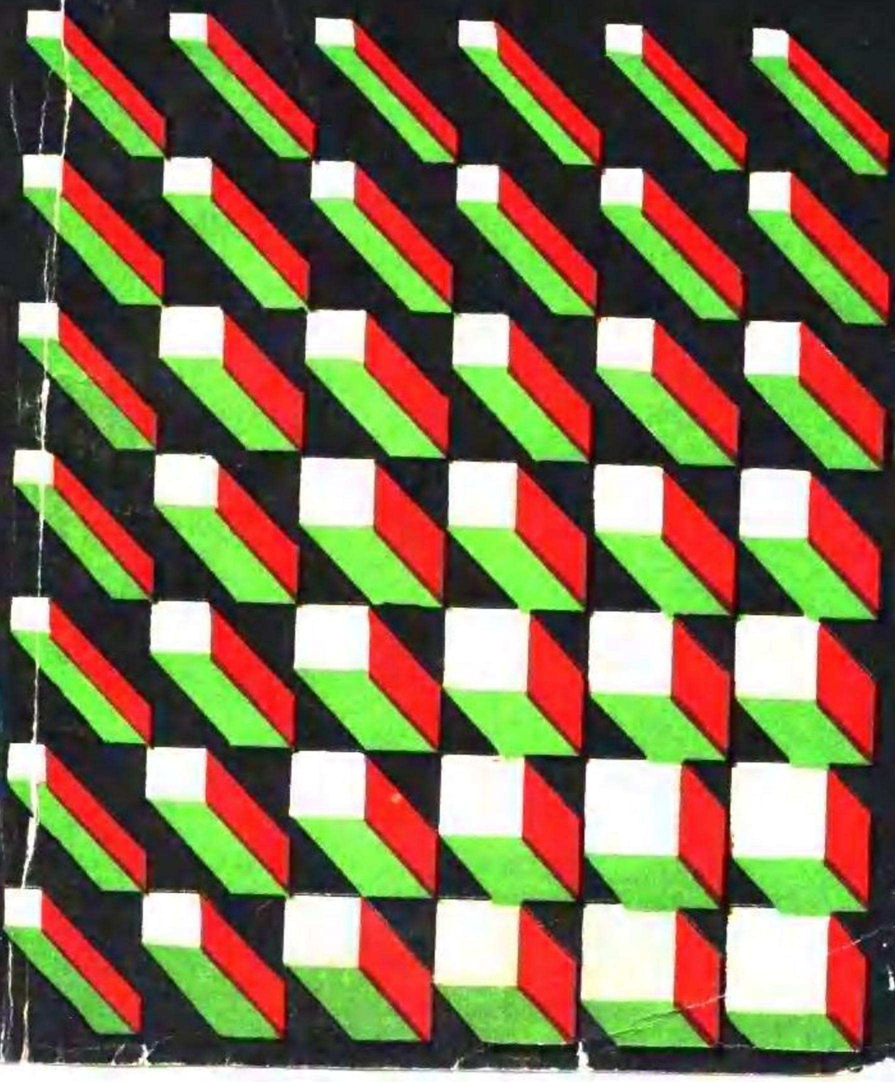
复变函数论

FUBIANHANSHULUN

●陕西师范大学出版社



复变函数论

姚文信　贠昌年
杨　迁　任亲谋　编著

陕西师范大学出版社

（陕）新登字 008 号

复变函数论

姚文信　贠昌年
杨　迁　任亲谋　编著

*
陕西师范大学出版社出版发行
（西安市陕西师大 120 信箱）
陕西省新华书店经销　西安电子科技大学印刷厂印刷
*
开本 787×1092 1/32　印张 9.5　字数 196 千
1988 年12月第 1 版　1992年 6 月第 2 次印刷
印数：2501—5500
ISBN 7-5613-0197-9
G·184 定价：3.90 元

内 容 简 介

本书是根据 1977 年全国高等学校理科数学教材会议制订的《复变函数论教材编写大纲》，并参照 1987 年国家教委召开的“复变函数教改会议”精神编写而成的。内容包括：复数与平面点集、解析函数、复变函数积分、级数、留数、无穷乘积、解析开拓、共形映照等单复变函数的基本理论和基本方法。本书编写力求重点突出，难点分散，并配有精选的例题、习题及其答案和必要的提示，文字简洁。

本书可供师范院校数学系学生、函授生及其他相应专业学生的复变函数论教材或教学参考用书。

序

本书是我们根据1977年全国高等学校理科数学教材会议制订的《复变函数论教材编写大纲》编写而成的；参照1987年国家教委在武汉召开的“复函教改会议”精神，结合多次试用的情况，进行了三次修改。它可以作为高等院校数学专业复变函数论课程的教学用书，以及其它高等院校有关专业的教学参考书。如果配合使用为该书所编写的《复变函数论教学指导书》，则可作为函授教学用书。

对凡属与数学分析相平行的概念和内容，如极限、连续、微分、数值级数等，本书只予以简要地叙述，而突出它们在数学分析与复变函数中的相似与不同之处。

对于复变函数论中的基本理论，如解析性的充要条件、柯西积分理论、孤立奇点的理论和留数定理及其应用等的叙述，较为系统和严谨，藉以培养读者严格的推理能力。

多值函数以及它的单值解析分支是复变函数的教学难点，然而，它又是贯穿于全书之中的重要组成部分。所以我们将这一内容分两步来阐述：先在函数概念部分（本书第二章）给出多值函数的严格定义与幅角连续变动原则，对具体的几个基本初等多值函数进行讨论，这样的讨论虽然是初步的，但不失其科学性，还可以丰富各章的实际例子。然后在解析开拓部分（本书第七章）用解析开拓的观点对它再进行较一般的阐述。并对初等多值解析函数建立相应的黎曼曲面。

我们把一般分散在几部分的关于共形映照的内容集中于

第八章，这样，内容的衔接会自然些，而且不会影响其它部分的论述。多角形区域的共形映照公式的证明要用到解析开拓，书中虽然给予详细的证明，但教师是可以酌情删去的。

无穷乘积是与分析学中无穷级数同等重要的工具，用它来表示函数，研究函数性质有许多独到之处，因此，本书中增加了这部分内容。

本书配备了一定数量通过精选的例题和习题，并给出答案和必要的提示，这些习题的详细参考解法将编入本书的教学指导书，供教师选用，以便读者自学。

本书分别由姚文信（第一、二、三章），杨迁（第四、五章），任亲谋（第六章），负昌年（第七、八章）编写，最后由姚文信、负昌年负责全书串联、修改、编辑定稿。由于我们的水平有限，难免有不妥和错误之处，希望专家和读者给予批评指正。

编　者

1987年6月

目　　录

第一章　复数与平面点集

第二章　解析函数

第三章 复变函数的积分

第四章 解析函数的级数展式

第五章 留　　数

第六章 无 穷 乘 积

第七章 解 析 开 拓

第八章 共 形 映 照

第一章　复数与平面点集

复数、复平面点集是复变函数论的予备知识，读者在中学代数里已经知道复数的概念、运算及其几何表示法。为了今后学习方便，我们在这里概括地叙述一下复数的概念和一些基本性质。复平面点集，复数序列的极限及其有关的一些概念、定理，则可把它们看成数学分析中相应的概念、定理在复数范围内的推广。

§1　复数的概念

1. 复数

早在 16 世纪初期，数学家们在解二次方程：

$$x^2+1=0$$

时，发现不存在任何实数，其平方等于 -1。因此，就促使人们引入符号$\sqrt{-1}$或 i，$i^2=-1$，（但暂时还是形式上的），这是 17 到 18 世纪的数学家的想法，并把它带到计算中去，出乎意料地得到了很好的应用。然而，人们始终未能明确认识到这种新数已导致数域的扩充，这一点从他们称 $\sqrt{-1}$ 为“虚数”得到充分证实。甚至一贯被人们誉为“复数理论”的奠基人高斯(Gauss)也无例外地使用“虚数”一词，用 i 表示 $\sqrt{-1}$ 则是欧拉(Euler)首先引进的，直至今天，人们还普遍采用这些记号。

我们称形如 $z=x+iy$ 的数为复数。其中 x 和 y 均为实数，i 称为虚数单位，$i^2=-1$. x 和 y 分别称为复数 z 的实

部和虚部，记为

$$x = \mathrm{Re}z,\quad y = \mathrm{Im}z \tag{*}$$

当 $\mathrm{Im}z=0$ 时，$z=\mathrm{Re}z$ 为实数。因此，实数全体可看成复数的一部分。复数则是实数的扩充.当 $\mathrm{Re}z=0$ 时，$z=\mathrm{Im}z$ 称为纯虚数，

两个复数 z_1 和 z_2 当其实部和虚部分别相等时，这两个复数称为相等，记为 $z_1=z_2$，即：

$z_1=x_1+iy_1$，$z_2=x_2+iy_2$，那么 $z_1=z_2$ 的充分且必要条件是 $x_1=x_2$；$y_1=y_2$。

2. 复数的四则运算

由于实数是复数的特例，因此，规定复数四则运算(即加、减、乘、除运算)时，除必需满足一些基本运算法则外，还要求复数运算法则实施于实数时，能够和实数运算的结果相符合，且能满足实数运算的基本规律。

我们规定：复数的加(减)法按其实部与实部相加(减)，虚部与虚部相加(减)。即复数 $z_1=x_1+iy_1$ 与 $z_2=x_2+iy_2$ 相加(减)的法则是：

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2).$$

结果为复数，我们称复数 z_1+z_2 为 z_1 与 z_2 的和，同样，称复数 z_1-z_2 为 z_1 与 z_2 的差。

容易验证复数的加法满足交换律，而减法是加法的逆运算。

复数的乘法按多项式乘法进行，仅须将结果中的 i^2 换成

(*)符号“Re”是拉丁文字 Realis(实数)的前两个字母。同样，符号“Im”是拉丁文字 Imaginarius(虚数)的前两个字母。

-1。即复数 $z_1=x_1+iy_1$ 与 $z_2=x_2+iy_2$ 相乘

$$z_1z_2=(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)$$
$$=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)。$$

结果为复数，称它为复数 z_1 与 z_2 的乘积。

复数的乘法满足交换律，结合律，并且满足乘法对加法的分配律，这些都是不难验证的。

两个复数相除(除数不为0)时，先把它写成分式的形式，用一个与分母的实部相等，而虚部相差一个符号的复数同乘分子分母，再进行化简而得。即复数 $z_1=x_1+iy_1$，$z_2=x_2+iy_2\neq 0$，

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)}$$

$$=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2},$$

结果仍为复数，我们称它为 z_1 被 z_2 所除的商。这样的除法是乘法的逆运算。

全体复数在规定了上述四则运算后构成一个域(体)，称为复数域(体)。和实数域(体)不同，复数域(体)不能规定复数的大小。

3. 共轭复数　绝对值

共轭复数

设 $z=x+iy$，则称 $x-iy$ 为 z 的共轭复数。用符号 $\bar{z}$ 表示，即

$$\bar{z}=x-iy。$$

显然，若 $\bar{z}$ 是 z 的共轭复数，则 z 也必是 $\bar{z}$ 的共轭复数，所以，$\bar{\bar{z}}=\overline{(\bar{z})}=z$。换句话说 z 与 $\bar{z}$ 互为共轭复数。

容易证明，z 是实数的充分和必要条件是 $z=\bar{z}$。

因为，当 z 为实数时，$\mathrm{Im}z=0$，所以，$z=\bar{z}$。

反之，若 $z=\bar{z}$，则 $\mathrm{Im}z=-\mathrm{Im}z$，故 $\mathrm{Im}z=0$，即 z 为实数。

设 $z_1=x_1+iy_1$，$z_2=x_2+iy_2$，则它们的共轭复数具有下列性质：

1° $\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$。

证明
$$\begin{aligned}\overline{z_1+z_2}&=\overline{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)}\\&=(x_1+x_2)-i(y_1+y_2)\\&=(x_1-iy_1)+(x_2-iy_2)=\bar{z}_1+\bar{z}_2.\end{aligned}$$

2° $\overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$

证明
$$\begin{aligned}\overline{z_1\cdot z_2}&=\overline{(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_2y_1+x_1y_2)}\\&=(x_1x_2-y_1y_2)-i(x_2y_1+x_1y_2)\end{aligned}$$

而
$$\begin{aligned}\bar{z}_1\bar{z}_2&=\overline{(x_1+iy_1)}\,\overline{(x_2+iy_2)}\\&=(x_1-iy_1)(x_2-iy_2)\\&=(x_1x_2-y_1y_2)-i(x_2y_1+x_1y_2).\end{aligned}$$

所以
$$\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2.$$

3° 当 $z_2\neq0$，则$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$。

证明 令$\frac{z_1}{z_2}=z_3$，则 $z_1=z_2z_3$。

由2°，
$$\bar{z}_1=\overline{z_2z_3}=\bar{z}_2\bar{z}_3.$$

所以
$$\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}=\bar{z}_3=\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}.$$

4° 几个重要的绝对不等式

(a) $-|z|\leqslant \mathrm{Re}z\leqslant|z|$, $-|z|\leqslant \mathrm{Im}z\leqslant|z|$.

(b) $|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$*

(c) $|z_1-z_2|\geqslant||z_1|-|z_2||$.

证明 (a)可以由绝对值的定义直接得到，这里不再重复。现在证明(b)和(c)。

$$\begin{aligned}|z_1+z_2|^2&=(z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)}\\&=(z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)\\&=z_1\bar{z}_1+(z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2)+z_2\bar{z}_2\\&=|z_1|^2+|z_2|^2+2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2).\end{aligned}$$

由(a)

$$\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)\leqslant|z_1\bar{z}_2|=|z_1||z_2|,$$

所以

$$|z_1+z_2|^2\leqslant(|z_1|+|z_2|)^2,$$

即 $|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$。从而(b)得证。

由于

$$|z_1|=|(z_1-z_2)+z_2|\leqslant|z_1-z_2|+|z_2|,$$

所以

$$|z_1-z_2|\geqslant|z_1|-|z_2|.$$

同理可证，

$$|z_1-z_2|\geqslant|z_2|-|z_1|,$$

故 $|z_1-z_2|\geqslant||z_1|-|z_2||$.

从而(c)得证。

4. 复数的几何表示

(b)* 式通常称为三角不等式，可以用几何方法给予证明，读者可以自行完成(参看本节4)。

在平面上取 O 点和 M 点，以 O 点为原点，过 OM 的直线为 x 轴，过 O 点与 OM 垂直的直线为 y 轴，以 OM 为单位长，于是任一复数 $z=x+iy$ 可以在这个平面上用以 x 为横坐标、以 y 为纵坐标的点 z 来表示。

反之，对平面上任一点 $z(x,y)$，我们以复数 $x+iy$ 与之相对应。于是全部复数与平面上的全部点建立了一一对应关系。这样规定的平面称为复平面。x 轴称为实轴，y 轴称为虚轴。图（1-1）

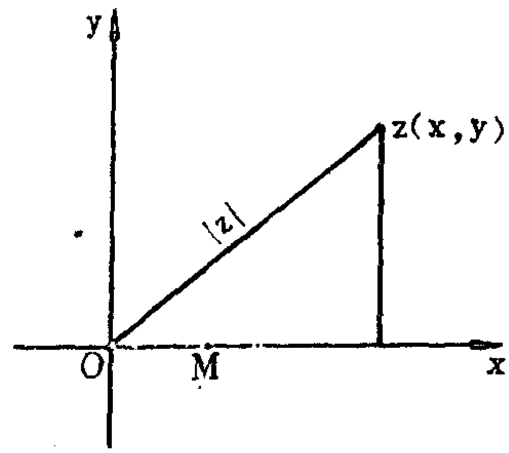


图 1-1

引入复平面后，复数和点之间建立了联系，复数的许多结果得到几何直观的解释，复数与"点"今后我们将不再区别而加以引用。例如，"点 $x+iy$"，"端点为 z_1、z_2 的线段"等等。

在复平面上，如果我们再引进由原点到点 $z=x+iy$ 的向量，复数 0 看成零向量，于是复数全体与复平面上这样建立的向量全体构成一一对应关系，这种关系还使复数的加（减）法与向量的加（减）法之间的结果保持一致。

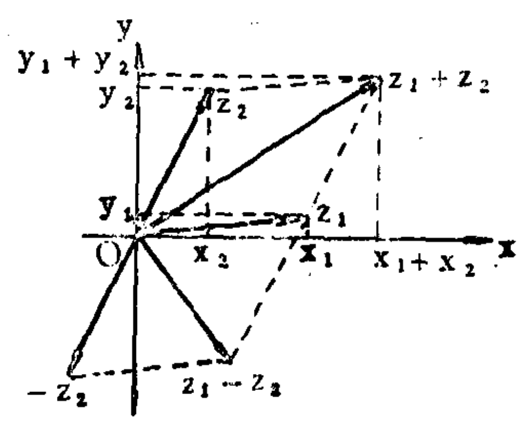


图 1-2

例如，$z_1=x_1+iy_1$，

$z_2=x_2+iy_2$