

数学习题分类详解

方 华 编

山东人民出版社

一九七八年·济南

数学习题分类详解

(中学课外读物)

方 华 编

*

山东人民出版社出版

山东新华印刷厂印刷

山东省新华书店发行

*

1978年5月第1版 1978年5月第1次印刷

统一书号: 7099·873 定价: 0.65元

前 言

为了培养中学生分析问题和解决问题的能力，加深对中学数学基本理论、概念、公式的理解，提高基本运算技能，本书汇集了中学数学习题431道，并分类进行了详细解答。

书中习题部分，将同一类型的习题归在一起；解题部分，每章前面写有解题要点，概括了解此类习题所需的基本理论、概念、公式或基本规律。对比较难解的习题，一般先进行分析，然后再作出解答。对有多种解法的习题，只对其中少数题给出了几种解法。在几何习题的解法中，对几何解法、代数解法和三角解法进行了比较，以帮助读者开阔思路。

为了发挥读者学习的主动性，建议解题时独立思考，确有困难时，再看解题部分的提示和分析。

由于作者水平有限，书中缺点错误可能不少，希望读者批评指正。

方 华

一九七八年二月

目 录

习 题 部 分

第一章	计算和变换.....	1
第二章	代数方程和不等式.....	8
第三章	对数方程和指数方程.....	13
第四章	列方程解应用题.....	15
第五章	函数和曲线.....	20
第六章	几 何.....	28
第七章	解三角形.....	39
第八章	三角变换和三角方程.....	43
第九章	排列、组合和二项式定理.....	46
第十章	数列和极限.....	48

解 答 部 分

第一章	计算和变换.....	51
第二章	代数方程和不等式.....	67
第三章	对数方程和指数方程.....	100
第四章	列方程解应用题.....	112
第五章	函数和曲线.....	134
第六章	几 何.....	182
第七章	解三角形.....	229
第八章	三角变换和三角方程.....	249
第九章	排列、组合和二项式定理.....	266
第十章	数列和极限.....	277

习题部分

第一章 计算和变换

计算下列各题:

$$1 \quad (1 - 0.5^{-2}) \div \left(-\frac{27}{8}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$2 \quad 5 \frac{1}{2} \times \left(-\frac{6}{11}\right) + 0.25 - (-2)^3 \div \left(-2 \frac{2}{3}\right)^2$$

$$3 \quad \left(-2 \frac{3}{5}\right)^0 + 4^{-2} \times \left(2 \frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} - (0.01)^{0.5}$$

$$4 \quad \left(-1 \frac{1}{2}\right)^2 + 81^{\frac{3}{4}} - (-1)^0 \div 0.2 + (-2)^{-3}$$

$$5 \quad 5 \frac{3}{4} - 2 \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3 \times \frac{3}{4} \right] \div \frac{2}{5}$$

$$6 \quad 5 - 3 \times \left[\left(-3 \frac{3}{8}\right)^{-\frac{1}{3}} + 1031 \times (0.25 - 2^{-2}) \right] \div 9$$

$$7 \quad 0.25 \times (-2)^2 - 4 \div (\sqrt{5} - 1)^0 - \left(\frac{1}{6}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$+ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$$

$$8 \quad \left(\frac{1}{300}\right)^{-\frac{1}{2}} + 10 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{27}{4}\right)^{\frac{1}{4}} - 10 \times (2 - \sqrt{3})^{-1}$$

$$9 \left(2 \frac{1}{4} \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{10} \right)^{-2} - (3.14)^0 + \left(-\frac{27}{8} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$10 \ 2^{-\frac{1}{2}} + \frac{2^0}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2} - 1}$$

化简下列诸式:

$$11 \ 8x^{-\frac{1}{3}} \sqrt{y^{-\frac{1}{3}} x^4} \sqrt{y^{\frac{4}{6}}}$$

$$12 \ \sqrt{14 \times 24 \times 39 \times 91} + 4\sqrt{27} \times (-\sqrt{3})$$

$$13 \ \sqrt{m^2 - 2ma + a^2}$$

$$14 \ \sqrt{(-3)^2} \quad \sqrt[3]{(-27)^3}$$

$$15 \ \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^3} \cdot \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{5}{6}}$$

$$16 \ \sqrt[6]{8^5} \div \sqrt{8} \times \sqrt[3]{8} \div \left(\frac{1}{8}\right)^0$$

$$17 \ \frac{a}{a-b} - \frac{b}{a+b} + \frac{2ab}{a^2 - b^2} \quad (a \neq \pm b)$$

$$18 \ \left(\frac{8x^{-3}}{\sqrt{y^3 \cdot z^{-6}}} \right)^{-\frac{1}{3}} \quad \left(\frac{8x^{-3}}{\sqrt[3]{y^3 \cdot z^{-6}}} \right)^{-\frac{1}{3}}$$

$$19 \ \frac{(-27)^3 \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{1}{2}}}}{(-9)^0 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-5}}$$

$$20 \ \frac{\frac{3}{4}(ab)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{4}{9} a^4 b^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{1}{2}}}{2a^3 \sqrt{a^2}}$$

21 若 $m + \frac{1}{m} = 2$

求 $m^2 + \frac{1}{m^2}$

$m^3 + \frac{1}{m^3}$

22 当 $m \leq 1$ 时, 计算 $\sqrt{(m-1)^2}$

23 $\sqrt{a^2} \div a \quad (a < 0)$

24 $(1-c^2)^{-\frac{1}{2}} - \{[(1+c)(1-c)]^{\frac{1}{2}} + c^2[(1+c)(1-c)]^{-\frac{1}{2}}\}$

25 $[(a^{-\frac{3}{2}}b^2)^{-1}(ab^{-3})^{\frac{1}{2}}(b^{\frac{1}{2}})^7]^{\frac{1}{2}}$

26 $(2\frac{7}{9})^{\frac{1}{2}} + 0.1^{-2} + (2\frac{10}{27})^{-\frac{1}{2}}$

27 $|6-a| - |2a+1| + \sqrt{a^2+10a+25} \quad (a < -5)$

28 $|2x-3|$

29 $\sqrt{4-12a+9a^2}$

30 $\frac{1}{\sqrt{2}+1} - \frac{1}{\sqrt{2}-1}$

31 $\sqrt{\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}}$

32 $\sqrt[4]{a^{-2}b^3} \cdot \sqrt[3]{a^4b^{-2}} \div \sqrt[8]{a^5b^{-2}}$

33 $(27a^{\frac{5}{2}}\sqrt{ab^{-\frac{1}{3}}\sqrt[4]{b^{\frac{4}{3}}}})^{\frac{1}{2}} \quad (b \neq 0)$

$$34 \sqrt{\frac{12}{25}} + \sqrt[4]{90000} + \sqrt[6]{\frac{24}{27}}$$

$$35 \frac{\sqrt[3]{3^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}}}{(\sqrt{3}-1)^2}$$

$$36 (3\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[4]{b})(-b\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{b}) \div (2\sqrt[8]{a} \cdot \sqrt[8]{b^5})$$

$$37 \frac{(a^2-b^2)^3}{a^3+b^3} \div \frac{(b+a)^2}{a^2-ab+b^2} \times \frac{1}{(b-a)^3}$$

$$38 \frac{x^4+x^2+1}{x^3-1} + \frac{x(x-2)-2(x-2)}{x^2-3x+2}$$

$$39 \frac{a^{2n+1}-6a^{2n}+9a^{2n-1}}{a^{n+1}-4a^n+3a^{n-1}}$$

分解因式:

$$40 x^2y-2y^3$$

$$41 18a^3-48a^2b+32ab^2$$

$$42 15x^3+x^2-2x$$

$$43 x^3-5x^2+4x$$

$$44 a^2-2ab+b^2-6a+6b+5$$

$$45 x^2-4b^2-4+2bx^2-8b+b^2x^2$$

$$46 x^3+2x^4+4x^2+2+x$$

$$47 x^4+x^2y^2+y^4$$

对数计算:

$$48 \log_4 2$$

$$49 \textcircled{1} 3\log_3 \frac{1}{27} \quad \textcircled{2} \lg \lg 10$$

$$50 \log_3 \frac{1}{27} + \log_{\frac{1}{2}} 8 + \log_2 8 + \log_4 64$$

$$51 \lg \frac{700}{3} + \lg \frac{300}{7} + \lg 1$$

$$52 \lg 2 - 2\lg 4 + \lg 5 + \lg 16$$

$$53 \lg \frac{3}{7} + \lg 70 - \lg 3$$

$$54 \log_2 2 + \log_5 1 - \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27}$$

$$55 \lg 4 + \lg 9 + 2 \sqrt{(\lg 6)^2 - 2\lg 6 + 1}$$

$$56 \lg 14 - 2\lg \frac{7}{3} + \lg 7 - \lg 18$$

$$57 \lg(1000 \cdot \sqrt[5]{10})$$

$$58 \frac{2\lg 2 + \lg 3}{2 + \lg 0.36 + \frac{2}{3} \lg 8}$$

$$59 \frac{\lg 4 + \lg 25 - \lg 10}{\lg \sqrt[3]{1000}}$$

$$60 \frac{\lg 3 + \lg 2}{\frac{1}{4} \lg 16 + \sqrt{(\lg 1 - \lg 10)^2} + \frac{1}{2} \lg 0.09}$$

$$61 -\log_3 \log_3 \sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{3}}}$$

$$62 \text{ 已知: } \lg 2 = 0.3010, \lg 3 = 0.4771, \lg 7 = 0.8451.$$

$$\text{求: ① } \lg \sqrt[3]{800}$$

$$\text{② } \lg \sqrt[3]{45}$$

$$\textcircled{3} \lg 5$$

$$\textcircled{4} \lg 35$$

$$63 \log_a a^2$$

$$64 \sqrt{5^{2\lg 5 \lg x} - 2\lg x + 1}$$

$$65 \frac{2\lg 6 - \lg 3}{1 + \frac{1}{2}\lg 0.36 + \frac{1}{3}\lg 8}$$

$$66 \log_2 \cos \frac{\pi}{4} - \log_2 \sin \frac{\pi}{6}$$

$$67 \text{ 证明: } \log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a = 1 \quad (a > 0, b > 0, c > 0)$$

$$68 \lg \lg x - \lg \sin x = \lg \cos x - \lg \operatorname{ctg} x + 2\lg 3 - \frac{3}{2}\lg 2$$

求 x

三角计算:

$$69 \cos 165^\circ$$

$$70 \operatorname{tg} 870^\circ$$

$$71 \sin 435^\circ$$

$$72 \sin(-915^\circ)$$

$$73 \sin(-990^\circ)$$

$$74 \cos(-840^\circ)$$

$$75 \operatorname{ctg}(-1200^\circ)$$

$$76 \cos \frac{3}{8}\pi \cdot \cos \frac{\pi}{8}$$

$$77 2\sin x \cdot \sin y \quad \left(x = \frac{5}{12}\pi, y = \frac{\pi}{12}\right)$$

$$78 \sin \frac{4}{3}\pi \cdot \cos \frac{25}{6}\pi \cdot \operatorname{tg}\left(-\frac{3}{4}\pi\right)$$

$$79 \sin 480^\circ \cdot \cos 480^\circ \cdot \cos 960^\circ \cdot \cos 1920^\circ$$

$$80 \cos 78^\circ \cdot \cos 3^\circ + \cos 12^\circ \cdot \sin 3^\circ$$

$$81 \operatorname{ctg}(-60^\circ) \sin 240^\circ - 2 \cos(-600^\circ) + \operatorname{tg}^2 150^\circ$$

$$82 \operatorname{ctg} 135^\circ + \cos(-60^\circ) - \operatorname{tg}^2 60^\circ + \sin 30^\circ$$

$$83 \frac{\operatorname{tg}(-120^\circ) \cdot \cos(-240^\circ) \cdot \cos 480^\circ}{\operatorname{tg}(-60^\circ) \cdot \sin(1050^\circ)}$$

$$84 \sin^2 62^\circ + \operatorname{tg} 54^\circ \cdot \operatorname{tg} 45^\circ \cdot \operatorname{tg} 36^\circ + \sin^2 28^\circ$$

$$85 \text{ 已知: } \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2}$$

$$\text{求: } \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha}$$

$$86 \text{ 已知: } \arcsin \frac{4}{5} = \alpha \quad \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$$

$$\text{求: } \sin 2\alpha \quad \cos 2\alpha \quad \operatorname{tg} \alpha$$

$$87 \text{ 已知: } \cos \theta = 0.6 \quad 270^\circ < \theta < 360^\circ$$

$$\text{求: } \left(\sin \frac{\theta}{2} - \cos \frac{\theta}{2} \right)^2$$

$$88 \text{ 已知: } \alpha, \beta \text{ 为三角形之内角, 且 } \alpha \text{ 为锐角, } \cos \alpha = \frac{3}{5},$$

$$\sin \beta = \frac{5}{13}.$$

$$\text{求: } \sin(\alpha + \beta) \text{ 和 } \operatorname{tg}(\alpha - \beta) \text{ 的值.}$$

$$89 \text{ 求证: } \operatorname{tg} 22^\circ 30' = \sqrt{2} - 1$$

$$90 \text{ 若: } 90^\circ < A < 180^\circ, \text{ 求: } \sec A \cdot \sqrt{1 - \sin^2 A}.$$

第二章 代数方程和不等式

解方程和方程组:

91 $\sqrt{x^2 + 7} - 4 = 0$

92 $x^4 + 5x^3 - 7x^2 - 8x - 12 = 0$

93 $\sqrt{3x + 4} = x$

94 $2\sqrt{x - 3} + 6 = x$

95 $\frac{2}{x-2} + x = \frac{x}{x-2}$

96 $\frac{x+1}{x-1} + \frac{x-1}{x+1} = \frac{10}{3}$

97 $\sqrt{2x^2 - 5} - \sqrt{5x - 7} = 0$ (限定在实数范围内)

98 $\sqrt{4x+1} - 2x + 1 = 0$

99 一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的求根公式是什么? 并把它推导出来.

100 $\frac{x-1}{x+1} - \frac{5}{1-x} = \frac{4}{x^2-1}$

101 $\begin{cases} x + y = 8 & \dots\dots\dots (1) \\ 2x - y = 7 & \dots\dots\dots (2) \end{cases}$

102 $\begin{cases} 2x - y = 5 & \dots\dots\dots (1) \\ 3x + 4y = 2 & \dots\dots\dots (2) \end{cases}$

$$103 \begin{cases} 2x - 3y = 9 & \dots\dots\dots (1) \\ 3x + 4y = 5 & \dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

104 a 是什么实数的时候, 下列方程组的解是正数?

$$\begin{cases} 2x + ay = 4 & \dots\dots\dots (1) \\ x + 4y = 8 & \dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

$$105 \begin{cases} 7\sqrt{x+y} - x - y = 12 & \dots\dots\dots (1) \\ x^2 + y^2 = 136 & \dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

$$106 \begin{cases} x^2 - 2xy + 3y^2 = 9 & \dots\dots\dots (1) \\ 4x^2 - 5xy + 6y^2 = 30 & \dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

$$107 \begin{cases} x^2 - 2xy - y^2 = 1 & \dots\dots\dots (1) \\ \sqrt{xy+3} = x & \dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

$$108 \text{ 解方程组 } \begin{cases} y^2 - 4x - 2y + 1 = 0 & \dots\dots (1) \\ y = x + a & \dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

并讨论: a 取那些实数值时, 这个方程组

1) 有不同的两组实数解,

2) 有相同的两组实数解,

3) 没有实数解.

$$109 \begin{cases} \sqrt[3]{(x+y)^2} + 2\sqrt[3]{(x-y)^2} = 3\sqrt[3]{x^2 - y^2} & \dots\dots (1) \\ 3x - 2y = 13 & \dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

110 方程 $x^2 + 4x + k = 0$

1) 当 k 为何值时, 方程有二不同实根?

- 2) 当 k 为何值时, 方程有二相同实根?
- 3) 当 k 为何值时, 方程没有实根?
- 111 实数 p, q 应满足怎样的条件, 才能使 $x^2 + px + q = 0$ 的两根成为一个直角三角形两锐角的正弦?
- 112 m 是什么值的时候, 方程 $3x^2 - (4m - 1)x + m^2 + \frac{3}{4} = 0$ 有相等的两实根?
- 113 若方程 $x^2 + 2x + K = 0$ 的两根相等问 $K = ?$
- 114 ①求证: 若方程 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ 的三根可以排成等比数列 则 $a^3c = b^3$
- ②已知方程 $x^3 + 7x^2 - 21x - 27 = 0$ 的三个根可以排成等比数列, 求三个根.
- 115 若方程 $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$ 之三根为 $1, -1, \frac{1}{2}$, 则 $c = ?$
- 116 若 $3x^2 + Kx + 12 = 0$ 的两根相等, 求 K 值.
- 117 试求: 以 $x^2 - 3x - 1 = 0$ 的两根平方作两根的二次方程.
- 118 设 m 是实数, 求证方程 $2x^2 - (4m - 1)x - m^2 - m = 0$ 的两个根必都是实数.
- 119 设 $\operatorname{tg}\alpha$ 和 $\operatorname{tg}\beta$ 是方程 $x^2 + 6x + 7 = 0$ 的两个根, 求证:
 $\sin(\alpha + \beta) = \cos(\alpha + \beta)$
- 120 已知方程 $2x^2 - x \cdot 4\sin\theta + 3\cos\theta = 0$ 的两个根相等, 且 θ 为锐角, 求 θ 和这个方程的两个根.
- 121 已知方程 $ax^2 - (2a + 1)x + (a + 1) = 0$
- ①有一根为零, ②两个根的和为零,
- ③两根的积为2, 分别求 a 的值.

- 122 $\triangle ABC$ 的三个内角是 α, β, γ , 而
 $\operatorname{tg} \alpha, \operatorname{tg} \beta$ 是方程 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 的
 两个根, 求 γ .
- 123 a 为什么值时, 方程
 $x^2 - 2x + \lg a = 0$ 有实数根.
- 124 已知方程 $x^2 + px + q = 0$
 的两个根为 $\operatorname{tg} \alpha$ 和 $\operatorname{tg} \beta$, 求
 $\sin^2(\alpha + \beta) + p \sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha + \beta) + q \sin^2(\alpha + \beta)$ 的值
 (其中 p, q 为任意实常数).
- 125 求证: 方程 $x^3 - (\sqrt{2} + 1)x^2 + (\sqrt{2} - q)x + q = 0$
 的一个根是1; 设这个方程的三个根是一个 $\triangle ABC$ 内角
 的正弦 $\sin A, \sin B, \sin C$,
 求 A, B, C 的度数及 q 的值.
- 126 K 是什么实数时, 方程 $x^2 - 2(K + 5)x + 2K^2 + 1 = 0$
 有实数根?
- 127 设方程 $8x^2 - (8\sin \alpha)x + 2 + \cos 2\alpha = 0$
 的两个根相等求 $\alpha = ?$
- 128 已知方程 $x^3 + mx - 3x + n = 0$ 的三个根的平方和为6,
 且知这个方程有两个相等的正根, 求 m, n 的值.
- 129 解方程 $x^4 + 1 = 0$, 并且证明平面内代表它的根的四个
 点是一个正方形的顶点.
- 130 当 p 是什么实数值时, 方程 $x^2 + px - 3 = 0$ 与方程 x^2
 $- 4x - (p - 1) = 0$ 有一个公共根, 并求出这个公共根.
- 131 方程 $x^2 - (m + 2)x - (m - 6) = 0$ 有两个不相等的实
 根, 求 m 的范围.
- 132 若方程 $5x^2 - 10x \cos \alpha + 7 \cos \alpha + 6 = 0$ 的两根相等, 试求

两邻边之和为 6，且夹角为 α 的平行四边形的最大面积。

133 当锐角 θ 为何值时，方程

$$(3\sin\theta)x^2 - (4\cos\theta)x + 2 = 0$$

有两个相等的实根？并求出这个方程的实数根。

134 系数是实数的一元三次方程，最少有几个实数根？最多有几个实数根？

解不等式和不等式组：

135 $x^2 - 3x - 28 < 0$

136 $2x^2 > 3 - 5x$

137 $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x + 2} < 0$

138
$$\begin{cases} 16 - x^2 \geq 0 \dots\dots\dots(1) \\ x^2 - x - 6 > 0 \dots\dots\dots(2) \end{cases}$$
并在数轴上表示出来

139 $\frac{x^2 - x - 6}{x^2 + 3x + 4} > 0$

140 $|x| < |x + 1|$

141 $\log_{0.5}(x^2 - 2x - 15) < \log_{0.5}(x + 13)$

142 $\lg(2x + 1) > \lg(5 - x)$

143 求证 $|\sin 2x| \leq 2|\sin x|$ ， x 为任意实数。

144 若 a, b, c 是不全相等的实数。求证：

$$a^2 + b^2 + c^2 > ab + bc + ca$$

145 从火车上下来的两个旅客，他们按同一路线到同一目的地，甲以一半时间用速度 a 行走，另一半时间以速度 b 行走；乙以一半路程用速度 a 行走，另一半路程用速度 b 行走，试问哪个旅客先到达目的地？

第三章 对数方程和指数方程

146 若 $\lg 2x = 2\lg x$ 问 $x = ?$

147 解 $\frac{1}{6} \lg x = \frac{1}{3} \lg a + 2\lg b + \lg c$

148 解方程 $2\lg x = \lg(x+12)$

149 解方程 $\lg(x-5) + \lg(x+3) - 2\lg 2 = \lg(2x-9)$

150 已知 $2\lg x + \lg 2 = \lg(x+6)$

151 $\log_a \{1 + \log_b [1 + \log_c (1 + \log_p x)]\} = 0$

152 $\frac{\lg(35-x^3)}{\lg(5-x)} = 3$

153 $\lg[x - a(1-a)^{-\frac{1}{2}}] - \frac{1}{2} \lg\left(1 + \frac{1}{a}\right) - \lg \sqrt{\frac{a^3+a}{a+1} - a^2} = 0$

154 解方程 $5^{x^2+2x} = 125$

155 解方程 $72^{x^2+x-6} = 1$

156 解方程 $\lg(2^x + 2x - 16) = x(1 - \lg 5)$

157 $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7} = \left(\frac{7}{3}\right)^{7x-3}$

158 $7 \times 3^{x+1} - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3}$

159 $32^{\frac{x+5}{x-7}} = 0.25 \times 128^{\frac{x+17}{x-3}}$

160 $5\lg x - 3\lg x^{-1} = 3\lg x^{+1} - 5\lg x^{-1}$