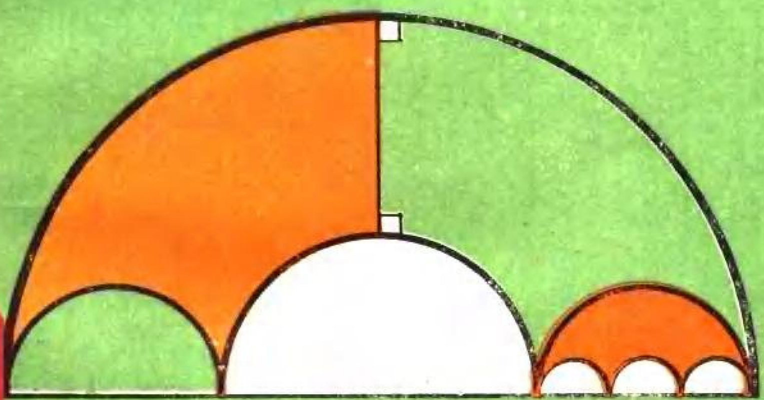
离散群几何

[英] A.F.Beardon著　　杨维奇　译



北京理工大学出版社

离散群几何

〔英〕A.F.Beardon 著

杨维奇 译

北京理工大学出版社

内 容 简 介

本书是美国*Spring-Verlag*出版社出版的数学研究生系列教材之一，介绍离散*Möbius*群上的几何学理论。全书共分十一章，内容包括预备知识、矩阵、R^n上的*Möbius*变换、复*Möbius*变换、不连续群、*Riemann*曲面、双曲几何、*Fuchs*群、基本域、有限生成群、*Fuchs*群上的万有约束。本书既反映了最新的研究成果，又深入浅出易于阅读。

本书可供大学数学专业高年级学生、研究生、教师和数学工作者阅读和参考。

离散群几何

〔英〕 A.F.Beardon 著

杨维奇 译

*

北京理工大学出版社出版

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

北京密云华都印刷厂印装

*

787×1092毫米 32开本 15.125印张 336千字

1988年12月第一版 1988年12月第一次印刷

ISBN 7-81013-083-8/O·20

印数：1-3000册 定价：2.95元

中文版序言

很高兴能为我的书的中译本作序。

由衷感谢杨维奇教授把我的书译成中文，我为出版此书的中文版本而深感荣幸。

本书描述了一个十分活跃的数学领域。我期待着有一天能访问中国，会见一些对这一领域有共同兴趣的数学家。

Alan F. Beardon

1988年10月于剑桥大学

序　言

本书可作为离散*Möbius*变换群上的几何学的一个导引。这一课题的研究已有一百多年的历史，其侧重点在不断地变化着，最近的发展则与三维流形的理论相关联；要了解其间的变化，不妨读一读早年的Poincaré的论文〔77〕和最近的Thurston的论文〔101〕。大约在1940年，出现了著名的Fenchel—Nielsen手稿，可惜这一手稿未曾印刷且已散失。本书在介绍新近结果的同时，还再现了手稿中提出的某些漂亮的几何思想。

作者确信，几何解释对于充分理解问题的实质极为重要，不论用矩阵来作证明会是多么简单，采用几何证明往往更加有益。本书正是在这一思想的指导下写成的。此外，书中的结果尽可能以共轭变换下不变的形式给出，以便使结果的内在性质更加明了。尽管本课题的研究对象是双曲几何的等距映射群，但许多著述却是通过欧氏几何和欧氏估计进行阐述的。近几年研究工作的进展再次表明有必要运用双曲几何。因此我在书中写了一章关于解析的（不是公理化的）双曲几何，其内容相当丰富，作者希望它能成为平面双曲几何公式的“字典”，这就使得这一章因具有本身特有的用途而引人注目。为此，这一章在编排上也与其余各章有所不同，内中有相当多的节很短，每节只讨论一个特殊的论题或只提供一个特殊的结果。

本书既然是作为一个导引，作者不惜给出详细的（有时甚至是初等的）证明。事实上，以往文献中所出现的许多几何错误，多半就是由于忽略了细节所致。作者已尽量使阅读本书所需要的预备知识减少到最低限度；并且只要觉得有必要，总可从不同的观点出发讨论同一论题，这样做的原因之一是考虑到读者不一定都会逐页阅读本书。书中所列参考文献是不全面的，而且不一定是给出结果的最初出处。为便于查阅，每一节中的定理、定义等等作了统一编号。

多年来，我曾同许多朋友和同事探讨过这一课题，在此谨向他们致以深切的谢意。特别要感谢 P.J.Nicholls和 P.Waterman，他们阅读了本书的初稿；衷心感谢 F.W. Gehring 教授，他热情鼓励我撰写这本书，在他的指导下我们组织了关于书稿各个部份的一系列讨论。最后要感谢L.V. Ahlfors 的论文和讲义所给予我的启示和帮助。本书或许还会存在一些错误，这概由我本人负责。

A.F. Beardon

1982年　于剑桥

目　录

第一章　预备知识

§1.1 记　　号

本书采用以下记号。

以$\mathbf{Z}$，$\boldsymbol{Q}$，$\boldsymbol{R}$，$\boldsymbol{C}$ 分别表示整数集，有理数集，实数集和复数集；而以$\boldsymbol{H}$表示四元数（见§2.4）的集合。

依照惯例，以$\boldsymbol{R}^n$表示 n维欧氏空间，空间中点 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ 的范数

$$|x| = (x_1^2+\cdots+x_n^2)^{1/2}$$

顺便指出，当$y>0$时，我们约定$y^{1/2}$表示y的正平方根。以e_1，…，e_n表示$\boldsymbol{R}^n$的标准基，即$e_1=(1,0,\cdots,0)$等等。特别要提一下$\boldsymbol{R}^n$的子集

$$B^n=\{x\in\boldsymbol{R}^n:|x|<1\}$$

$$H^n=\{x\in\boldsymbol{R}^n:x_n>0\}$$

和

$$S^{n-1}=\{x\in\boldsymbol{R}^n:|x|=1\}$$

对于空间$\boldsymbol{C}$（与$\boldsymbol{R}^2$同），则以Δ和$\partial\Delta$分别表示单位圆盘和单位圆周。

作为一个例子，记号$x\mapsto x^2$表示把x映射为x^2的一个函数；函数的定义域将由上下文交代清楚。函数（即映射或变换）的符号置于所作用对象的左边；为了简便，象点$f(x)$常写成fx（即省去括号）。两个函数的复合记为fg，此即映

射$x\mapsto f(g(x))$。

若$A\cap B\neq\phi$，则称集合A与B相交（或称A交B）。说性质$P(n)$对几乎一切的n成立（或说对所有充分大的n成立），意指该性质只对n的一个有限集不成立。

§ 1.2 不等式

本书要引用的所有不等式都可从 *Jensen* 不等式导出。*Jensen* 不等式的证明可参看〔90〕第三章。

Jensen不等式 设μ是集X上的一个正测度，$\mu(X)=1$。若$f: X\to(a,b)$为μ可积，$\phi:(a,b)\to\boldsymbol{R}$是任一凸函数，则

$$\phi\left(\int_X f\mathrm{d}\mu\right)\leqslant\int_X(\phi f)\,\mathrm{d}\mu \tag{1.2.1}$$

作为其特例，*Jensen*不等式包含*Hölder* 不等式

$$\int_X fg\mathrm{d}\mu\leqslant\left(\int_X f^2\mathrm{d}\mu\right)^{1/2}\left(\int_X g^2\mathrm{d}\mu\right)^{1/2}$$

这一不等式的离散形式是*Cauchy-Schwarz* 不等式

$$|\Sigma a_ib_i|\leqslant(\Sigma|a_i|^2)^{1/2}(\Sigma|b_i|^2)^{1/2}$$

此处a_i，b_i是实数。当诸量为复数时不等式仍成立，并且复的不等式可从实的不等式推出，当然也可以用初等方法直接证明。

取$X=\{x_1,\cdots,x_n\}$，$\phi(x)=e^x$，知（1.2.1）式蕴含算术一几何均值不等式

$$y_1^{\mu_1}\cdots y_n^{\mu_n}\leqslant\mu_1y_1+\cdots+\mu_ny_n$$

其中μ_j是μ在x_j处所具有的质量，$y_j=\phi f(x_j)$。

为了应用（1.2.1）式，需要提供种种凸函数。熟知ϕ成为凸函数的充分条件是在(a,b)内$\phi^{(2)}\geqslant 0$，因此cot, tan, $\cot^2$等都是$(0,\pi/2)$上的凸函数。这就推出，例如，当$\theta_1,\cdots,\theta_n$都属于$(0,\pi/2)$时有

$$\cot\left(\frac{\theta_1+\cdots+\theta_n}{n}\right)\leqslant\frac{\cot\theta_1+\cdots+\cot\theta_n}{n} \tag{1.2.2}$$

作为另一个应用，我们来证明，若x,y属于$(0,\pi/2)$并且$x+y<\pi/2$，则有

$$\tan x\tan y\leqslant\tan^2\left(\frac{x+y}{2}\right) \tag{1.2.3}$$

记$w=(x+y)/2$，由于

$$\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}=\tan(x+y)$$

$$=\frac{2\tan w}{1-\tan^2 w}$$

并且因tan是凸函数又可从（1.2.1）推出

$$\tan x+\tan y\geqslant 2\tan w$$

两式结合即得（1.2.3）式（注意$\tan^2 w<1$，两个分式的分母都是正的）。

§ 1.3 代　数

我们假定读者熟悉有关群的基本概念和向量空间的知识。例如，我们要用到关于$\{1,2,\cdots,n\}$的置换群S_n的一些基本事实，特别是S_n可由对换生成的事实。又如，我们

要提请读者注意如下事实：若$\theta: G\to H$是群G到群H的同态，则θ的核K是G的正规子群，商群G/K与H同构。

设g是群G的一个元素，称元素hgh^{-1}（$h\in G$）为共轭于g的元素。G可被划分成一些共轭类$\{hgh^{-1}: h\in G\}$。顺便指出，映射$x\mapsto xgx^{-1}$和$x\mapsto gxg^{-1}$（都是G到G的自映射）在本书中起着特殊的作用。g和h的换位子是

$$[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}$$

这可看成g与g^{-1}的共轭元素的复合。

设群G具有子群G_i（i属于某个指标集），诸G_i的并生成G，并且不同的G_i仅以恒等元素为唯一的公共元素。则G是诸G_i的自由乘积当且仅当G中每个元素g均可由一组元素g_1，…，g_n表示并且表示式唯一，而且这n个元素中任何两个相邻元素不属于同一个子群G_j。这样的例子在本书中可以找到。

§ 1.4 拓 扑

我们还假定读者具有足够的拓扑学知识，例如关于$Hausdorff$空间，连通空间，紧空间，乘积空间及同胚的知识。特别指出，若f是紧空间X到$Hausdorff$空间Y的一一连续映射，则f是一个同胚。

作为拓扑的特例，我们要提一下离散拓扑（此种拓扑空间的每一子集都是开集）和由集X的度量ρ导出的拓扑。一个度量空间（X，ρ）到另一个度量空间（Y，σ）的等距映射f满足

$$\sigma(fx, fy) = \rho(x, y)$$

并且必定是同胚映射。

我们简要地讨论一下由一个给定的函数所诱导的商拓扑结构。

设X是任一拓扑空间，Y是任一非空集合，f：$X\to Y$是任意给定的函数。Y的子集V称为开集当且仅当$f^{-1}(V)$是X的开子集；如此确定的Y的开集族是Y上的一个拓扑$\mathscr{T}_f$，称之为由f诱导的商拓扑。关于这一拓扑，f当然是连续的。

常常要用到关于商拓扑的下述两个结果：

命题1.4.1 设X是拓扑空间，f把X映射为Y；$\mathscr{T}$是Y上任一拓扑，$\mathscr{T}_f$是Y上由f诱导的商拓扑。

(1) 若f：$X\to(Y,\ \mathscr{T})$连续，则$\mathscr{T}\subset\mathscr{T}_f$。

(2) 若f：$X\to(Y,\ \mathscr{T})$连续并且为开映射，则$\mathscr{T}=\mathscr{T}_f$。

［证］ 设f：$X\to(Y,\mathscr{T})$连续。若V属于$\mathscr{T}$，则$f^{-1}(V)$是X的开集，从而V属于$\mathscr{T}_f$。如再设f：$X\to(Y,\mathscr{T})$是开映射，则因V属于$\mathscr{T}_f$意味着$f^{-1}(V)$是X的开集而知$f(f^{-1}V)$属于$\mathscr{T}$。又因f是满射，$f(f^{-1}V)=V$，因此$\mathscr{T}_f\subset\mathscr{T}$。 □

命题1.4.2 设f把X映入Y，X和Y均为拓扑空间而且Y具有商拓扑$\mathscr{T}_f$。对于每个映射g：$Y\to Z$，相应定义一个映射$g_1=gf$：$X\to Z$。则当且仅当g_1连续时g连续。

［证］ 因f连续，故g连续意味着g_1连续。现在假定g_1连续。对于Z（当然假定它是拓扑空间）的开集V有

$$(g_1)^{-1}(V)=f^{-1}(g^{-1}V)$$

这是X的开集，由商拓扑的定义推出$g^{-1}(V)$是Y的开集，因此g连续。 □

商拓扑可代之以等价关系。若拓扑空间X依照某个等价关系R分成一些等价类〔x〕，则等价类空间X/R具有由映射$x \mapsto$〔x〕诱导的商拓扑。任何满映射f: $X \to Y$都能诱导出X的一个等价关系R: xRy当且仅当$f(x)=f(y)$。亦即Y与X/R可视为同一物。

例如，设G是拓扑空间X的自同胚群，f把X中每个元素x映射为X/G中的G轨道〔x〕。若赋予X/G以诱导商拓扑，则f: $X \to X/G$是连续映射。同时，f也是开映射；因为若V是X的开集，则集合

$$f^{-1}(fV)=\bigcup_{g\in G} g(V)$$

也是X的开集。

此外，熟悉覆盖空间与黎曼曲面的知识对阅读本书无疑是有益的，虽然本书大部份内容可独立于这些概念来阅读。这方面的内容，本书将在第六章作简略的讨论；需要作进一步了解的读者可参阅〔4〕，〔6〕，〔28〕，〔50〕，〔63〕，〔100〕。

§ 1.5 拓扑群

所谓**拓扑群**G，是指G既是一个群又是一个拓扑空间，并且这两种结构彼此相容即要求G到G的映射$x \mapsto x^{-1}$和$G\times G$到G的映射$(x, y) \mapsto xy$连续；当然此处赋予$G\times G$的拓扑是乘积拓扑。

所谓两个拓扑群**同构**，是指存在从一个拓扑群到另一个拓扑群的双射，它既是群的同构对应又是拓扑空间的同胚对应；这就是拓扑群的自然同化。