高等学校教学参考书

数学分析

第三册

何琛 史济怀 徐森林 编

高等教育出版社

高等学校教学参考书

数学分析

第三册

（无穷级数和广义积分）

何琛　史济怀　徐森林　编

高等教育出版社

内容简介

本书系参照1980年5月在上海举行的高等学校理科数学、力学、天文学教材编审委员会（扩大）会议上审订的综合大学数学、计算数学专业“数学分析教学大纲”编写的．全书共分三册．第一册为一元微积分．该册除传统内容外，还讨论了一般的映射和逆射概念、凸函数、上极限和下极限，并较详细地讨论了实数的连续性．第二册为多元微积分．该册内容与传统内容有较大的差异，讨论了映射的微分、隐射和逆射定理，并严格地讨论了平面上的Riemann积分，直观地介绍了 R^3 中的外微分运算．本册是第三册，内容为无穷级数和广义积分，其中详细地讨论了无穷级数、广义积分和求导次序交换的问题，还讨论了Weierstrass逼近定理和处处连续而处处不可导的例子，以及Fourier分析初步等内容．

本书可作为数学专业的教学参考书．

高等学校教学参考书

数学分析

第三册

（无穷级数和广义积分）

何琛　史济怀　徐森林　编

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京顺义小店印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32　印张8,125　字数194,000

1985年1月第1版　1985年3月第1次印刷

印数 00,001—8,200

书号13010·01032　定价 1.85元

目　录

第八章　无 穷 级 数

前面我们接触到的主要是初等函数，有相当多的自然现象和工程技术中的问题需要这些函数来描述．但是，随着科学技术的发展，人们对自然界的认识逐步深化，发现有很多自然现象不能用初等函数来描述，特别有很多微分方程的解不能用初等函数来表达．这就要求人们去构造一些新的函数．用什么方法构造新的函数呢？在讲 Taylor 公式时，我们得到过 e^x 的一个表达式：

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}$$

$$(0<\theta<1,\ -\infty<x<+\infty).$$

对于给定的 x，显然有

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}=0.$$

若在上式中命 $n\to+\infty$，就有

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots.$$

这样，我们就把 e^x 表成了无穷多个幂函数

$$1,x,\frac{x^2}{2!},\cdots,\frac{x^n}{n!},\cdots$$

的和．换句话说，无穷多个幂函数的迭加产生了指数函数．这启发我们，把无穷多个函数

$$u_1(x),u_2(x),\cdots,u_n(x),\cdots$$

迭加起来，可能产生新的函数

$$S(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots,\tag{1}$$

这是构造新函数的一条重要途径．当然，随之而来会有很多新问

题：无穷多个函数如何相加？如何研究由(1)确定的函数的性质？如何计算它的导数和积分？这些都是本章要解决的问题。

第一节 数项级数

§1.1 基本概念

先定义无穷个数相加的意义. 设

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$$

是一给定的数列，称形式和

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

为一**无穷级数**，其中各数称为级数的**项**. 无穷个数如何相加呢？我们从一个简单的例子谈起：计算无穷级数

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^n + \cdots \quad |r| < 1 \tag{1}$$

的"和". 我们知道，这个级数的前 n 项的和

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} r^k = \frac{1-r^n}{1-r},$$

n 愈大，加的项数愈多. 如果当 $n \to +\infty$时，S_n 有极限，自然就把这极限规定为级数(1)的和. 现在

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{1}{1-r} \quad |r| < 1.$$

因此有

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^n + \cdots = \frac{1}{1-r} \quad |r| < 1.$$

对于一般的级数，我们有下面的

定义 1 无穷级数

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \tag{2}$$

的前 n 项的和

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

称为这级数的第 n 个**部分和**；如果这些部分和构成的数列

$$S_1, S_2, \cdots, S_n, \cdots$$

有有限的极限 S，我们就说级数(2)是**收敛**的，其和为 S，记作

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S;$$

如果数列(S_n)没有有限的极限，就说级数(2)是**发散**的.

例 1 刚才说过，等比级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots$$

当$|q|<1$时是收敛的，它的和是$\frac{1}{1-q}$. 当 $q=1$ 时，级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + 1 + \cdots + 1 + \cdots \tag{3}$$

的部分和

$$S_n = n \to +\infty$$

故级数(3)发散. 当 $q=-1$ 时，级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots \tag{4}$$

的部分和

$$S_n = \begin{cases} 0, & n = \text{偶数}, \\ 1, & n = \text{奇数}, \end{cases}$$

没有极限，级数(4)发散. 当$|q|>1$时，

$$S_n = \frac{1-q^n}{1-q}$$

也没有有限的极限，故级数发散. 综上所述，等比级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ 只有

当$|q|<1$时才是收敛的. □

例 2 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$$

的部分和

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$
$$=1-\frac{1}{n+1},$$

显然$\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=1$,故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$收敛,其和为1. □

例 3 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}=1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\cdots+\frac{1}{n^\alpha}+\cdots$$

的部分和

$$S_n=1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\cdots+\frac{1}{n^\alpha},$$

由第四章§1.3的例3得知:当$\alpha\leqslant 1$时,S_n不是基本数列,因而是发散的;当$\alpha\geqslant 2$时,S_n是基本数列,因而收敛.特别当$\alpha=1$时,调和级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

发散;当$\alpha=2$时,级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots$$

收敛.

这两个级数以后经常要用到，下面我们分别给出它们发散、收敛的直接证明.

先看调和级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. 由于

$$1+\frac{1}{2}>\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\underbrace{\frac{1}{2^{k-1}+1}+\frac{1}{2^{k-1}+2}+\cdots+\frac{1}{2^k}}_{2^{k-1}\text{项}}>\underbrace{\frac{1}{2^k}+\cdots+\frac{1}{2^k}}_{2^{k-1}\text{项}}=\frac{1}{2},$$

级数的第 2^k 个部分和

$$S_{2^k}=\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+$$
$$\cdots+\left(\frac{1}{2^{k-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^k}\right)>\frac{k}{2},$$

所以 $\lim\limits_{k\to+\infty}S_{2^k}=+\infty$. 这说明 S_n 有一个子列 S_{2^k} 发散，因而 S_n 发散，故调和级数发散.

再看级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. 显然它的部分和 S_n 是一单调增加数列，而且

$$S_n=1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}$$
$$=2-\frac{1}{n}<2,$$

即 S_n 是一单调增而有上界的数列，因而收敛，故原级数收敛. □

从级数收敛的定义可以看出，判断级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$的敛散及其求和的问题，归结为判断相应的部分和数列$S_n$的敛散及求其极限的问题；反之，任给一数列$S_n$，总可以造一级数，使其部分和就是$S_n$。事实上，只要命

$$a_1=S_1,\ a_2=S_2-S_1,\ \cdots,\ a_n=S_n-S_{n-1},\ \cdots,$$

就有

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=S_n,$$

即S_n是级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$的部分和数列．如果级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，且其和为$S$，那么$S$就是$S_n$的极限．因此，判断数列的敛散也可化为级数的敛散问题来考虑．由此可见，级数和数列是可以互相转化的，而数列极限则是研究无穷级数的基础．

习　题

1. 回答下列问题

(1) 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$的收敛和发散是怎样定义的？

(2) 等比级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}q^n$在什么条件下收敛？ 什么条件下发散？

(3) 如何把判断数列的敛散问题转化为级数的敛散问题？

(4) 下面五个级数中：

$$\sum_{n=1}^{\infty}n,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}},\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{5^n},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+3},\quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n},$$

哪些收敛？ 哪些发散？

2. 求下列级数的和：

(1) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots$。

(2) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots$.

(3) $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\cdots$.

(4) $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 6}+\cdots$.

(5) $\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}+\cdots$.

3. 证明下列等式:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=1$.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})=1-\sqrt{2}$.

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n(2n+1)}{(n+1)(2n-1)}=\ln 2$.

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+m)}=\frac{1}{m}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}\right)$, 其中 m 是自然数.

4. 证明

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(pn+q)(pn+q+pr)}=\frac{1}{pr}\left(\frac{1}{q+p}+\frac{1}{q+2p}+\cdots+\frac{1}{q+rp}\right),$$

这里 r 是自然数, $pn+q\neq 0$ $(n=1, 2, \cdots)$.

注意: 习题 2. 3 中哪几个小题是它的特例?

5. 证明 $\sum\limits_{\substack{n=1\\ n\neq m}}^{\infty}\frac{1}{m^2-n^2}=-\frac{3}{4m^2}$ (m 是给定的自然数).

6. 证明 $10<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{10^6}<20$.

7. 作一无穷级数, 使其部分和 $S_n=\frac{1}{n}$ $(n=1, 2, \cdots)$.

8. (1) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 是一收敛级数, 其和为 S. 用 (S_n) 记它的部分和数列,

命

$$\sigma_n=\frac{S_1+S_2+\cdots+S_n}{n},$$

证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sigma_n=S$.

(2) 试造一发散级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, 但由(1)所构造的 σ_n 却是收敛的.

(3) 设 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sigma_n=S$, 证明 $a_n=o(n)$, 这里 σ_n 就是(1)中定义的数列.

9. 设 $a_n>0$, $S_n=a_1+\cdots+a_n$, 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^2}$ 收敛.

§1.2 无穷级数的简单性质

研究无穷级数, 一个最基本的问题是判断它的敛散性, 只有在级数收敛的情况下, 讨论它的求和问题才是有意义的. 下面给出一个级数收敛的必要条件.

定理 1 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$.

证明很简单. 设

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k,\quad S=\sum_{k=1}^{\infty}a_k,$$

那么

$$\lim_{n\to+\infty}S_n=S,\quad \lim_{n\to+\infty}S_{n-1}=S.$$

于是

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=\lim_{n\to+\infty}(S_n-S_{n-1})=0. \qquad \square$$

这个简单的事实可以用来判断一些级数的发散性.

例 1 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n$发散. 这是因为

$$a_n=(-1)^n\not\to 0\quad (n\to+\infty). \qquad \square$$

例 2 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n\sin\frac{1}{n}$发散. 这是因为

$$a_n = n\sin\frac{1}{n} \to 1 \neq 0 \quad (n \to +\infty). \qquad \square$$

必须注意, $a_n \to 0$仅仅是级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的必要条件, 并不充分, 也就是说, 从 $a_n \to 0$ 不能得出$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的结论. 调和级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$便是一个例子, 它的通项$a_n = \frac{1}{n} \to 0 (n \to +\infty)$, 但它却是发散的.

无穷级数的和既然是有限和的极限, 因此在运算上当然有与通常有限和类似的性质. 这里我们首先指出的是线性性质.

定理 2 若级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$和$\sum_{k=1}^{\infty} b_k$都收敛, 则级数$\sum_{k=1}^{\infty} ca_k$ 和$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$也收敛, 且有

$$\sum_{k=1}^{\infty} ca_k = c\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k,$$

其中 c 是任意常数.

证明 我们证明第二个等式. 命

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k), \quad S'_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad S''_n = \sum_{k=1}^{n} b_k,$$

显然有 $S_n = S'_n + S''_n$. 由假定, 数列 S'_n 和 S''_n 都是收敛的, 因而 S_n 也收敛, 且

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} S'_n + \lim_{n\to+\infty} S''_n,$$

即

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k+\sum_{k=1}^{\infty}b_k.$$

另一个等式可同法证明. □

这个定理告诉我们,收敛级数可以逐项相加.

例 3 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n+2^n}{3^n}$的和.

解 已知等比级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}=\frac{3}{4},\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{3^n}=3.$$

所以

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n+2^n}{3^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{3^n}=\frac{15}{4}.$$ □

与有限和类似的另一个性质是收敛级数的可结合性.

定理 3 设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 是一收敛级数. 如果将级数的项任意归組而不改变其先后的次序,得新级数

$$(a_1+\cdots+a_{n_1})+(a_{n_1+1}+\cdots+a_{n_2})+\cdots+(a_{n_{k-1}+1}+\cdots+a_{n_k})+\cdots, \tag{1}$$

则新级数也收敛,且与原级数有相同的和.

证明 设原级数的部分和数列为

$$S_1, S_2, \cdots, S_n, \cdots, \tag{2}$$

它有极限 S. 新级数的部分和数列显然是

$$S_{n_1}, S_{n_2}, \cdots, S_{n_k}, \cdots,$$

它是(2)的一个子数列,因而与(2)有相同的极限 S. □

必须注意,这个命题的逆命题是不成立的. 即若(1)收敛, 不

能断言原级数一定收敛. 级数

$$1-1+1-1+1-1+\cdots$$

便是一个例子: 如果把它两两结合起来, 便得一收敛级数

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots=0,$$

但它本身是发散的.

但若对(1)加上一些条件, 定理 3 的逆命题也能成立.

定理 4 如果(1)的在同一括号中的项都有相同的符号, 那么从(1)的收敛, 便能推出原级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛, 而且二者有相同的和.

证明 设(1)的部分和为

$$A_1, A_2, \cdots, A_k, \cdots,$$

由假定 $\lim\limits_{k\to+\infty}A_k=S$. 由于(1)的括号中的项都同号, 故当 n 由 n_{k-1} 变到 n_k 时, 相应的原级数的部分和 S_n 将单调地在 A_{k-1} 和 A_k 之间变动, 即

$$A_{k-1}\leqslant S_n\leqslant A_k \text{ 或 } A_k\leqslant S_n\leqslant A_{k-1} \quad (n_{k-1}<n\leqslant n_k).$$

命 $n\to+\infty$, 这时 $k\to+\infty$, 而 $\lim\limits_{k\to+\infty}A_k=\lim\limits_{k\to+\infty}A_{k-1}=S$, 所以

$$\lim_{n\to+\infty}S_n=S. \qquad \square$$

这个定理下面将要用到.

定理 5 在级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$前面去掉有限项或加上有限项, 不影响级数的敛散性.

证明 在上述级数前去掉 m 项得级数

$$\sum_{k=m+1}^{\infty}a_k=a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots.$$

记

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k, \qquad S'_{n-m}=\sum_{k=m+1}^{n}a_k,$$

则

$$S_n - S'_{n-m} = a_1 + \cdots + a_m$$

是一与 n 无关的常数，故数列 S_n 与 S'_{n-m} 有相同的敛散性，因而级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 与 $\sum_{k=m+1}^{\infty} a_k$ 有相同的敛散性．同样可以证明，加上有限项也不影响级数的敛散性． □

习　题

1．回答下列问题：

（1）级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的必要条件是什么？

（2）如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，将级数的项任意归组而不改变其先后次序所得的新级数是否收敛？若收敛，和原级数的和是否相同？反之，从新级数的收敛性能否推出原级数也收敛？若不能，则在何种条件下，从新级数的收敛性一定能保证原级数也收敛？

（3）任意改变级数的有限项是否会影响这级数的敛散性？若原级数收敛，是否会改变其和？

（4）若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都是发散的级数，则对下列级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n), \quad \sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n), \quad \sum_{n=1}^{\infty}a_n b_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}$$

的敛散性能得出什么结论？

2．证明下列级数发散：

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$．　　（2）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2+1}{3n^2-2}$．

（3）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$．　　（4）$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$．