高等学校教材

水文统计

河海大学 王俊德 编

高等学校教材

水文统计

河海大学 王俊德 编

水利电力出版社

（京）新登字115号

内 容 提 要

本书密切结合水文实际，系统地介绍了水文学中常用的概率统计理论和方法。书中结合水文统计的发展过程详细叙述了现行水文统计的基本方法和原理，同时扼要介绍了若干有代表性的新观点、新概念，使读者能了解水文统计的历史、现状和发展方向。全书叙述清楚，循序渐进，便于教学和自学。

本书由概率论、水文常用数理统计方法、随机过程和时间序列分析三部分组成，每章都配有相应的习题。

本书可用作高等学校水文、水利专业本科的教材，也可供水文、水利、地理、气象、海洋等专业的科技人员参考。

高等学校教材
水 文 统 计
河海大学 王俊德 编
*
水利电力出版社出版
（北京三里河路6号）
新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售
水利电力出版社印刷厂印刷
*
787×1092毫米 16开本 20.5印张 461千字
1993年6月第一版 1993年6月北京第一次印刷
印数0001—2690册
ISBN 7-120-01739-X/TV·623
定价 5.25元

前　　言

本书是根据高等学校水利水电类专业教学委员会水文教学组1988年下半年举行的教材会议精神编写的，主要作为高等院校水文专业本科《水文统计》课程的教材，也可供水文、水利及相关专业科技人员参考。

全书共10章，由概率论基础、水文常用数理统计方法、随机过程和时间序列分析三部分组成，每章都配有相应的习题。

本书承陕西机械学院沈晋教授审稿，河海大学丛树铮教授对编写大纲提出了许多宝贵意见，陈元芳讲师提供了许多资料，谨此致以诚挚的谢意。

编者在编写过程中曾参考过国内许多学者的论文或著作，在此谨向有关作者表示感谢。

由于水平有限，书中缺点或错误在所难免，请读者批评指正。

编　者

1992年4月于河海大学

目　　录

绪 论

第一节 随机现象与统计规律

自然界和人类社会中发生的各种现象虽然千差万别，但归纳起来，不外两种类型。一类现象，当一定条件实现时，人们可以准确地预言它们是否会发生。例如，无外力作用时，物体不会改变它的运动状态；在标准大气压下，把水加热到100℃时，水必然沸腾等等。这种在一定条件下必然会发生或必然不发生的现象称为确定性现象。确定性现象与其形成条件之间的因果联系比较固定，可以用确定的物理定律来描述，数学分析及线性代数等则是研究这种规律的数学工具。另一类现象，当一定条件实现时，它们可能发生，也可能不发生。例如，天空有云时，可能下雨，也可能不下雨；相同的雨量所形成的径流往往不同，有时多些，有时少些；上抛一枚硬币，可能出现图面，也可能出现字面等等。这类现象有一个共同的特点，即在基本条件相同的情况下，可能出现各种不同的结果，而到底出现哪种结果，在观察或实验之前是不能预先确定的。我们称这类现象为随机现象或偶然现象。随机现象之所以具有不确定性，是由于它们在形成过程中除受基本的、起主导作用的因素的制约外，还受许多次要的、瞬息变化的偶然因素的影响。例如，用同一根皮尺多次测量一段距离，由于拉力大小不一，风速、气温、光线及读数上的微小差异等等，各次测量的结果会存在微小差异。

随机现象的个别观察或试验结果虽然是无规律的，但正如恩格斯所指出的："在表面上是偶然性在起作用的地方，这种偶然性始终是受内部隐蔽着的规律支配的，而问题只是在于发现这些规律"（恩格斯：《路德维希·费尔巴哈和德国古典哲学的终结》，人民出版社，1959年，第34页）。人们的实践经验证明，对一种随机现象进行了大量的观察研究之后，总能揭示出某种完全确定的规律。例如，在一个盛满水的容器里，水的每个分子都在不停地运动着，每个分子的轨道和速度都是随机的。物理学告诉我们，水对器壁的压力是各分子对器壁的冲击汇合而成的，尽管每个分子的冲击都是不规则的，但从宏观来看，器壁各点所受的水压力却是稳定的，可以用水力学定律来描述；又如，对一个固定的靶子进行射击，虽然每一颗子弹的命中点都是随机的，但如果射击次数很多，靶上命中点的分布就会呈现出完全确定的规律，即命中点的数目差不多对称于靶心，越靠近靶心，命中点越密，越远离靶心，命中点越稀。射击次数越多，这种规律越明显。

随机现象的这种特殊规律称为统计规律，这是大量同质随机现象的集体规律。它和现象的个别观察或试验结果的特性几乎没有关系。对随机现象数量规律的研究，形成了一门新的数学分支，这就是概率论与数理统计学。概率统计方法虽然不能预言随机现象的个别观察或试验结果，但能预言大量试验的平均结果。采用概率统计方法，可以避免由于过多因素的制约而使个别现象的处理过于复杂（有时甚至是不可能的），转而直接研究大量观

察的结果。这种方法不仅能对随机现象的特性作出科学的预测，还有助于揭示各种现象间的因果联系。

应当指出，随机现象和确定性现象之间，必然性和偶然性之间，并没有不可逾越的鸿沟。事实上，宇宙中的任何现象无不带有某种程度的随机成分。任何确定性现象，在其形成与发展过程中也决不会不受随机因素的干扰，因而不可避免地会带有或多或少的随机偏差。在许多实际问题中，只是为了处理的方便，才忽略掉那些造成随机偏差的次要因素，只考虑起主导作用的基本因素。例如，在降雨径流预报中，常忽略雨量空间分布的不均匀性，而采用流域平均雨量。但是，这种做法是以牺牲精度为代价的，如果要求精度较高，就必须将一些随机性的次要因素也考虑进去，这就必须采用概率统计方法了。

第二节　水文统计法的产生与发展

水文现象和其它一切自然现象一样，在它的发生、发展过程中，既有确定性的一面，也有随机性的一面。由于天文和宏观地理地质因素比较稳定，各条河流的水文情势都具有以年为周期的循环性和明显的季节性。这就是水文现象的确定性。然而，在水文现象的发展过程中，还不时受到许多次要因素的影响，例如大气环流的变化、降水的时空分布、蒸发、植被及土地利用的状况等等。这些因素不仅种类繁多，而且组合也复杂多变，从而使水文现象在其稳定的年、季变化背景上不断发生各种随机偏差。这就是水文现象的随机性。

由于水文现象具有显著的随机性，因此，概率统计方法在水文学的各个方面都得到日益广泛的应用。如在水文测验中，站网的规划，测验规范的制订，测验误差的分析等；在水文预报中，某些预报方案的制订，预报误差的分析和评定等；在水文水利计算中，各种水利系统的规划设计及运行管理等，都要使用概率统计方法。通常，我们把水文学中的概率统计方法称为水文统计法。

水文学中应用概率统计方法，固然是水文现象本身的特性所决定的，但其直接原因还是生产实践的需要。早期的水利工程设计，大都以历史上出现过的大洪水或者在这种洪水上再加上一个安全系数为依据，但是，这样做有许多问题，特别是历史上的大洪水与实测资料或调查年限的长短有关，如果资料年限不长，这样做就很不安全。另外，这种方法也不能回答在未来工程运行期间发生各种大小洪水的可能性，而这个问题恰恰是人们最关心的。概率统计方法正是解决这类问题的有力工具。

水文学中应用概率统计方法大约始于1880～1890年，最初大都应用纯经验的历时曲线（即目前称谓的经验频率曲线）。后来郝顿（Horton）[28]在1896年的径流研究中，首先采用了概率方法，但当时主要采用正态分布。其后海森（Hazen）[29][30][31]对正态分布的实用性进行了许多研究，注意到了实际资料的非对称性问题，并首先采用了对数正态分布。随着水文研究的发展，概率统计方法被运用得愈来愈多，许多非对称分布，如对数正态分布、皮尔逊III型分布、耿贝尔分布、对数皮尔逊III型分布等都得到了广泛的应用，特别在分布参数的估计方面提出了许多方法，大大推动了水文统计方法的发展。

本世纪60年代以后，美国阿波罗计划中采用的系统分析方法被应用到工程学的所有领域，水文统计学也不例外。特别是在美国1962年发表的哈佛水利计划中，系统分析方法被用于水资源工程的规划设计，这对以后的水资源工程学和水文学的发展有很大的影响，并逐渐形成一门主要应用概率统计方法的随机水文学。概率统计方法在水文学中的应用历史，可以用周文德所绘的图0-1表示。

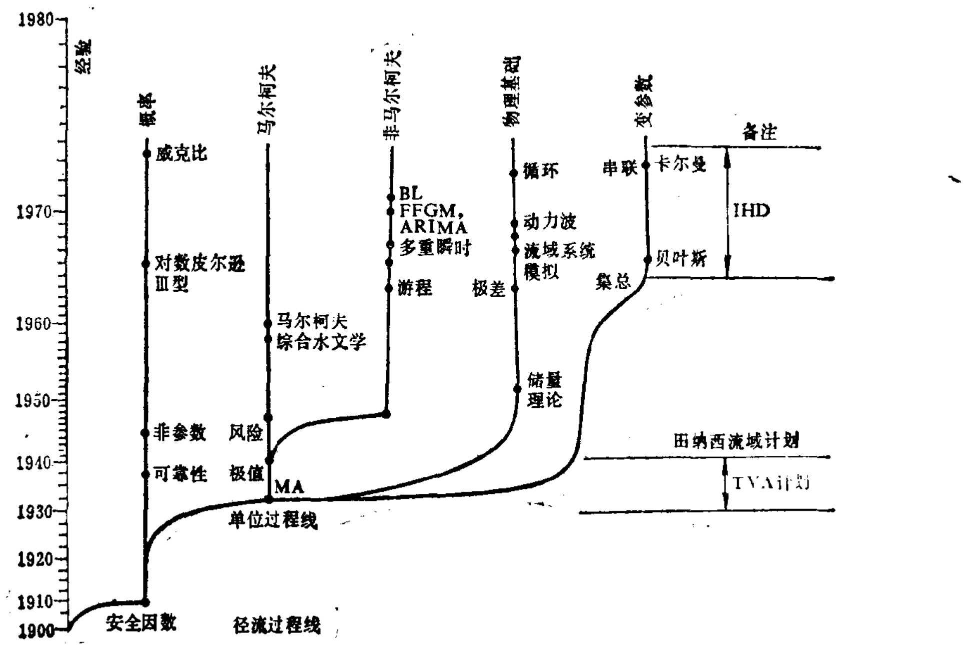

图 0-1 随机水文学的发展历史

我国学者应用水文统计法大约始于30年代，那时周镇伦[1]和陈椿庭[2]曾用概率统计方法分别研究过年降水量和洪水流量。但在旧中国，由于不关心水利建设事业，加之水文资料十分贫乏，对于水文统计的理论和方法，几乎没有什么研究。

新中国建立后，为了满足蓬勃发展的水利建设事业的需要，我国水文工作者广泛地学习和运用水文统计理论和方法，有效地解决了许多水文分析计算问题。从50年代初至60年代前期，对水文统计的研究十分活跃，此间不仅翻译出版了国外许多水文计算文献和书籍，还发表了大量结合我国水文实际的研究论文和报告。例如，1957年北京水利科学院水文研究所的《暴雨及洪水频率计算方法的研究（初稿）》[3]；1958年水利出版社的《水文计算经验汇编》[4]等。这些论文和报告大大丰富和发展了水文统计理论和方法。1959年5月出版的金光炎的专著《水文统计原理与方法》[5]，比较详细地阐述了水文分析中常用的概率论与数理统计基本概念和理论，并广泛地介绍了当时国内外关于水文统计法的研究成就。该书对在我国水文科技人员中普及和提高水文统计知识曾起过积极作用，至今仍是一本较好的参考书。进入70年代以来，随着国际学术交流的增多和计算机的普遍应用，我国水文统计的研究也得到了更大的发展，不仅在水文频率计算方面又取得了一些新成就，而且还对回归分析、随机过程、时间序列分析等在水文学中的应用展开了研究。1981

年6月华东水利学院主编的《水文学的概率统计基础》[6]一书，详细介绍了随机模拟技术及其在水文学中的应用，对我国随机水文学的研究起了积极的推动作用。

最后应当指出的是，虽然概率统计方法在水文学中得到了广泛的应用，而且已取得了很大的成功，但在任何自然现象中，起主导作用的仍然是必然性规律，随机性只是起着从属的作用。因此，在研究水文现象时，必须把概率统计方法和物理成因分析方法密切结合起来，只有这样才能更深入地研究水文现象的客观规律和正确运用水文统计的分析成果。事实上，人们很早就已经开始研究有物理依据的随机水文学了，近年来已经出现了地貌特征瞬时单位线这样的成功例子。

第三节　本课程在水文专业教学中的地位

水文统计是水文专业的一门技术基础课，一方面，它要为水文测验、水文预报、水文水利计算等专业课程提供必要的概率统计基础知识；另一方面，它的理论和方法也是水文研究和实践的有力工具。然而，尽管水文统计法已有近一个世纪的历史，但至今并未形成自己的独特体系，其大多数内容和方法仍属于概率论与数理统计的具体应用，因此，本书的重点是结合水文现象的实际，介绍概率论与数理统计的基本概念和原理。只有比较清楚地掌握了这些内容，才能在水文研究和实践中正确、灵活和创造性地应用它们。不过，本书又不同于一般的概率论与数理统计学教材。它的取材立足于水文工作的实践需要，在适当注意数学理论系统性的基础上，强调理论和方法的应用，为了不使读者陷入深奥的数学迷雾而迷失方向，本书不过分强调数学的严密性，对于比较抽象的概念和理论，以及繁琐的数学推导和证明，一般从略，或只给予粗略和直观的说明，以便读者始终把注意力放在对基本原理的理解和运用上。

与本课程关系最密切的专业课要算水文水利计算了。事实上，目前水文水利计算的主要方法仍然是数理统计法，因此，有些内容要严格区分究竟属于哪门课程是十分困难的。为了做到理论联系实际，本书不得不涉及某些水文计算方法，特别是水文频率计算部分。不过我们将侧重于它们的统计学理论方面，而把方法的水文学论证留给有关的专业课程。

本书分三部分，第一至第四章为概率论，是全书的理论基础；第五至第八章为水文常用数理统计方法；第九、第十两章为随机过程和时间序列分析。书中带★号的内容可供读者阅读，有利于拓宽读者的眼界。

学习本书的读者需有微积分和线性代数知识。

第一章 事件与概率

第一节 随机试验与事件

一、随机试验与样本空间

为了研究一种自然或社会现象，必然要对它进行观察或实验，今后，我们将这类活动统称为“试验”。例如进行流量测验、观测雨量、检测产品、投弹射击等等，都被看成为试验。

因为随机现象就是在一定条件下可能发生、也可能不发生的现象，因此每次试验的可能结果就不止一种，而且事先不能预言哪种结果会出现，所以，通常把具有这种性质的试验称为随机试验。由于随机现象的统计规律只有在大量观察后才呈现出来，因此，随机试验应具有可重复性，即可以在相同条件下多次重复进行。我们今后所说的试验都是随机试验，并简记为字母E。

我们是通过随机试验来研究随机现象的，因此，感兴趣的当然是试验的结果。例如，检测一种产品，我们关心的是“正品”还是“次品”；观察一次雨量，我们关心有多少毫米等等。在一项随机试验中，有多种可能的结果，我们把它的每一个可能结果称为一个基本事件或样本点，并用ω表示。而把全部可能结果构成的集合称为样本空间或基本空间，以Ω表示。与几何学中“点”的概念一样，基本事件也是概率论中的一个最原始的概念，概率论的全部理论都是以它为基础的。在具体问题中，明确样本空间的结构是描述随机现象的第一步。下面举几个例子。

【例 1-1】 抛一枚硬币，观察所出现的面，记ω_1为出现正面，ω_2为出现反面，则Ω由两个基本事件组成，即$\Omega=\{\omega_1, \omega_2\}$。

【例 1-2】 观察某地任一年的降水日数，并记$\omega_i=i$，则$\Omega=\{0,1,2,\cdots 365\}$，即$\Omega$由366个基本事件组成。

【例 1-3】 观察长江宜昌站的年平均流量，其可能结果是个非负的数字，而且很难确定一个明确的上界，这样，可以把样本空间取为$\Omega=\{\omega_Q, Q\geqslant 0\}$，其中$\omega_Q$表示流量为$Q$ m^3/s，或简记为$\Omega=[0, \infty)$。

【例 1-4】 用皮尺测量一段距离，以ω_x表示测量误差为x cm，则自然有$\Omega=\{\omega_x; -\infty<x<+\infty\}$，或简记为$\Omega=(-\infty, +\infty)$。

【例 1-5】 记录一次洪水的洪峰与洪量，以x表示洪峰，以y表示洪量，则样本空间可取为$\Omega=\{(x,y); x\geqslant 0, y\geqslant 0\}$。

例1-1及例1-2中的样本空间含有限个基本事件，因此称为有限样本空间；例1-3、1-4、1-5的样本空间包含无限多的基本事件，因此称为无限样本空间。

用随机试验和样本空间描述随机现象是一种必要的抽象，这种抽象使我们能更好地把

握住随机现象的本质，从而使得到的结果具有普遍的适用性。事实上，我们常把一些随机试验及其样本空间看成一种概率模型，每一种模型都可以概括许多实际内容大不相同的问题。例如，掷硬币观察出现正面和反面的试验，其样本空间有两个基本事件，只要将"正面"和"反面"分别换成产品的"合格"和"不合格"、天气的"有雨"或"无雨"、新生儿为"男性"或"女性"等等，就可以用于研究这些实际随机现象了。

一个随机试验的所有可能结果一般是可以事先知道的，因此今后我们总认为样本空间是预先给定的，这样，我们就可以不涉及实际问题，而把注意力集中在研究随机现象的普遍规律上。当然对于一个实际随机现象，如何用一个恰当的样本空间来描述它，也是值得研究的。

二、随机事件

随机事件简称事件，是指随机试验中具有某种属性的可能结果。或者说，事件是随机试验中可能发生、也可能不发生的事情，前面提到的基本事件是事件的一种。一个试验，除基本事件外，人们还关心其它事件。例如，在例1.2中，"年降水日数在60至70天之间"，或"年降水日数不多于100天"等，也是事件；在例1.3中，"年平均流量大于10000m^3/s"或"年平均流量不超过8000 m^3/s"等，也是事件。从这些例子可以看出，这类事件是由样本空间中的一些基本事件共同组成的，只要这些基本事件中有一个发生，所关心的事件就发生了。例如，例1-2中"年降水日数在60～70天之间"这个事件，是由年降水日数为60天、61天、…69天及70天这些基本事件组成的，只要这些基本事件中有一个发生，"年降水日数在60至70天之间"这个事件就发生了。由于各种事件均由样本空间Ω中一些基本事件组成，而在集合论中称由集合Ω中一部分元素组成的集合A为Ω的子集，记为$A\subset\Omega$。因此，我们可以用集合论的观点来定义事件，即把事件定义为样本空间的子集（当然，是要满足一定条件的）。这种定义事件的观点，对概率论的发展具有重大意义。

由于由一个元素构成的集也是样本空间Ω的子集，因此前述事件的定义对基本事件也是适用的。

样本空间Ω中的所有基本事件都在Ω中，因此Ω本身也是样本空间Ω的子集，所以我们也把样本空间Ω作为一个事件，因为每次试验中必然会出现Ω中的一个基本事件，即每次试验Ω必然发生，所以常称Ω为必然事件。此外，由于不含任何元素的空集ϕ是任何集合的子集，因此也把空集作为一个事件，而在每次试验中决不会什么基本事件也不发生，所以我们称空集ϕ为不可能事件。

必然事件Ω在每次试验中必然会发生，不可能事件ϕ在每次试验中都不可能发生。因此，它们都是确定性事件，而不是随机事件，但是为了处理的方便，通常把它们看成随机事件的两种极端情况统一处理。

今后，我们用A、B、C等大写英文字母表示随机事件，而用Ω表示必然事件，用ϕ表示不可能事件。

【例 1-6】 试验E：甲乙两人下棋一局，观察棋赛结果，试写出E的样本空间；若令事件A为"甲不败"，试写出A中的基本事件。

【解】 E的样本空间Ω由 3 个基本事件组成，即$\Omega=\{$甲胜乙负，乙胜甲负，和局$\}$。

而事件A={甲胜乙负，和局}。

【例 1-7】 试验E：一次掷两颗骰子，观察：①两颗骰子各自出现之点数的搭配情况；②两颗骰子出现点数之和。试写出这两种不同试验的样本空间Ω，并指出这两种情况下，事件A={点数之和小于5}由哪些基本事件组成。

【解】 ①$\Omega=\{(1,1),\ (1,2),\ \cdots(1,6),$

$(2,1),\ (2,2),\ \cdots(2,6),$

……………………………………

$(6,1),\ (6,2),\ \cdots(6,6)\}$

共有$6^2=36$个基本事件。

事件A={点数之和小于5}=$\{(1,1),\ (1,2),\ (1,3),\ (2,1),\ (2,2),\ (3,1)\}$，共包含六个基本事件。

②$\Omega=\{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$，共包含11个基本事件，事件$A$={点数之和小于5}=$\{2,3,4\}$，由3个基本事件组成。

这个例子很富有启发性，它说明样本空间中的基本事件是由试验的内容及人们感兴趣的结果所确定的。这个例子中的两种情况虽然都是一次掷两个骰子，由于关心的结果不同，其样本空间就不一样，因此，这里实际上是两种不同的试验。

三、事件间的关系与事件的运算

对于一种随机现象，我们常常要从几个方面去研究它，例如研究一次洪水，我们不仅关心洪峰，而且关心洪水总量和洪水历时；研究一个流域的洪水，不仅关心干流的洪水，而且关心它与各支流洪水的遭遇情况等等。这就说明，只是一个个地研究事件是不够的，还要同时研究在同样条件下的几个事件，以及它们之间的关系。详细地分析事件之间的关系，不仅会帮助我们更深刻地认识事件的本质，而且可以大大简化复杂事件的概率计算。

下面讨论事件间的几种主要关系。设Ω为试验E的样本空间，A、B、A_i（$i=1,\ 2,\ \cdots$）是定义在Ω中的事件。

1.包含关系

如果事件A发生必然导致事件B发生，则称事件A是事件B的特款，或称事件B包含事件A，记为$B\supset A$或$A\subset B$。显然，此时属于A的基本事件也属于B。例如，若令A表示"某地任一年年雨量超过500mm"，B表示"该地年雨量超过300mm"，则B包含A，因为若某年雨量超过500mm，则必然超过300mm。

如果事件B包含事件A，同时事件A也包含事件B，即$B\supset A$，且$A\supset B$，则称事件A与事件B等价，记为$A=B$。等价的两个事件被认为是一样的。

显然，对于任何事件A，必然有$\Omega\supset A\supset\phi$。

2.事件之和

如果事件C表示事件A或事件B至少发生一个，则称C为事件A与事件B的和，记为$C=A\cup B$，或$C=A+B$，读作"A加B"，或"A或B"。此时，C中的基本事件由A和B的基本事件合并组成。例如，若令A表示"干流发生洪水"，B表示"支流发生洪

水”，则“流域内发生洪水”这一事件就是事件A与B的和。

事件之和的概念可以推广到许多事件的场合，若事件C表示A_1、A_2……A_n诸事件至少发生一个，则称C是A_1、$A_2\cdots A_n$诸事件之和，记为$C=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$（或$=A_1+A_2+\cdots+A_n$），简记为$C=\bigcup_{i=1}^{n}A_i$（或$=\sum_{i=1}^{n}A_i$），若$n$趋于无限，则有，$C=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$（或$=\sum_{i=1}^{\infty}A_i$）。

3.事件之交

如果事件C表示事件A和事件B同时发生，则称事件C为事件A与B的交（或积），记为$C=A\cap B$，或简记为$C=AB$，读作“A乘B”。此时，C由既属于A也属于B的基本事件组成。例如，若令A表示“某一年发生梅雨洪灾”，B表示“该年发生台风雨洪灾”，则$A\cap B$表示“该年既发生梅雨洪灾又发生台风雨洪灾”。

类似地，事件之交的概念也可以推广。若事件C表示A_1、$A_2\cdots A_n$诸事件同时发生，则称C为A_1、$A_2\cdots A_n$的交，记为$C=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$（或$=A_1A_2\cdots A_n$），或简记为$C=\bigcap_{i=1}^{n}A_i$（或$=\prod_{i=1}^{n}A_i$），若$n$趋于无限，则有$C=\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i$（或$=\prod_{i=1}^{\infty}A_i$）。

4.事件之差

如果事件C表示事件A发生，而事件B不发生，则称C为事件A与B的差，记为$C=A-B$。显然，C由属于A而不属于B的基本事件组成。例如，若令A表示“某流域一年内发生5至10场暴雨”，B表示“该流域一年内发生8至12场暴雨”，则$A-B$表示“该流域一年内发生5至7场暴雨”。

5.相容和互斥关系

如果事件A与事件B不能同时发生，即$A\cap B=\phi$，则称事件A与事件B互不相容，或称事件A与事件B互斥。显然，此时事件A与B中没有共同的基本事件。例如，若令A表示“某地区任一年年雨量偏多”，B表示“该地区同一年年雨量偏少”，则A与B不能同时发生，所以A与B互斥。反之，若A与B能同时发生，则称A与B为相容事件。

6.互逆事件

若事件B是由样本空间Ω中所有不属于事件A的基本事件组成，则称事件B是事件A的逆事件，或对立事件。A的逆事件常记为$\bar{A}$，显然，若$\bar{A}$是A的逆事件，则A也是$\bar{A}$的逆事件，即$\bar{\bar{A}}=A$。例如，必然事件Ω与不可能事件ϕ就是一对互逆事件。又如，有雨与无雨；正品与次品；有灾与无灾等都互为逆事件。

互逆事件必然满足下列关系：

$$A\cup\bar{A}=\Omega \quad 及 \quad A\cap\bar{A}=\phi$$

应当注意的是，互逆事件必互斥，但互斥事件未必互逆。例如，若令A表示“南京明年5月1日为晴天”，B表示“南京明年5月1日为雨天”，则A与B互斥，但A与B不互逆，因为该日还可能是阴天或多云天。

对于事件的运算有下列关系式：

1）交换律：$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$；

2）结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

3）分配律：$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$，$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$；

4）德莫根（De Morgan）定理：

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A}_i,\quad \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A}_i;$$

当n趋于无限时，德莫根定理也成立。

现证明德莫根定理的第一式。

【证】 设ω是事件$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}$中的任一基本事件，即$\omega\in\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}$，则 $\omega\overline{\in}\bigcup_{i=1}^{n} A_i$，由此$\omega\overline{\in}A_i$（对一切$i$成立）。于是$\omega\in\overline{A}_i$（对一切$i$成立），即$\omega\in\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A}_i$，从而有$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}\subset\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A}_i$。

再设ω是事件$\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A}_i$中的任一基本事件，即$\omega\in\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A}_i$。则$\omega\in\overline{A}_i$（对一切$i$成立），由此$\omega\overline{\in}A_i$（对一切$i$成立）。于是$\omega\overline{\in}\bigcup_{i=1}^{n} A_i$，因此$\omega\in\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}$，从而有$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}\supset\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A}_i$。第一式得证。

用类似方法可证明定理的第二等式。

在进行事件的运算时，关于它们的运算顺序有如下约定：先进行逆的运算，再进行交的运算，最后进行和或差的运算。

我们可以用图1-1直观地说明事件间的关系和运算，图中长方形表示样本空间，圆A、B分别表示二事件，图中阴影部分表示各种关系。

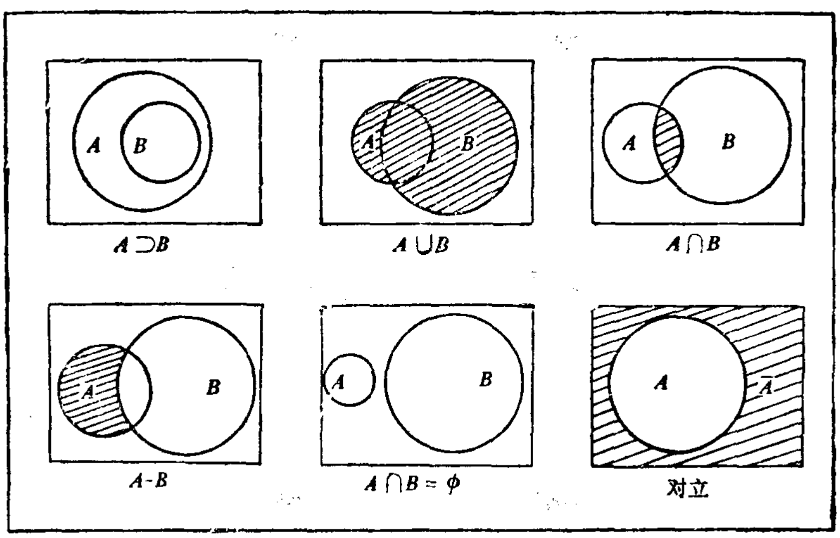

图 1-1 事件间的关系和运算

下面看几个例子。

【例 1-8】 在一段堤防上检查5处险段，设A为事件{至少有一处漏水}，B为事件{漏

水处不少于两处}，问$\bar{A}$、$\bar{B}$分别表示什么事件？

【解】 $\bar{A}$表示事件{没有一处漏水}；$\bar{B}$表示事件{漏水处少于两处}，即{没有一处漏水或只有一处漏水}。

【例 1-9】 A、B、C为三个事件，试用它们表示事件$C_1=${三个事件都发生}；$C_2=${A发生，B不发生}；$C_3=${A、B都发生而C不发生}。

【解】 $C_1=A\cap B\cap C$；$C_2=(A\cap\bar{B}\cap\bar{C})\cup(A\cap\bar{B}\cap C)$；$C_3=A\cap B\cap\bar{C}$ 或$(A\cap B)-C$。

【例 1-10】 化简$(A\cup B)(A\cup\bar{B})$。

【解】 $(A\cup B)(A\cup\bar{B})=AA\cup A\bar{B}\cup BA\cup B\bar{B}$ （分配律）

$$=A\cup A\bar{B}\cup BA\cup\phi=\Omega A\cup A\bar{B}\cup BA$$
$$=A(\Omega\cup\bar{B}\cup B)=A.$$

【例 1-11】 化简$\overline{(\overline{\bar{A}\bar{B}}\cup C)\overline{AC}}$。

【解】 多次应用德莫根定理，层层脱去“逆”号：

$$\overline{(\overline{\bar{A}\bar{B}}\cup C)\overline{AC}}=\overline{(\overline{\bar{A}\bar{B}}\cup C)}\cup AC=\overline{\overline{\bar{A}\bar{B}}}\bar{C}\cup AC=(\overline{\bar{A}}\cup\overline{\bar{B}})\bar{C}\cup AC$$
$$=(A\cup B)\bar{C}\cup AC=A\bar{C}\cup B\bar{C}\cup AC=A(\bar{C}\cup C)\cup B\bar{C}$$
$$=A\Omega\cup B\bar{C}=A\cup B\bar{C}.$$

第二节 频率与概率

一个随机试验包含许多事件，若多次重复一种试验就会发现，有的事件出现的次数很多，有的事件出现的次数很少，这说明一个随机试验中各事件出现的可能性是有大有小的。因此，要认识一种随机现象，只是知道它在试验中有哪些可能的结果是不够的，还应了解各种结果出现的可能性有多大。例如，在河流上修建防洪水库，为了确定库容及泄洪道尺寸，就要知道库址各种大小洪水出现的可能性程度。要定量地刻划各种事件出现的可能性程度，就要对每个事件给定一个数字，并使出现可能性大的事件有较大的数值，出现可能性小的事件有较小的数值，这个数字就称为事件的概率。然而，这只是问题的一个方面，即用概率刻划事件出现可能性程度的必要性。问题还有另一方面，即用一个数字刻划事件出现的可能性程度是否可能？也就是说，一个事件的概率是不是唯一的确定数值？为了说明这个问题，我们要从频率谈起。

一、频率

对于随机事件A，若在n次试验中A出现了n_A次，则称比值

$$P^*(A)=\frac{n_A}{n} \tag{1-1}$$

为事件A在这n次试验中出现的频率，n_A称为A在这n次试验中出现的频数。例如，掷一枚硬币100次，出现了49次正面，那么在这100次试验中，正面出现的频率为$\frac{49}{100}$，频数为49。