

复变函数论

FUBIANHANSHULUN

●陕西师范大学出版社



复变函数论

姚文信 负昌年
杨 迁 任亲谋 编著

陕西师范大学出版社

(陕) 新登字 008 号

复变函数论

姚文信 负昌年 编著
杨 迂 任亲谋

*

陕西师范大学出版社出版发行

(西安市陕西师大 120 信箱)

陕西省新华书店经销 西安电子科技大学印刷厂印刷

*

开本 787×1092 1/32 印张 9.5 字数 196 千

1988 年 12 月第 1 版 1992 年 6 月第 2 次印刷

印数: 2501—5500

ISBN 7-5613-0197-9

G·184 定价: 3.90 元

内 容 简 介

本书是根据 1977 年全国高等学校理科数学教材会议制订的《复变函数论教材编写大纲》，并参照 1987 年国家教委召开的“复变函数教改会议”精神编写而成的。内容包括：复数与平面点集、解析函数、复变函数积分、级数、留数、无穷乘积、解析开拓、共形映照等单复变函数的基本理论和基本方法。本书编写力求重点突出，难点分散，并配有精选的例题、习题及其答案和必要的提示，文字简洁。

本书可供师范院校数学系学生、函授生及其他相应专业学生的复变函数论教材或教学参考用书。

序

本书是我们根据1977年全国高等学校理科数学教材会议制订的《复变函数论教材编写大纲》编写而成的；参照1987年国家教委在武汉召开的“复函教改会议”精神，结合多次试用的情况，进行了三次修改。它可以作为高等院校数学专业复变函数论课程的教学用书，以及其它高等院校有关专业的教学参考书。如果配合使用为该书所编写的《复变函数论教学指导书》，则可作为函授教学用书。

对凡属与数学分析相平行的概念和内容，如极限、连续、微分、数值级数等，本书只予以简要地叙述，而突出它们在数学分析与复变函数中的相似与不同之处。

对于复变函数论中的基本理论，如解析性的充要条件、柯西积分理论、孤立奇点的理论和留数定理及其应用等的叙述，较为系统和严谨，藉以培养读者严格的推理能力。

多值函数以及它的单值解析分支是复变函数的教学难点，然而，它又是贯穿于全书之中的重要组成部分。所以我们将这一内容分两步来阐述：先在函数概念部分（本书第二章）给出多值函数的严格定义与幅角连续变动原则，对具体的几个基本初等多值函数进行讨论，这样的讨论虽然是初步的，但不失其科学性，还可以丰富各章的实际例子。然后在解析开拓部分（本书第七章）用解析开拓的观点对它再进行较一般的阐述。并对初等多值解析函数建立相应的黎曼曲面。

我们把一般分散在几部分的关于共形映照的内容集中于

第八章，这样，内容的衔接会自然些，而且不会影响其它部分的论述。多角形区域的共形映照公式的证明要用到解析开拓，书中虽然给予详细的证明，但教师是可以酌情删去的。

无穷乘积是与分析学中无穷级数同等重要的工具，用它来表示函数，研究函数性质有许多独到之处，因此，本书中增加了这部分内容。

本书配备了一定数量通过精选的例题和习题，并给出答案和必要的提示，这些习题的详细参考解法将编入本书的教学指导书，供教师选用，以便读者自学。

本书分别由姚文信(第一、二、三章)，杨迁(第四、五章)，任亲谋(第六章)，负昌年(第七、八章)编写，最后由姚文信、负昌年负责全书串联、修改、编辑定稿。由于我们的水平有限，难免有不妥和错误之处，希望专家和读者给予批评指正。

编 者

1987年6月

目 录

第一章 复数与平面点集

§ 1 复数的概念	(1)
1. 复数	(1)
2. 复数的四则运算	(2)
3. 共轭复数 绝对值	(3)
4. 复数的几何表示	(5)
5. 复数的幅角	(7)
6. 复数的乘方与开方	(9)
7. 复数球面与无穷远点	(12)
§ 2 平面点集	(13)
1. 点集概念	(13)
2. 邻域 内点 界点 外点 聚点 孤立点	(14)
3. 开集 闭集 有界集 无界集	(15)
4. 区域 曲线	(16)
5. 单连通区域 复连通区域	(18)
§ 3 序列 覆盖定理 点集的距离	(19)
1. 序列	(19)
2. 覆盖定理	(22)
3. 点集的距离	(23)
第一章习题	(24)

第二章 解析函数

§ 1 复变函数	(28)
1. 复变函数的概念	(28)

2. 复变函数的极限和连续	(32)
3. 复变函数的导数与解析函数	(36)
4. 求导公式	(39)
5. 柯西 — 黎曼条件	(41)
§ 2 初等解析函数	(46)
1. 指数函数	(47)
2. 三角函数	(48)
3. 双曲函数	(51)
4. 根式函数	(55)
5. 对数函数	(61)
6. 反三角函数和反双曲线函数	(66)
§ 3 调和函数	(69)
第二章习题	(73)

第三章 复变函数的积分

§ 1 复变函数积分概念	(77)
1. 复变函数积分概念	(77)
2. 积分的基本性质	(80)
3. 沿逐段光滑曲线 C 的积分计算	(82)
§ 2 柯西积分定理	(84)
1. 柯西积分定理	(84)
2. 柯西积分定理在复连通区域的推广	(91)
3. 不定积分	(93)
§ 3 柯西积分公式	(95)
1. 柯西积分公式	(95)
2. 解析函数的各阶导数	(98)
3. 柯西不等式	(103)
§ 4* 调和函数的中值定理与波阿松积分公式	(105)

第三章习题	(107)
-------------	-------

第四章 解析函数的级数展式

§ 1 函数项级数	(112)
1. 复数项级数	(112)
2. 函数项级数	(113)
§ 2 幂级数	(119)
1. 幂级数的收敛圆	(120)
2. 和函数的解析性	(124)
§ 3 解析函数的泰勒展式	(124)
1. 解析函数的泰勒 (Taylor) 展式	(124)
2. 一些初等函数的泰勒展式	(127)
3. 零点的孤立性与唯一性定理	(129)
4. 最大模原理	(133)
§ 4 解析函数的罗朗 (Laurent) 展式	(135)
§ 5 解析函数的孤立奇点	(144)
1. 孤立奇点的概念	(144)
2. $f(z)$ 在孤立奇点 z_0 邻域内的性质	(145)
§ 6 整函数与亚纯函数	(152)
1. 整函数	(152)
2. 亚纯函数	(154)
第四章习题	(155)

第五章 留 数

§ 1 留数	(160)
1. 留数的概念	(160)
2. 留数的计算	(161)
3. 无穷远点的留数	(163)

4. 留数基本定理.....	(165)
§ 2 幅角原理.....	(167)
§ 3 应用留数计算积分.....	(173)
第五章习题	(178)

第六章 无穷乘积

§ 1 无穷乘积.....	(181)
1. 无穷乘积的收敛与发散.....	(181)
2. 无穷乘积收敛性的基本判别法.....	(183)
§ 2 函数项的无穷乘积.....	(186)
§ 3 整函数的无穷乘积展式.....	(189)
1. 整函数的无穷乘积展式.....	(189)
2. 把亚纯函数表示为两个整函数之比.....	(199)
第六章习题	(199)

第七章 解析开拓

§ 1 解析开拓的原理.....	(201)
1. 解析开拓的概念.....	(201)
2. 用幂级数作解析开拓.....	(203)
3. 越过区域边界的解析开拓.....	(206)
§ 2 完全解析函数.....	(212)
1. 一般解析函数与完全解析函数.....	(212)
2. 多值解析函数及其单值解析分支.....	(214)
§ 3 多值解析函数相应的黎曼曲面.....	(219)
第七章习题	(223)

第八章 共形映照

§ 1 共形映照的概念.....	(227)
------------------	-------

1. 解析函数的几个有关性质	(227)
2. 导数的几何意义	(229)
3. 共形映照的概念	(233)
§ 2 分式线性函数	(235)
1. 分式线性函数的分解及其共形性	(235)
2. 分式线性函数的保圆性	(236)
3. 分式线性函数的保交比性	(237)
4. 分式线性函数的保对称点性	(239)
5. 几个重要的分式线性函数	(240)
§ 3 一些初等函数所形成的共形映照	(241)
1. 指数函数 $w = e^z$	(241)
2. 对数函数 $w = \text{Log} z$ 的单值解析分支	(242)
3. 幂函数 $w = z^\alpha$ (α 为非整数的正数)	(242)
4. 儒科夫斯基函数 $w = R(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$	(244)
5. 儒科夫斯基函数的反函数 $w = R^{-1}(z)$ 的单值解析分支	(246)
§ 4 共形映照的基本定理	(246)
1. 黎曼映照定理	(246)
2. 共形映照的边界对应定理	(251)
3. 实例	(254)
§ 5 多边形映照公式	(260)
1. 克利斯托弗—希瓦尔兹公式	(260)
2. 退化情形	(269)
第八章习题	(271)

附录

习题答案与提示	(275)
---------	-------

第一章 复数与平面点集

复数、复平面点集是复变函数论的预备知识，读者在中学代数里已经知道复数的概念、运算及其几何表示法。为了今后学习方便，我们在这里概括地叙述一下复数的概念和一些基本性质。复平面点集，复数序列的极限及其有关的一些概念、定理，则可把它们看成数学分析中相应的概念、定理在复数范围内的推广。

§ 1 复数的概念

1. 复数

早在 16 世纪初期，数学家们在解二次方程：

$$x^2 + 1 = 0$$

时，发现不存在任何实数，其平方等于 -1 。因此，就促使人们引入符号 $\sqrt{-1}$ 或 i ， $i^2 = -1$ ，（但暂时还是形式上的），这是 17 到 18 世纪的数学家的想法，并把它带到计算中去，出乎意料地得到了很好的应用。然而，人们始终未能明确认识到这种新数已导致数域的扩充，这一点从他们称 $\sqrt{-1}$ 为“虚数”得到充分证实。甚至一贯被人们誉为“复数理论”的奠基人高斯(Gauss)也无例外地使用“虚数”一词，用 i 表示 $\sqrt{-1}$ 则是欧拉(Euler)首先引进的，直至今天，人们还普遍采用这些记号。

我们称形如 $z = x + iy$ 的数为复数。其中 x 和 y 均为实数， i 称为虚数单位， $i^2 = -1$ 。 x 和 y 分别称为复数 z 的实

部和虚部, 记为

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z \quad (*)$$

当 $\operatorname{Im} z = 0$ 时, $z = \operatorname{Re} z$ 为实数。因此, 实数全体可看成复数的一部分。复数则是实数的扩充。当 $\operatorname{Re} z = 0$ 时, $z = \operatorname{Im} z$ 称为纯虚数。

两个复数 z_1 和 z_2 当其实部和虚部分别相等时, 这两个复数称为相等, 记为 $z_1 = z_2$, 即:

$z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, 那么 $z_1 = z_2$ 的充分且必要条件是 $x_1 = x_2$; $y_1 = y_2$ 。

2. 复数的四则运算

由于实数是复数的特例, 因此, 规定复数四则运算(即加、减、乘、除运算)时, 除必需满足一些基本运算法则外, 还要求复数运算法则实施于实数时, 能够和实数运算的结果相符合, 且能满足实数运算的基本规律。

我们规定: 复数的加(减)法按其实部与实部相加(减), 虚部与虚部相加(减)。即复数 $z_1 = x_1 + iy_1$ 与 $z_2 = x_2 + iy_2$ 相加(减)的法则是:

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)。$$

结果为复数, 我们称复数 $z_1 + z_2$ 为 z_1 与 z_2 的和, 同样, 称复数 $z_1 - z_2$ 为 z_1 与 z_2 的差。

容易验证复数的加法满足交换律, 而减法是加法的逆运算。

复数的乘法按多项式乘法进行, 仅须将结果中的 i^2 换成

(*) 符号“Re”是拉丁文字 Realis(实数)的前两个字母。同样, 符号“Im”是拉丁文字 Imaginarius(虚数)的前两个字母。

-1. 即复数 $z_1 = x_1 + iy_1$ 与 $z_2 = x_2 + iy_2$ 相乘

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1). \end{aligned}$$

结果为复数，称它为复数 z_1 与 z_2 的乘积。

复数的乘法满足交换律，结合律，并且满足乘法对加法的分配律，这些都是不难验证的。

两个复数相除(除数不为0)时，先把它写成分式的形式，用一个与分母的实部相等，而虚部相差一个符号的复数同乘分子分母，再进行化简而得。即复数 $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2 \neq 0$,

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} \\ &= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \end{aligned}$$

结果仍为复数，我们称它为 z_1 被 z_2 所除的商。这样的除法是乘法的逆运算。

全体复数在规定了上述四则运算后构成一个域(体)，称为复数域(体)。和实数域(体)不同，复数域(体)不能规定复数的大小。

3. 共轭复数 绝对值

共轭复数

设 $z = x + iy$ ，则称 $x - iy$ 为 z 的共轭复数。用符号 $\bar{z}$ 表示，即

$$\bar{z} = x - iy.$$

显然，若 $\bar{z}$ 是 z 的共轭复数，则 z 也必是 $\bar{z}$ 的共轭复数，所以， $\bar{\bar{z}} = (\bar{z}) = z$ 。换句话说 z 与 $\bar{z}$ 互为共轭复数。

容易证明, z 是实数的充分和必要条件是 $z = \bar{z}$.

因为, 当 z 为实数时, $\operatorname{Im} z = 0$, 所以, $z = \bar{z}$.

反之, 若 $z = \bar{z}$, 则 $\operatorname{Im} z = -\operatorname{Im} z$, 故 $\operatorname{Im} z = 0$, 即 z 为实数.

设 $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, 则它们的共轭复数具有下列性质:

$$1^\circ \quad \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2.$$

$$\begin{aligned}\text{证明} \quad \overline{z_1 + z_2} &= \overline{(x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)} \\ &= (x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2) \\ &= (x_1 - iy_1) + (x_2 - iy_2) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2.\end{aligned}$$

$$2^\circ \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$

$$\begin{aligned}\text{证明} \quad \overline{z_1 \cdot z_2} &= \overline{(x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_2 y_1 + x_1 y_2)} \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) - i(x_2 y_1 + x_1 y_2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{而} \quad \bar{z}_1 \bar{z}_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) \\ &= (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) - i(x_2 y_1 + x_1 y_2).\end{aligned}$$

所以

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2.$$

$$3^\circ \quad \text{当 } z_2 \neq 0, \text{ 则 } \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}.$$

$$\text{证明} \quad \text{令 } \frac{z_1}{z_2} = z_3, \text{ 则 } z_1 = z_2 z_3.$$

$$\text{由 } 2^\circ, \quad \bar{z}_1 = \overline{z_2 z_3} = \bar{z}_2 \bar{z}_3.$$

所以

$$\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} = \bar{z}_3 = \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}.$$

4° 几个重要的绝对不等式

$$(a) -|z| \leq \operatorname{Re} z \leq |z|, \quad -|z| \leq \operatorname{Im} z \leq |z|.$$

$$(b) |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|^{*}$$

$$(c) |z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||.$$

证明 (a)可以由绝对值的定义直接得到, 这里不再重复. 现在证明(b)和(c).

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) \\ &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) \\ &= z_1 \overline{z_1} + (z_1 \overline{z_2} + \overline{z_1} z_2) + z_2 \overline{z_2} \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2}). \end{aligned}$$

由(a)

$$\operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2}) \leq |z_1 \overline{z_2}| = |z_1| |z_2|,$$

所以

$$|z_1 + z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2,$$

即 $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$. 从而(b)得证.

由于

$$|z_1| = |(z_1 - z_2) + z_2| \leq |z_1 - z_2| + |z_2|,$$

所以

$$|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|.$$

同理可证,

$$|z_1 - z_2| \geq |z_2| - |z_1|,$$

故 $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$.

从而(c)得证.

4. 复数的几何表示

(b)* 式通常称为三角不等式, 可以用几何方法给予证明, 读者可以自行完成(参看本节4).

在平面上取 O 点和 M 点，以 O 点为原点，过 OM 的直线为 x 轴，过 O 点与 OM 垂直的直线为 y 轴，以 OM 为单位长，于是任一复数 $z = x + iy$ 可以在这个平面上用以 x 为横坐标，以 y 为纵坐标的点 z 来表示。

反之，对平面上任一点 $z(x, y)$ ，我们以复数 $x + iy$ 与之相对应。于是全部复数与平面上的全部点建立了一一对应关系。这样规定的平面称为复平面。 x 轴称为实轴， y 轴称为虚轴。图 (1-1)

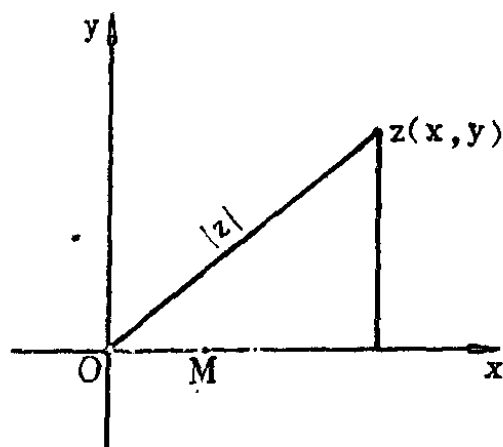


图 1-1

引入复平面后，复数和点之间建立了联系，复数的许多结果得到几何直观的解释，复数与“点”今后我们将不再区别而加以引用。例如，“点 $x + iy$ ”，“端点为 z_1 、 z_2 的线段”等等。

在复平面上，如果我们再引进由原点到点 $z = x + iy$ 的向量，复数 0 看成零向量，于是复数全体与复平面上这样建立的向量全体构成一一对应关系，这种关系还使复数的加（减）法与向量的加（减）法之间的结果保持一致。

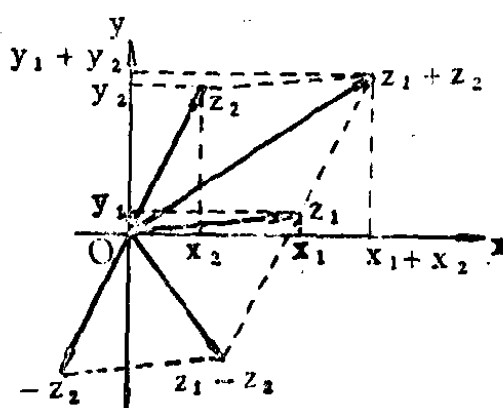


图 1-2

例如， $z_1 = x_1 + iy_1$ ，
 $z_2 = x_2 + iy_2$