内随之变动．

思　考　题

1．$\sin\alpha$ 与 α 的上述关系是否反映了函数关系？它与我们已学过的几种函数是否有区别？区别在哪里？

2．直角三角形中，对应于锐角的边长的比有几种？是否都反映了函数关

系？试加以描述和表达.

1.1.2 角的度量单位

我们已经知道，把一个周角 360 等份，其中每一份叫做一度的角，或者说 1° 是角的度量单位. 通过学习物理，我们知道度量单位之间是有联系的，例如，面积和体积的度量单位就分别是长度单位的平方和立方. 那么，角的度量单位和长度单位是否也有联系呢？周角是一个整圆周所对应的圆心角，它的大小对应于圆的周长与半径这两个长度的比，是一个实数 2π. 1° 是与圆周的 $\frac{1}{360}$ 的弧长及此弧的半径这两个长度的比相对应的，也是一个实数 $\frac{\pi}{180}$.

如果我们把所对弧长等于圆的半径的圆心角作为单位来量角，那么对于任意一个角只需以角的顶点为圆心，任意半径画一个圆，分别度量此角所对的弧长和半径的长，这两个长度的比岂不就是这个角的大小？我们称这样量出的角的大小为若干弧度，其单位—弧度显然就是比值 1(图 1.2).

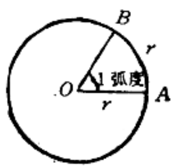

图 1.2

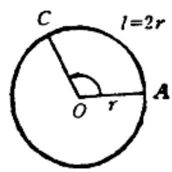

图 1.3

如图 1.3 所示，$\angle AOC$ 所对的 $\overset{\frown}{AC}$ 的长 $l=2r$，那么 $\angle AOC$ 的弧度数就是 $\frac{l}{r}=\frac{2r}{r}=2$(弧度).

如果圆心角所对的弧长 $l=4\pi r$，那么这个圆心角的弧度数

就是 $\frac{l}{r}=\frac{4\pi r}{r}=4\pi$（弧度）.

为了区别上述两种用不同单位度量角的方法我们称前者为"角度制"，后者为"弧度制"．弧度制的单位"弧度"通常不写.

前面 1.1.1 中提到锐角三角函数的函数值是两个边长的比也就是长度的比，是实数，其单位是比值 1．如果用弧度制度量角，则函数的自变量的单位也是比值 1．这种一致性对于研究函数的性质是很有利的，因而在三角函数的研究中，常用的自变量单位是弧度.

1.1.3 角的弧度制与角度制的互化

我们知道，半径为 R 的圆的周长为 $2\pi R$，因此一个周角（360°）的弧度数就是

$$\frac{2\pi R}{R}=2\pi,$$

由此可以得到某些特殊角的相应的弧度数，如下表所示：

度	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
弧度	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

现在我们来说明度与弧度互相换算的一般方法.

由于　　$180°=\pi$ 弧度，

所以　　$1°=\frac{\pi}{180}$ 弧度 ≈ 0.017453 弧度；

$$1\text{ 弧度}=\left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}\approx 57°17'44.8''\approx 57°18'.$$

利用上面关系式，可以进行角度与弧度的换算.

例 1　用弧度制表示下列角：

(1) $22°30'$;　　　　　　(2) $324°22'32''$.

解　(1) $22°30'=\frac{\pi}{180}\times 22.5=\frac{\pi}{8}$；

(2) $324°22'32''=324.38°\approx\frac{3.14}{180}\times 324.38\approx 5.66$.

例 2　用角度制表示下列各角:

(1) 0.5;　　　　　　(2) $\frac{2\pi}{5}$.

解　(1) 0.5 弧度$=\frac{180°}{\pi}\times 0.5\approx 28°38'52''$;

(2) $\frac{2\pi}{5}$ 弧度$=\frac{180°}{\pi}\times\frac{2\pi}{5}=72°$.

角度数与弧度数换算，还可以利用《中学数学用表》里《度、分、秒化弧度表》、《弧度化度、分、秒表》求得近似的结果，也可以从电子计算器中直接求出.

例 3　求如图 1.4 所示的公路弯道部分 $\overset{\frown}{AB}$ 的半径(精确到 0.1 米，图中单位：米).

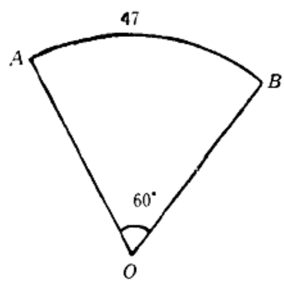

图　1.4

解　$\because\quad \alpha=\frac{l}{R}$, $\therefore\quad R=\frac{l}{\alpha}$.

$\because\quad 60°=\frac{\pi}{3}$,

$$\therefore\quad R=\frac{47}{\frac{\pi}{3}}\approx\frac{47\times 3}{3.14}\approx 45(\text{米}).$$

答：弯道部分的半径为 45 米.

练　　习

1. 用弧度制表示:

(1) $36°$;　　(2) $15°24'$;

(3) $112°14'$;　　(4) $5°7'$;

(5) $97°1'$.

2. 用角度制表示:

(1) $\frac{\pi}{16}$;　　(2) $\frac{5\pi}{48}$;

(3) $\frac{4\pi}{25}$;　　(4) $\frac{63\pi}{80}$;

(5) $\frac{\pi}{7}$.

3. 在半径为 120mm 的圆上,求长为 144 mm 的弧所对的圆心角的度数.

4. 试证明大小为 α(弧度)的角在半径为 R 的圆上所截劣弧形成的扇形面积为 $\frac{1}{2}\alpha R^2$.

5. 试按从小到大排列 1, 2, 3, 50°, 60°, 80°, 90°, 170°, 180°.

思　考　题

1. 弧度制和角度制在本质上的相同点是什么? 主要区别在哪里?

2. 用弧度制量角与度、分、秒制量角相比较有哪些优点和不足?

二、锐角三角函数及其反函数

1.2.1　锐角三角函数的定义和性质

若自一锐角 α 的任一边上任意一点向另一边作垂线, 则必构成一直角三角形, 显然这样的直角三角形可有无数个, 由于角 α 是确定的, 所以它们都是相似三角形. 在直角三角形斜边、锐角的对边和邻边中, 任意两者之比必随着锐角的变化而变化. 这里的六个比值和这锐角的量度都是实数. 这些比值与锐角的量度之间的对应关系称为**锐角三角函数**(又称圆函数). 它们分别称为此锐角$\left[\alpha\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right]$的正弦 ($\sin\alpha$), 余弦 ($\cos\alpha$), 正切

($\operatorname{tg}\alpha$)，余切($\operatorname{ctg}\alpha$)，正割($\sec\alpha$)，余割($\csc\alpha$).

如果我们以 AB 为直径作 $\odot O$，且令 AB 为角 α_1 与 α_2 的公共边，$0<\alpha_1<\alpha_2<\frac{\pi}{2}$，$\alpha_1$ 与 α_2 的另一边分别为 AC_1 与 AC_2 (图 1.5).

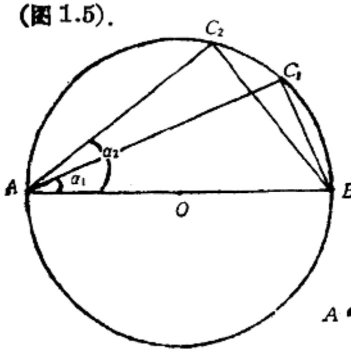

图 1.5

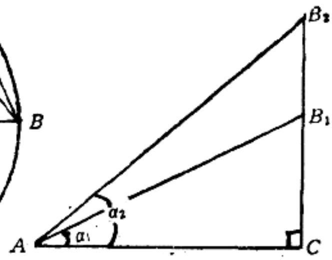

图 1.6

在 $\odot O$ 内，$\because \alpha_1<\alpha_2$，$\therefore \overset{\frown}{BC_1}<\overset{\frown}{BC_2}$，相应地 $BC_1<BC_2$，从而 $\frac{BC_1}{AB}<\frac{BC_2}{AB}$，$\therefore \sin\alpha_1<\sin\alpha_2$.

如果我们作角 α_1 与 α_2 的公共边 AC 的垂线，使其分别交 α_1 与 α_2 的另一边于 B_1、B_2(图 1.6).

$$\because \quad 0<\alpha_1<\alpha_2<\frac{\pi}{2}, \quad \therefore \quad CB_1<CB_2,$$

从而
$$\frac{CB_1}{AC}<\frac{CB_2}{AC}, \quad \therefore \quad \operatorname{tg}\alpha_1<\operatorname{tg}\alpha_2.$$

以上证明了锐角的正弦和正切都是增函数，不难证明余弦、余切是减函数. 从锐角三角函数的定义中，可以发现余割、正割、余切分别是正弦、余弦、正切的倒数，可以从这里确定它们的增减性.

我们已经学过 30°、45°、60° 的正弦、余弦、正切、余切. 现在可以运用下面三个直角三角形的几何性质找出 $\frac{\pi}{6}$、$\frac{\pi}{4}$、$\frac{\pi}{3}$ 的六个三角函数(图 1.7)

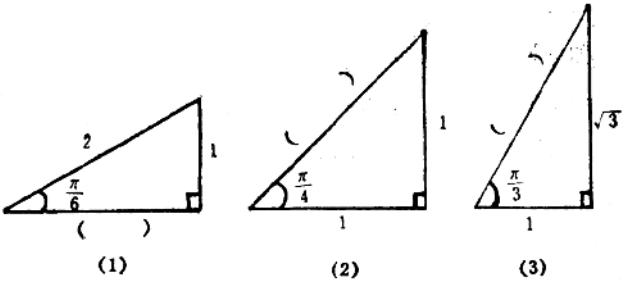

图 1.7

思考与练习

1. 试写出各锐角三角函数的定义.
2. 写出它们的定义域和值域.
3. 试利用图 1.5 比较 $0<\alpha_1<\alpha_2<\frac{\pi}{2}$ 时, $\cos\alpha_1$ 与 $\cos\alpha_2$ 的大小.
4. 试研究并指出各锐角三角函数的有界性和增减性.
5. 下面是利用三角函数表中的表尾差间接求三角函数值的两个例子. 试说明区别在哪里? 为什么?

   (1) 求 $\sin 36°50'$.

   解: $\sin 36°48' \approx 0.5990$
   表尾差 $+2' + \cdots 5$
   $\therefore \quad \sin 36°50' \approx 0.5995$

   (2) 求 $\cos 47°40'$.

   解: $\cos 47°42' \approx 0.6730$
   表尾差 $-2' + \cdots 4$
   $\therefore \quad \cos 47°40' \approx 0.6734$

6. 用第 5 题中同样的道理和格式求:

   (1) $\operatorname{tg} 73°38'$;　(2) $\operatorname{ctg} 65°22'$;

   (3) $\sin 52°40'$;　(4) $\cos 67°50'$.

7. 试在图1.7中先在(　)中填上数，然后求出$\frac{\pi}{6}$、$\frac{\pi}{4}$、$\frac{\pi}{3}$的各三角函数？你能找到最好的记忆方法吗？

1.2.2 锐角三角函数的反函数

如图1.8所示，在Rt△ACB与Rt△DFE中，由于$\sin A=\sin D$，则$\frac{CB}{AB}=\frac{EF}{DF}$，$\therefore \frac{CB}{EF}=\frac{AB}{DF}$. 又$\angle C=\angle E=$Rt∠，$\therefore$ Rt△$ACB\backsim$Rt△DEF，$\therefore \angle A=\angle D$. 由此可见当$\alpha\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$，$\sin\alpha$为定值时，$\alpha$必为定角. 我们又知道六种锐角三角函数都是单调函数，对应于函数值的变动，锐角也相应地变动.

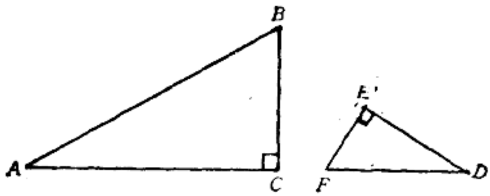

图 1.8

容易看出，锐角所在的集合$\left\{\alpha\middle|\alpha\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)\right\}$中每一个元素到它的函数集合中都有不同的像，而它的函数集合中的每一个元素在$\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$中都能找到原像. 它们之间的对应关系是一一对应，那末锐角三角函数的逆对应就构成了它的反函数，称为反三角函数，即：反正弦($\arcsin x$)、反余弦($\arccos x$)、反正切($\operatorname{arc\,tg} x$)、反余切($\operatorname{arc\,ctg} x$)、反正割($\operatorname{arc\,sec} x$)、反余割($\operatorname{arc\,csc} x$). 它们分别表示对应于某一个比值的角的大小. 例

如，由图 1.9，利用勾股定理，可得

$$\alpha=\operatorname{arc}\sin x=\operatorname{arc}\cos\sqrt{1-x^2}=\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\operatorname{arc}\operatorname{ctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}=\operatorname{arc}\sec\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\operatorname{arc}\csc\frac{1}{x},$$

$$\beta=\operatorname{arc}\operatorname{tg}x=\operatorname{arc}\sec\sqrt{1+x^2}=\operatorname{arc}\csc\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}.$$

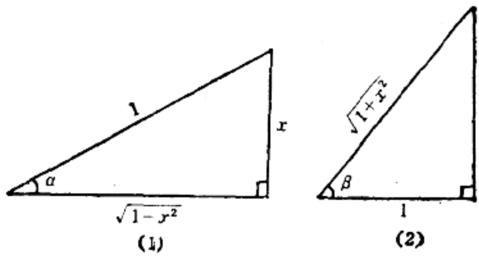

图 1.9

又如：当 $\sin 3x=\cos 2x$，且 $3x\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$，$2x\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$时，

由图 1.10 可知，若令 $\sin 3x=a$，则 $\cos 2x=a$，

必有 $3x+2x=\frac{\pi}{2}$，$\therefore x=\frac{\pi}{10}$.

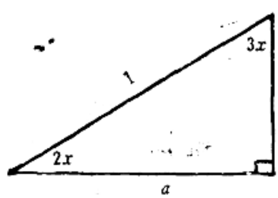

图 1.10

练习（以下各题中，α、β、γ 都表示锐角）

1. 试利用几何性质证明(1) $\cos\alpha$; (2) $\operatorname{tg}\alpha$ 为定值时，α 也为定值.
2. 试从一一对应关系说明(1) $x=\cos\alpha$; (2) $x=\operatorname{tg}\alpha$ 的反函数存在.
3. 试各画出直角三角形，且令(1) $\operatorname{ctg}\alpha=x$; (2) $\sec\beta=x$; (3) $\cos\gamma=x$. 然后用各种不同的反三角函数形式表示 α、β、γ.
4. 下面是利用三角函数表中的表尾差求对应于某一三角函数值的角的近似值的两个例子，试加以比较，并说明之.

(1) 求 $\operatorname{arc\,tg}3$.

解：$\operatorname{arc\,tg}3.006\approx71°36'$
$\quad -6$ 表尾差 $-2'$
$\operatorname{arc\,tg}3.000\approx71°34'$

(2) 求 $\operatorname{arc\,ctg}2$.

解：$\operatorname{arc\,ctg}1.997\approx26°36'$
$\quad +3$ 表尾差 $-2'$
$\operatorname{arc\,ctg}2.000\approx26°34'$

5. 求下列各题的近似值：

(1) $\arcsin 0.2$; (2) $\arccos 0.7$;

(3) $\arcsin\dfrac{2}{3}$; (4) $\arccos\dfrac{1}{3}$.

6. 解下列各题$\left(5x,\ 4x,\ 3x-\dfrac{\pi}{4},\ 4x-\dfrac{1}{6}\right.$ 都是锐角$\left.\right)$:

(1) $\operatorname{tg}5x=\operatorname{ctg}4x$; (2) $\cos\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin\left(4x-\dfrac{\pi}{6}\right)$.

1.2.3 同角三角函数的基本关系式和直角三角形

在直角三角形中已知一个内角是锐角 α，如果令斜边等于单位长1，那么根据锐角三角函数的定义，其余两边之长便分别是 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$[图 1.11(1)]. 同理，如果令角 α 的邻边或对边等于单位长1，则其它两边之长也分别是角 α 的不同三角函数[图 1.11(2)和(3)].

运用图 1.11 可以找到同角三角函数间的关系.

a. 根据锐角三角函数的定义就可得到某两个三角函数之比等于第三个三角函数. 如由图 1.11(1)、(2)可得