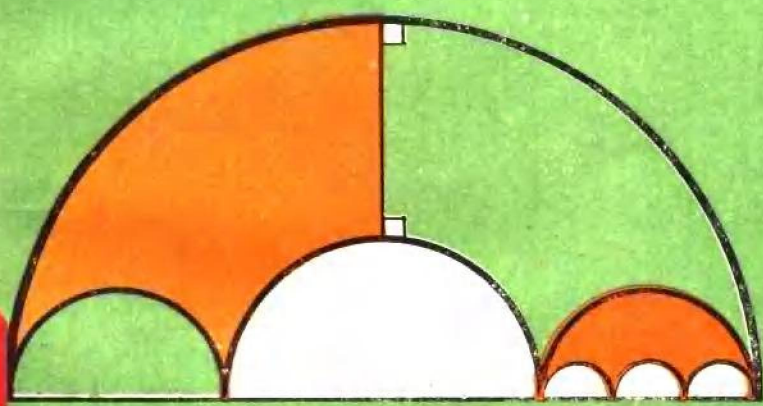


离散群几何

[英] A.F. Beardon 著 杨维奇 译



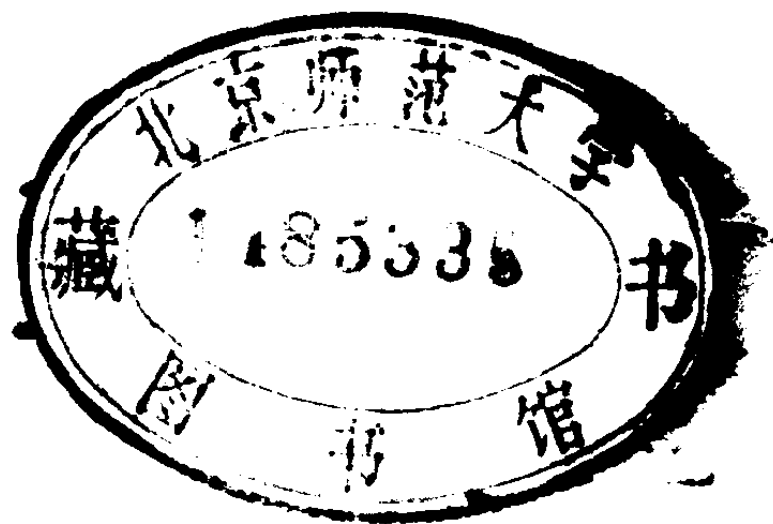
北京理工大学出版社

离散群几何

〔英〕A.F.Beardon 著

杨维奇 译

JU1 / 133 / 01



北京理工大学出版社

内 容 简 介

本书是美国 *Spring-Verlag* 出版社出版的数学研究生系列教材之一，介绍离散 *Möbius* 群上的几何学理论。全书共分十一章，内容包括预备知识、矩阵、 R^n 上的 *Möbius* 变换、复 *Möbius* 变换、不连续群、*Riemann* 曲面、双曲几何、*Fuchs* 群、基本域、有限生成群、*Fuchs* 群上的万有约束。本书既反映了最新的研究成果，又深入浅出易于阅读。

本书可供大学数学专业高年级学生、研究生、教师和数学工作者阅读和参考。

离 散 群 几 何

〔英〕 A.F. Beardon 著

杨维奇 译

*

北京理工大学出版社出版

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

北京密云华都印刷厂印装

*

787×1092毫米 32开本 15.125印张 336千字

1988年12月第一版 1988年12月第一次印刷

ISBN 7-81013-083-8/O·20

印数：1-3000册 定价：2.95元

中文版序言

很高兴能为我的书的中译本作序。

由衷感谢杨维奇教授把我的书译成中文，我为出版此书的中文版本而深感荣幸。

本书描述了一个十分活跃的数学领域。我期待着有一天能访问中国，会见一些对这一领域有共同兴趣的数学家。

Alan F. Beardon

1988年10月于剑桥大学

序 言

本书可作为离散 *Möbius* 变换群上的几何学的一个导引。这一课题的研究已有一百多年的历史，其侧重点在不断地变化着，最近的发展则与三维流形的理论相关联；要了解其间的变化，不妨读一读早年的 Poincaré 的论文〔77〕和最近的 Thurston 的论文〔101〕。大约在1940年，出现了著名的 Fenchel—Nielsen 手稿，可惜这一手稿未曾印刷且已散失。本书在介绍新近结果的同时，还再现了手稿中提出的某些漂亮的几何思想。

作者确信，几何解释对于充分理解问题的实质极为重要，不论用矩阵来作证明会是多么简单，采用几何证明往往更加有益。本书正是在这一思想的指导下写成的。此外，书中的结果尽可能以共轭变换下不变的形式给出，以便使结果的内在性质更加明了。尽管本课题的研究对象是双曲几何的等距映射群，但许多著述却是通过欧氏几何和欧氏估计进行阐述的。近几年研究工作的进展再次表明有必要运用双曲几何。因此我在书中写了一章关于解析的（不是公理化的）双曲几何，其内容相当丰富，作者希望它能成为平面双曲几何公式的“字典”，这就使得这一章因具有本身特有的用途而引人注目。为此，这一章在编排上也与其余各章有所不同，内中有相当多的节很短，每节只讨论一个特殊的论题或只提供一个特殊的结果。

本书既然是作为一个导引，作者不惜给出详细的（有时甚至是初等的）证明。事实上，以往文献中所出现的许多几何错误，多半就是由于忽略了细节所致。作者已尽量使阅读本书所需要的预备知识减少到最低限度；并且只要觉得有必要，总可从不同的观点出发讨论同一论题，这样做的原因之一是考虑到读者不一定都会逐页阅读本书。书中所列参考文献是不全面的，而且不一定是给出结果的最初出处。为便于查阅，每一节中的定理、定义等等作了统一编号。

多年来，我曾同许多朋友和同事探讨过这一课题，在此谨向他们致以深切的谢意。特别要感谢 P.J.Nicholls 和 P.Waterman，他们阅读了本书的初稿；衷心感谢 F.W.Gehring 教授，他热情鼓励我撰写这本书，在他的指导下我们组织了关于书稿各个部份的一系列讨论。最后要感谢 L.V.Ahlfors 的论文和讲义所给予我的启示和帮助。本书或许还会存在一些错误，这概由我本人负责。

A.F. Beardon

1982年 于剑桥

目 录

第一章 预备知识

§ 1.1 记号	(1)
§ 1.2 不等式	(2)
§ 1.3 代数	(3)
§ 1.4 拓扑	(4)
§ 1.5 拓扑群	(6)
§ 1.6 分析	(8)

第二章 矩阵

§ 2.1 非奇异矩阵	(12)
§ 2.2 度量结构	(14)
§ 2.3 离散群	(18)
§ 2.4 四元数	(20)
§ 2.5 酉矩阵	(23)

第三章 R^n 上的 $Möbius$ 变换

§ 3.1 R^n 上的 $Möbius$ 群	(25)
§ 3.2 $Möbius$ 变换的性质	(35)
§ 3.3 $Poincaré$ 扩张	(42)
§ 3.4 单位球的自映射	(47)
§ 3.5 $Möbius$ 变换的一般形式	(53)
§ 3.6 偏差定理	(55)
§ 3.7 拓扑 结构	(60)

§ 3.8 注记	(73)
----------------	------

第四章 复 $Möbius$ 变换

§ 4.1 用四元数表示	(74)
§ 4.2 用矩阵表示	(80)
§ 4.3 不动点与共轭等价类	(86)
§ 4.4 交比	(101)
§ 4.5 $\mathcal{M}$ 上的拓扑	(105)
§ 4.6 注记	(111)

第五章 不连续群

§ 5.1 初等群	(112)
§ 5.2 具有一个不变圆盘的群	(124)
§ 5.3 不连续群	(127)
§ 5.4 $Jorgensen$ 不等式	(141)
§ 5.5 注记	(156)

第六章 黎曼曲面

§ 6.1 黎曼曲面	(158)
§ 6.2 商空间	(160)
§ 6.3 稳定集	(167)

第七章 双曲几何

基本概念

§ 7.1 双曲平面	(171)
§ 7.2 双曲度量	(174)
§ 7.3 测地线	(182)
§ 7.4 等距映射	(185)
§ 7.5 凸集	(188)
§ 7.6 角	(192)

双曲三角

§ 7.7 三角形	(193)
-----------------	-------

§ 7.8	记号	(196)
§ 7.9	平行角	(197)
§ 7.10	一个顶点在无穷远的三角形	(198)
§ 7.11	直角三角形	(199)
§ 7.12	正弦定律和余弦定律	(201)
§ 7.13	三角形的面积	(205)
§ 7.14	内切圆	(206)
多边形		
§ 7.15	多边形的面积	(208)
§ 7.16	凸多边形	(210)
§ 7.17	四边形	(212)
§ 7.18	五边形	(216)
§ 7.19	六边形	(218)
测地线几何		
§ 7.20	点到直线的距离	(220)
§ 7.21	线段的垂直平分线	(223)
§ 7.22	不相交测地线的公垂线	(224)
§ 7.23	不相交测地线之间的距离	(225)
§ 7.24	两相交测地线间的交角	(226)
§ 7.25	两测地线间的等分线	(226)
§ 7.26	横截线	(227)
测地线束		
§ 7.27	线束的一般理论	(229)
§ 7.28	抛物型线束	(230)
§ 7.29	椭圆型线束	(231)
§ 7.30	双曲型线束	(232)
等距映射几何		
§ 7.31	等距映射的分类	(233)

§ 7.32	抛物型等距映射	(233)
§ 7.33	椭圆型等距映射	(234)
§ 7.34	双曲型等距映射	(235)
§ 7.35	位移函数	(237)
§ 7.36	等距圆周	(239)
§ 7.37	典型域	(241)
§ 7.38	等距映射乘积的几何	(244)
§ 7.39	换位子几何	(252)
§ 7.40	注记	(256)

第八章 Fuchs群

§ 8.1	<i>Fuchs</i> 群	(257)
§ 8.2	纯双曲群	(260)
§ 8.3	不含椭圆元素的群	(271)
§ 8.4	离散性准则	(274)
§ 8.5	<i>Nielsen</i> 区域	(276)
§ 8.6	注记	(277)

第九章 基本域

§ 9.1	基本域	(278)
§ 9.2	局部有限基本域	(281)
§ 9.3	凸基本多边形	(295)
§ 9.4	<i>Dirichlet</i> 多边形	(308)
§ 9.5	广义 <i>Dirichlet</i> 多边形	(318)
§ 9.6	关于陪集分解的基本域	(323)
§ 9.7	边偶变换	(326)
§ 9.8	<i>Poincaré</i> 定理	(328)
§ 9.9	注记	(342)

第十章 有限生成群

§ 10.1	边数有限的基本多边形	(343)
--------	------------------	-------

§ 10.2	逼近点	(350)
§ 10.3	共轭类	(356)
§ 10.4	$Fuchs$ 群的符号差	(363)
§ 10.5	基本多边形的边数	(372)
§ 10.6	三角群	(374)
§ 10.7	注记	(388)

第十一章 $Fuchs$ 群上的万有约束

§ 11.1	离散的一致性	(389)
§ 11.2	关于顶点循环的通用不等式	(390)
§ 11.3	$Hecke$ 群	(397)
§ 11.4	迹不等式	(400)
§ 11.5	三个二阶椭圆元素	(409)
§ 11.6	位移函数的一般界限	(418)
§ 11.7	典型域与商曲面	(442)
§ 11.8	注记	(447)

参考文献

名词索引

第一章 预备知识

§ 1.1 记 号

本书采用以下记号。

以 $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ 分别表示整数集, 有理数集, 实数集和复数集; 而以 H 表示四元数 (见 § 2.4) 的集合。

依照惯例, 以 $\mathbb{R}^n$ 表示 n 维欧氏空间, 空间中点 $x = (x_1, \dots, x_n)$ 的范数

$$|x| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$$

顺便指出, 当 $y > 0$ 时, 我们约定 $y^{1/2}$ 表示 y 的正平方根。以 $e_1, \dots, e_n$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 的标准基, 即 $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ 等等。特别要提一下 $\mathbb{R}^n$ 的子集

$$B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$$

$$H^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$$

和

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$$

对于空间 $\mathbb{C}$ (与 $\mathbb{R}^2$ 同), 则以 Δ 和 $\partial\Delta$ 分别表示单位圆盘和单位圆周。

作为一个例子, 记号 $x \mapsto x^2$ 表示把 x 映射为 x^2 的一个函数; 函数的定义域将由上下文交代清楚。函数 (即映射或变换) 的符号置于所作用对象的左边; 为了简便, 象点 $f(x)$ 常写成 fx (即省去括号)。两个函数的复合记为 fg , 此即映

射 $x \mapsto f(g(x))$ 。

若 $A \cap B \neq \emptyset$, 则称集合 A 与 B 相交 (或称 A 交 B)。说性质 $P(n)$ 对几乎一切的 n 成立 (或说对所有充分大的 n 成立), 意指该性质只对 n 的一个有限集不成立。

§ 1.2 不等式

本书要引用的所有不等式都可从 *Jensen* 不等式导出。*Jensen* 不等式的证明可参看 [90] 第三章。

Jensen不等式 设 μ 是集 X 上的一个正测度, $\mu(X) = 1$ 。若 $f: X \rightarrow (a, b)$ 为 μ 可积, $\phi: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ 是任一凸函数, 则

$$\phi\left(\int_X f d\mu\right) \leq \int_X (\phi f) d\mu \quad (1.2.1)$$

作为其特例, *Jensen* 不等式包含 *Hölder* 不等式

$$\int_X fg d\mu \leq \left(\int_X f^2 d\mu\right)^{1/2} \left(\int_X g^2 d\mu\right)^{1/2}$$

这一不等式的高散形式是 *Cauchy-Schwarz* 不等式

$$|\sum a_i b_i| \leq (\sum |a_i|^2)^{1/2} (\sum |b_i|^2)^{1/2}$$

此处 a_i, b_i 是实数。当诸量为复数时不等式仍成立, 并且复的不等式可从实的不等式推出, 当然也可以用初等方法直接证明。

取 $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, $\phi(x) = e^x$, 知 (1.2.1) 式蕴含算术-几何均值不等式

$$y_1^{\mu_1} \cdots y_n^{\mu_n} \leq \mu_1 y_1 + \cdots + \mu_n y_n$$

其中 μ_j 是 μ 在 x_j 处所具有的质量, $y_j = \phi f(x_j)$ 。

为了应用 (1.2.1) 式, 需要提供种种凸函数。熟知 ϕ 成为凸函数的充分条件是在 (a, b) 内 $\phi^{(2)} \geq 0$, 因此 $\cot, \tan, \cot^2$ 等都是 $(0, \pi/2)$ 上的凸函数。这就推出, 例如, 当 $\theta_1, \dots, \theta_n$ 都属于 $(0, \pi/2)$ 时有

$$\cot \left(\frac{\theta_1 + \dots + \theta_n}{n} \right) \leq \frac{\cot \theta_1 + \dots + \cot \theta_n}{n} \quad (1.2.2)$$

作为另一个应用, 我们来证明, 若 x, y 属于 $(0, \pi/2)$ 并且 $x + y < \pi/2$, 则有

$$\tan x \tan y \leq \tan^2 \left(\frac{x + y}{2} \right) \quad (1.2.3)$$

记 $w = (x + y) / 2$, 由于

$$\begin{aligned} \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} &= \tan(x + y) \\ &= \frac{2 \tan w}{1 - \tan^2 w} \end{aligned}$$

并且因 $\tan$ 是凸函数又可从 (1.2.1) 推出

$$\tan x + \tan y \geq 2 \tan w$$

两式结合即得 (1.2.3) 式 (注意 $\tan^2 w < 1$, 两个分式的分母都是正的)。

§ 1.3 代 数

我们假定读者熟悉有关群的基本概念和向量空间的知识。例如, 我们要用到关于 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的置换群 S_n 的一些基本事实, 特别是 S_n 可由对换生成的事实。又如, 我们

要提请读者注意如下事实：若 $\theta: G \rightarrow H$ 是群 G 到群 H 的同态，则 θ 的核 K 是 G 的正规子群，商群 G/K 与 H 同构。

设 g 是群 G 的一个元素，称元素 hgh^{-1} ($h \in G$) 为共轭于 g 的元素。 G 可被划分成一些共轭类 $\{hgh^{-1}: h \in G\}$ 。顺便指出，映射 $x \mapsto xgx^{-1}$ 和 $x \mapsto gxg^{-1}$ (都是 G 到 G 的自映射) 在本书中起着特殊的作用。 g 和 h 的换位子是

$$[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}$$

这可看成 g 与 g^{-1} 的共轭元素的复合。

设群 G 具有子群 G_i (i 属于某个指标集)，诸 G_i 的并生成 G ，并且不同的 G_i 仅以恒等元素为唯一的公共元素。则 G 是诸 G_i 的自由乘积当且仅当 G 中每个元素 g 均可由一组元素 $g_1, \dots, g_n$ 表示并且表示式唯一，而且这 n 个元素中任何两个相邻元素不属于同一个子群 G_j 。这样的例子在本书中可以找到。

§ 1.4 拓 扑

我们还假定读者具有足够的拓扑学知识，例如关于 *Hausdorff* 空间，连通空间，紧空间，乘积空间及同胚的知识。特别指出，若 f 是紧空间 X 到 *Hausdorff* 空间 Y 的一一连续映射，则 f 是一个同胚。

作为拓扑的特例，我们要提一下离散拓扑(此种拓扑空间的每一子集都是开集)和由集 X 的度量 ρ 导出的拓扑。一个度量空间 (X, ρ) 到另一个度量空间 (Y, σ) 的等距映射 f 满足

$$\sigma(fx, fy) = \rho(x, y)$$

并且必定是同胚映射。

我们简要地讨论一下由一个给定的函数所诱导的商拓扑结构。

设 X 是任一拓扑空间, Y 是任一非空集合, $f: X \rightarrow Y$ 是任意给定的函数。 Y 的子集 V 称为开集当且仅当 $f^{-1}(V)$ 是 X 的开子集; 如此确定的 Y 的开集族是 Y 上的一个拓扑 $\mathcal{T}_f$, 称之为由 f 诱导的商拓扑。关于这一拓扑, f 当然是连续的。

常常要用到关于商拓扑的下述两个结果:

命题1.4.1 设 X 是拓扑空间, f 把 X 映射为 Y ; $\mathcal{T}$ 是 Y 上任一拓扑, $\mathcal{T}_f$ 是 Y 上由 f 诱导的商拓扑。

(1) 若 $f: X \rightarrow (Y, \mathcal{T})$ 连续, 则 $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_f$ 。

(2) 若 $f: X \rightarrow (Y, \mathcal{T})$ 连续并且为开映射, 则 $\mathcal{T} = \mathcal{T}_f$ 。

[证] 设 $f: X \rightarrow (Y, \mathcal{T})$ 连续。若 V 属于 $\mathcal{T}$, 则 $f^{-1}(V)$ 是 X 的开集, 从而 V 属于 $\mathcal{T}_f$ 。如再设 $f: X \rightarrow (Y, \mathcal{T})$ 是开映射, 则因 V 属于 $\mathcal{T}_f$ 意味着 $f^{-1}(V)$ 是 X 的开集而知 $f(f^{-1}V)$ 属于 $\mathcal{T}$ 。又因 f 是满射, $f(f^{-1}V) = V$, 因此 $\mathcal{T}_f \subset \mathcal{T}$ 。□

命题1.4.2 设 f 把 X 映入 Y , X 和 Y 均为拓扑空间而且 Y 具有商拓扑 $\mathcal{T}_f$ 。对于每个映射 $g: Y \rightarrow Z$, 相应定义一个映射 $g_1 = g f: X \rightarrow Z$ 。则当且仅当 g_1 连续时 g 连续。

[证] 因 f 连续, 故 g 连续意味着 g_1 连续。现在假定 g_1 连续。对于 Z (当然假定它是拓扑空间) 的开集 V 有

$$(g_1)^{-1}(V) = f^{-1}(g^{-1}V)$$

这是 X 的开集, 由商拓扑的定义推出 $g^{-1}(V)$ 是 Y 的开集, 因此 g 连续。□

商拓扑可代之以等价关系。若拓扑空间 X 依照某个等价关系 R 分成一些等价类 $[x]$ ，则等价类空间 X/R 具有由映射 $x \mapsto [x]$ 诱导的商拓扑。任何满映射 $f: X \rightarrow Y$ 都能诱导出 X 的一个等价关系 $R: xRy$ 当且仅当 $f(x) = f(y)$ 。亦即 Y 与 X/R 可视为同一物。

例如，设 G 是拓扑空间 X 的自同胚群， f 把 X 中每个元素 x 映射为 X/G 中的 G 轨道 $[x]$ 。若赋予 X/G 以诱导商拓扑，则 $f: X \rightarrow X/G$ 是连续映射。同时， f 也是开映射；因为若 V 是 X 的开集，则集合

$$f^{-1}(fV) = \bigcup_{g \in G} g(V)$$

也是 X 的开集。

此外，熟悉覆盖空间与黎曼曲面的知识对阅读本书无疑是有益的，虽然本书大部份内容可独立于这些概念来阅读。这方面的内容，本书将在第六章作简略的讨论；需要作进一步了解的读者可参阅〔4〕，〔6〕，〔28〕，〔50〕，〔63〕，〔100〕。

§ 1.5 拓扑群

所谓拓扑群 G ，是指 G 既是一个群又是一个拓扑空间，并且这两种结构彼此相容即要求 G 到 G 的映射 $x \mapsto x^{-1}$ 和 $G \times G$ 到 G 的映射 $(x, y) \mapsto xy$ 连续；当然此处赋予 $G \times G$ 的拓扑是乘积拓扑。

所谓两个拓扑群同构，是指存在从一个拓扑群到另一个拓扑群的双射，它既是群的同构对应又是拓扑空间的同胚对应；这就是拓扑群的自然同化。