研究生教材

模糊数学引论

张文修 王国俊 刘旺金 方锦暄 著

西安交通大学出版社

研究生教材

模糊数学引论

张文修　王国俊
刘旺金　方锦暄　著

西安交通大学出版社

内容简介

本书以模系为体系，着重介绍了模糊集分解定理、表现定理、扩张原理、模糊关系等模糊数学基础内容，同时叙述了模糊测度与模糊拓扑、模糊代数与模糊拓扑线性空间、F集值测度与随机集等专题内容。最后一章是模糊数学应用举例。

本书适合作为数学系的学生以及计算机科学、管理科学、信息与系统科学等方面的研究生的教科书，也适合作为从事模糊数学研究的科技人员的参考书。

模糊数学引论

张文修 王国俊 刘旺金 方锦暄 著

责任编辑 王延华

*

西安交通大学出版社出版

（邮政编码：710049）

西安交通大学出版社印刷厂印装

陕西省新华书店经售

*

开本 850×1168 1/32 印张 13.25 字数：332千字

1991年6月第1版 1991年6月第1次印刷

印数：1－3000

ISBN7-5605-0378-0/O·67 定价：4.30元

研究生教材总序

研究生教育是为国家培养高层次人才的，它是我国高等教育的最高层次。研究生必须在本门学科中掌握坚实的基础理论和系统的专门知识，具有从事科学研究或担负专门技术工作的能力。这些要求具体体现在研究生的学位课程和学位论文中。

认真建设好研究生学位课程是搞好研究生教学的重要环节。为此，我们组织出版这套以公共课和一批新型学位课程为主的研究生教材，以满足当前研究生教学的需要。这套教材的作者都是多年从事教学、科研、具有丰富经验的教师。

这套教材首先着眼于研究生未来工作和高技术发展的需要，充分反映国内外最新学术动态，使研究生学习之后能迅速接近当前科技发展的前沿，以适应“四化”建设的要求；其次，也注意到应有的基本理论和基本内容，以保持学位课程内容的相对稳定性和系统性，并具有足够的深广度。

这套研究生教材虽然从提出选题、拟定大纲、织组编写到编辑出版，都经过了认真的调查论证和细致的工作，但毕竟是第一次出版这样高层次的系列教计，水平和经验都感不足，缺点和错误在所难免。希望通过反复的教学实践，广泛听取校内外专家学者和使用者的意见，使其不断改进和完善。

西安交通大学研究生院

西安交通大学出版社

序

模糊数学是一门崭新的数学学科。它始于1965年美国自动控制论教授L.A. Zadeh 的开创性论文“模糊集合”。(Fuzzy Sets,Information and Control).它的产生不仅拓广了经典数学的数学基础，而且是使计算机科学向人们的自然机理方面发展的重大突破。

数学的概念反映了人们对于客观现象量的特征的认识。在整个数学发展的漫长岁月中，人们作为概念思考的是所思考对象的本质属性，即概念的内涵。直到19世纪初期 Boole,G.等人采用概念的外延解释，即概念是被它的本质属性所确定的对象的总和，才能明确揭示出数学概念和推理过程中的普遍规律。特别是Cantor的集合论，提供了数学研究的普遍工具。每一个数学概念都反映了具有特殊性质的对象的集合，每一个判断都反映了集合之间的某种关系，每一步数学推理都反映了集合之间的某种运算。因此，集合论在经典数学中有着特别重要的地位。

但是,Cantor关于集合的概念,基于形式逻辑的三大定律：同一律、矛盾律和排中律。也就是说,我们研究的对象,要么属于某个集合，要么不属于某个集合，二者必居其一。这种情况是对客观研究对象提取特征的结果，但是就客观现象而言，大多数情况并不具有这种清晰性，也即研究的集合并没有一个明确的边界。有些现象，过于简单的提取特征，就会歪曲客观实际本身的规律。因此，我们必须扩充经典集合，以适应更加复杂的现象，模糊集合正是在这方面的尝试。

然而，模糊集合产生与系统科学的发展有着更加密切的关系。在多变量、非线性、时变的大系统中，复杂性与精确性形成了尖锐的矛盾。正如L.A. Zadeh所指出的，当系统日益复杂，

人们对它的精密而有意义的描述的能力将相应地降低，以至达到精密性与有意义成为两个几乎互相排斥的特征的地步。因此，要想确切地描述复杂现象和系统的任何现实的物理状态，事实上是办不到的，为了对整个问题的描述有意义，我们必须在准确与简明之间取得平衡。模糊集合的提出，正是为了用比较简单的方法，对复杂系统做出合乎实际的处理。因此，模糊集合在自动控制、系统分析、知识描述、语言加工、图象识别、信息复制、医学诊断、经济管理等不确定性决策方面，有着明显的实际效果，为计算机科学的发展提供了强有力的工具。

模糊数学只有20多年的历史，但已为国内外数学界以及信息、系统、计算机科学人员普遍重视。显然，它并不是已经完备的学科，而是一门发展中的学科。它在现代科学技术的应用中产生，也将在现代科学技术的发展中发展。

本书实际上是《模糊数学基础》一书的增订版。《模糊数学基础》由西安交通大学出版社1984年出版后，受到同仁厚爱，广泛使用作为教材。考虑到近几年来模糊数学的发展，特别为了反映我国模糊数学的研究工作，新的书稿比原著增加了四章。其中第八章模糊拓扑线性空间由南京师范大学方锦暄副教授撰写，第十章F群由四川师范学院刘旺金教授撰写，陕西师范大学王国俊教授重写了第七章F拓扑空间与拓扑分子格。由于他们在各自领域内出色的研究工作，使本书内容更加充实。为了反映国内外模糊集值测度与随机集的研究动态，由我撰写了第九章模糊集值测度与随机集。为了更好地理解本书内容，在前七章里增加了一些具体例子，并由我增补了第十一章模糊数学应用举例。

本书仍然按照《模糊数学基础》一书的宗旨，用模系结构作为统一的工具，叙述模糊数学的基本内容，并采用一套封闭的术语和符号系统，以便陈述简洁，利于阅读。

本书比《模糊数学基础》内容更加充实和完善，这完全是由

于同仁们研究的深入。随着模糊数学研究的发展，我们将期望模糊数学的理论更加完善。这是一项长期而艰巨的工作，也是一件有重要意义的工作。由于国内外一批有名望有成就的女士与先生的支持，也是一件完全有希望的工作。

本书在写作过程中，始终得到四川大学刘应明教授、西安交通大学游兆永教授、北京师范大学汪培庄教授等的鼓励与支持，借此机会，表示谢意。

张 文 修

1989.10.1

目　　录

第一章 F集合与分解定理

§1.1 经典集合与特征函数

首先介绍经典集合的基本概念及其运算。为了方便起见，我们把所考虑的对象限制在一个特殊的集合，比如全体实数、平面上所有的点等。称这个特殊的集合为**基本集合**或**论域**，以X记之。X中的一部分称为X中的**子集**，常以A、B、C、……记之。称X中的对象为**元素**，以x记之。如果x**属于**A，记作$x\in A$。若x**不属于**A，记作$x\notin A$。以ϕ表示**空集**，X表示**全集**。

任给定一性质P，$P(x)$表示"x具有性质P"，则

$$A=\{x; P(x)\}$$

表示X中具有性质P的全体元素构成的子集。以"$\forall x, P(x)$"表示对所有x均有性质P，"$\exists x, P(x)$"表示存在x具有性质P。

设A、B是X中的两个子集。若$x\in A$时必有$x\in B$，称A**含于**B，或B**包含**A，记作$A\subset B$。显然，包含关系具有以下性质：

(1) $A\subset A$ （自反性）

(2) 若$A\subset B$，$B\subset A$，则$A=B$ （对称性）

(3) 若$A\subset B$，$B\subset C$，则$A\subset C$ （传递性）

设X是论域，记

$$\mathscr{P}(X)=\{A;\quad A\subset X\}$$

称$\mathscr{P}(X)$为X的**幂集**，约定ϕ、$X\in\mathscr{P}(X)$。如果X中有n个元素，则$\mathscr{P}(X)$中有2^n个元素。

设 A，$B\in\mathscr{P}(X)$，记

$$A\cup B=\{x;\quad x\in A \text{ 或 } x\in B\}$$
$$A\cap B=\{x;\quad x\in A \text{ 且 } x\in B\}$$
$$A^c=\{x;\quad x\in X \text{ 且 } x\notin A\}$$

$A\cup B$ 与 $A\cap B$ 分别称为 A 与 B 的**并集**与**交集**， A^c 称为 A 的**补集**。显然，$(\mathscr{P}(X),\cup,\cap,c)$具有以下性质：

(1) $A\cup B$、$A\cap B$、$A^c\in\mathscr{P}(X)$ （封闭性）

(2) $A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$ （交换律）

(3) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$ （结合律）

(4) $A\cup\phi=A$, $A\cap X=A$ （单位元存在性）

(5) $A\cup A^c=X$, $A\cap A^c=\phi$ （互补律）

直接利用集合的并、交、补运算性质(1)-(5)，可以证明集合运算的以下性质也是成立的：

(6) $A\cup(A\cap B)=A$, $A\cap(A\cup B)=A$ （吸收律）

(7) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ （分配律）

(8) $A\cup A=A$, $A\cap A=A$ （幂等律）

(9) $A\cup X=X$, $A\cap\phi=\phi$ （两级律）

(10) $(A^c)^c=A$ （对合律）

(11) $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$, $(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$ （对偶律）

如果 $B_t\in\mathscr{P}(X)$ ($t\in T$, T是一个指标集)，(7)和(11)有下面更一般的形式：

(7′) $A\cup(\bigcap\limits_{t\in T}B_t)=\bigcap\limits_{t\in T}(A\cup B_t)$,

$A\cap(\bigcup\limits_{t\in T}B_t)=\bigcup\limits_{t\in T}(A\cap B_t)$

(11′) $(\bigcup\limits_{t\in T}B_t)^c=\bigcap\limits_{t\in T}B_t^c$,

$(\bigcap\limits_{t\in T}B_t)^c=\bigcup\limits_{t\in T}B_t^c$

其中

$$\bigcup_{t\in T} B_t=\{x;\quad \exists t\in T, x\in B_t\},$$

$$\bigcup_{t\in T} B_t=\{x;\ \forall t\in T,\ x\in B_t\}$$

从上面的性质，易知在任何集合运算的公式中，将$\bigcup$与$\bigcap$互换，公式仍然成立。这就是集论中的对偶原则。

记号

$$f: X\to Y$$

表示X到Y的**映射**，即对于任给$x\in X$，有$y=f(x)\in Y$与之对应。X称为f的**定义域**，而

$$f(X)=\{y;\quad \exists x\in X, y=f(x)\}$$

称为f的**值域**。

定义 1.1.1 设f是X到Y的映射。若$f(X)=Y$，称f为X到Y上的**满射**。对于$x_1, x_2\in X$，当$x_1\neq x_2$时有$f(x_1)\neq f(x_2)$，称f为**单射**。若f既是单射，又是满射，称f为**单满射**。若X和Y之间存在单满射f，称X和Y**等同**，记作$X\cong Y$。

定理 1.1.1 f是X到Y的单满射的充要条件为，存在Y到X的映射g，使

$$f(g(y))=y,$$

$$g(f(x))=x$$

g称为f的**逆映射**，记作$g=f^{-1}$。

证明 设f是X到Y的单满射。令

$$g(y)=x,$$

当$f(x)=y$时，由于f是单满射，$g(y)$是唯一确定的，从而

$$g(f(x))=x$$

由于$f(X)=Y$，对于任意$y\in Y$，存在$x\in X$使$f(x)=y$。于是

$$g(y)=g(f(x))=x$$

从而

$$f(g(y))=f(x)=y$$

即证必要性。现证充分性。由于

$$Y=f(g(Y))\subset f(X)\subset Y$$

从而$f(X)=Y$。又当 $x_1\neq x_2$ 时，必有 $f(x_1)\neq f(x_2)$。若不然，则

$$x_1=g(f(x_1))=g(f(x_2))=x_2$$

矛盾。于是 f 是X到Y的单满射。

设 $A\in\mathscr{P}(X)$，称

$$A(x)=\begin{cases}1, & x\in A\\ 0, & x\notin A\end{cases} \tag{1.1.1}$$

为A的**特征函数**。记

$$\mathscr{F}_0(X)=\{A(\cdot);\quad A(\cdot):X\to\{0,1\}\}.$$

定理 1.1.2 $\mathscr{P}(X)\cong\mathscr{F}_0(X)$。

证明 设 $f:\mathscr{P}(X)\to\mathscr{F}_0(X)$，即 $f(A)=A(\cdot)$由(1.1.1)确定。令

$$g(A(\cdot))=\{x;A(x)=1\}$$

则

$$g(f(A))=\{x;A(x)=1\}=A,$$

$$f(g(A(\cdot)))=f(\{x;A(x)=1\})=A(\cdot)$$

由定理 1.1.1 即证。

在 $\mathscr{F}_0(X)$中引进运算如下：

$$A(\cdot)\vee B(\cdot)=\max(A(\cdot),B(\cdot)) \tag{1.1.2}$$

$$A(\cdot)\wedge B(\cdot)=\min(A(\cdot),B(\cdot)) \tag{1.1.3}$$

$$A'(\cdot)=1-A(\cdot) \tag{1.1.4}$$

易证：

定理 1.1.3 $(\mathscr{P}(X),\cup,\cap,c)\cong(\mathscr{F}_0(X),\vee,\wedge,')$

即：

$$\mathscr{P}(X)\cong\mathscr{F}_0(X)$$

$$(A \cup B)(\cdot) = A(\cdot) \vee B(\cdot) \tag{1.1.5}$$

$$(A \cap B)(\cdot) = A(\cdot) \wedge B(\cdot) \tag{1.1.6}$$

$$A^c(\cdot) = A'(\cdot) \tag{1.1.7}$$

证明 由定理1.1.2 即证$\mathscr{P}(X) \cong \mathscr{F}_0(X)$。又因为$(A \cup B)(x)=0$的充要条件为$x \notin (A \cup B)$，即$x \notin A$且$x \notin B$，于是$A(x)=0$且$B(x)=0$. 从而$(A \cup B)(x)=0$的充要条件为$A(x) \vee B(x)=0$，则证(1.1.5)。类似可证(1.1.6)与(1.1.7)。

根据定理1.1.3，可视$\mathscr{P}(X)$与$\mathscr{F}_0(X)$是相同的，$\mathscr{P}(X)$是直观的图式模型，$\mathscr{F}_0(X)$是作为函数空间的数学模型.用$\mathscr{F}_0(X)$不如$\mathscr{P}(X)$直观，但可进行更一般的讨论，它可以直接引出下面F集合的概念。

§1.2 F集合的定义与运算

设X是普通集合。

定义 1.2.1 映射 $\underset{\sim}{A}$： $X \to [0,1]$，称为**模糊集合**（Fuzzy Set），简称为F集。$\underset{\sim}{A}(x)$ 称为 x 相对于F集 $\underset{\sim}{A}$ 的**隶属程度**。$\underset{\sim}{A}(\cdot)$称为F集合 $\underset{\sim}{A}$ 的**隶属函数**。

显然，F集合是经典集合的一般化，经典集合是F集合的特殊情形.

如果A为X中的经典集合，$A(x)$是A的特征函数，则$A(\cdot)$即是A的隶属函数。若$A(x)=1$，则x完全属于集合A，即$x \in A$. 若$A(x)=0$，则x完全不属于集合A，即$x \notin A$。在经典集合中，或者$x \in A$，或者$x \notin A$，是完全确定的。但是，若$\underset{\sim}{A}$是F集合，$\underset{\sim}{A}(x)$只是表示x属于F集合$\underset{\sim}{A}$的程度。如$\underset{\sim}{A}(x_1)=0.8$，$\underset{\sim}{A}(x_2)=0.6$，只能说$x_1$比$x_2$相对地更属于F集合$\underset{\sim}{A}$。

F集合有各种不同的表达方式。一般情形可表示为

$$\underset{\sim}{A} = \{(x, \underset{\sim}{A}(x))；x \in X\} \tag{1.2.1}$$

如果X是有限集或可数集，可表示为

$$\underset{\sim}{A}=\sum \underset{\sim}{A}(x_i)/x_i \tag{1.2.2}$$

如果X是无限不可数集，可表示为

$$\underset{\sim}{A}=\int \underset{\sim}{A}(x)/x \tag{1.2.3}$$

例 1.2.1 设$X=[0,100]$表示年龄的某个集合，$\underset{\sim}{A}$ 和 $\underset{\sim}{B}$ 分别表示"年老"和"年轻"．它的隶属函数分别为(见图1.2.1和图1.2.2)：

$$\underset{\sim}{A}(x)=\begin{cases} 0, & 0\leqslant x\leqslant 50 \\ \left[1+\left(\dfrac{x-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1}, & 50< x\leqslant 100 \end{cases} \tag{1.2.4}$$

$$\underset{\sim}{B}(x)=\begin{cases} 1, & 0\leqslant x\leqslant 25 \\ \left[1+\left(\dfrac{x-25}{5}\right)^{2}\right]^{-1}, & 25< x\leqslant 100 \end{cases} \tag{1.2.5}$$

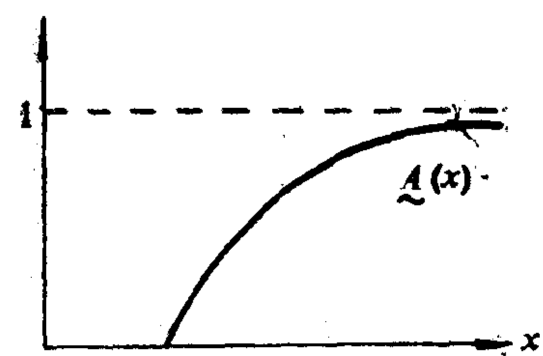

图 1.2.1

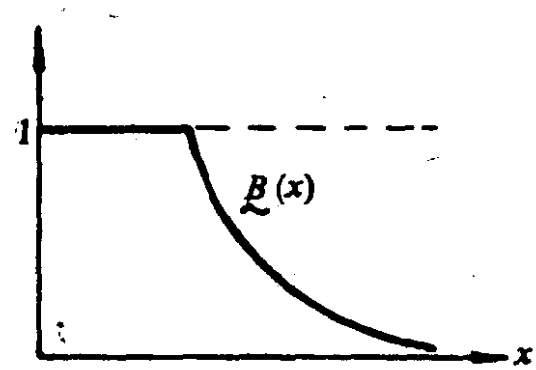

图 1.2.2