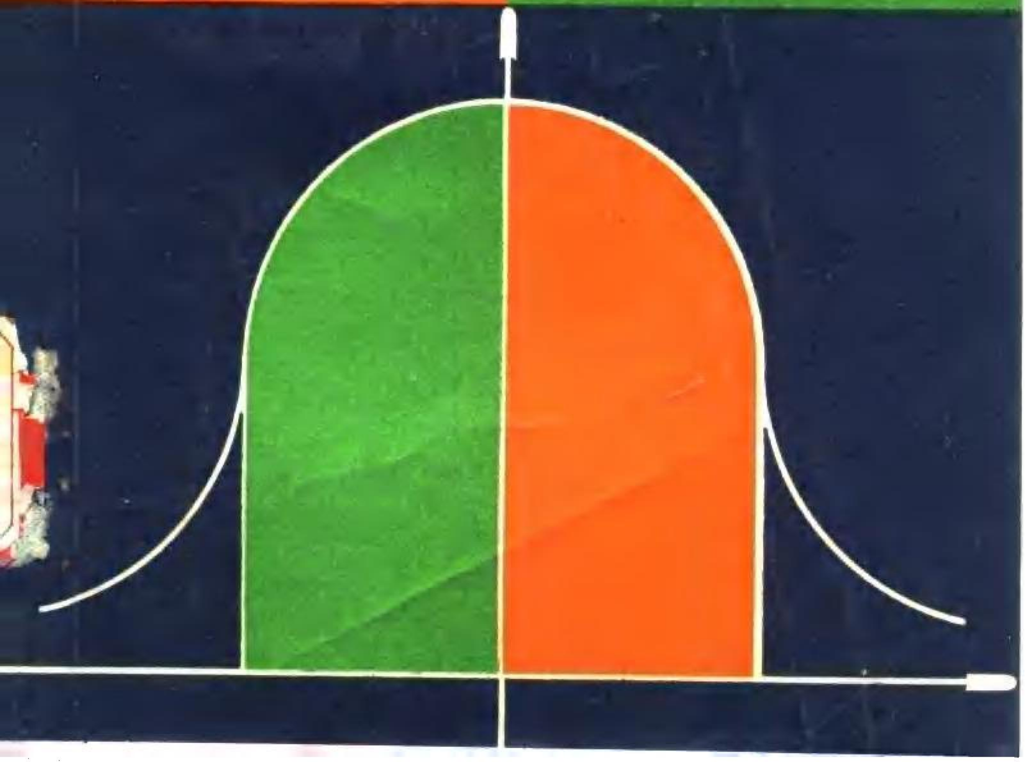
高等学校哲学专业试用教材
自然科学基础之五

概率论讲义

周述岐编

中国人民大学出版社出版



高等学校哲学专业试用教材

自然科学基础之五

概率论讲义

周述岐 编

中国人民大学出版社

高等学校哲学专业试用教材
自然科学基础之五
概率论讲义
周述岐 编
*
中国人民大学出版社出版
（北京西郊海淀路39号）
中国人民大学出版社印刷厂印刷
（北京鼓楼西大石桥胡同61号）
新华书店北京发行所发行
*
开本：850×1168毫米 32开 印张：5.5
1987年12月第1版 1987年12月第1次印刷
字数：132 000 册数：1—10 000
*
ISBN 7-300-00130-0/B·13
书号：13011·40 定价：1.65元

前　言

本书是为了满足我校哲学专业开设自然科学基础课的需要，根据全国高等教育自学考试指导委员会哲学专业委员会制定的《高等数学自学考试大纲》中对概率论的要求，参考高等院校概率论方面的教材编写的。

全书共分六章：第一章是学习概率论的准备知识，第二章—第五章介绍概率论最基本的知识，第六章简要介绍数理统计中一个常用的方法。除第一章外，全部讲完需要24课时左右。书中§3.5与§6.4不是自学考试大纲要求的内容。在各章习题中个别带有“*”号的习题供有兴趣的读者选作。

我校杨海明副教授对本书初稿进行了详细审阅，提出了很好的修改意见，并改正了原稿中许多错误与不妥之处，在此表示深切的感谢。

本书虽有杨海明同志的帮助，但由于编者能力有限，书中错误与不妥之处，恳请读者随时批评指正。

编　者

1986年7月于中国人民大学

目　录

绪　言

客观世界的现象是多种多样的。有一类现象，当已知前提条件以后，它的结论是确定不移的，这类现象称为**确定性现象**，即哲学中的必然现象。我们过去所学的几何学、代数学以及微积分等，就是研究这类现象的数学。然而在客观世界中还存在着另一类现象，例如，任意抛掷一枚硬币，并规定一面为正面，另一面为反面，则可能出现正面，也可能出现反面，并且无论怎样控制抛掷的条件，每次抛掷的结果是无法准确预料的。这种现象称为**非确定性现象**，即哲学中的偶然现象。

人们在长期的实践中发现，就一次试验来说，非确定性现象的结果无法预料，毫无规律可言。但是在大量重复试验的条件下，它们却呈现出某种固有的规律性。以抛掷硬币为例，如果抛掷的次数相当多，由人们的经验可知，出现正面和反面的次数往往大致相等。这就是规律。恩格斯曾经指出："被断定为必然的东西，是由纯粹的偶然性构成的，而所谓偶然的东西，是一种有必然性隐藏在里面的形式"①。概率论就是从数量方面研究偶然性和必然性关系的学科。通过大量偶然现象，找出它们的必然规律是概率论重要内容之一。如果说变量数学是辩证法在数学中的应用，那末，概率论则是必然性和偶然性统一的哲学原理在数学中的应用。

概率论的基本原理本来是偶然性和必然性辨证关系的体现，

① 《马克思恩格斯全集》第21卷，第338页。

但在历史上却被某些学者说成是“神的法则的表现”，用以为神学辩护；有人认为事件的概率没有实际意义，它只和“主体的心情有关”，是认识主体的“信念程度”。历史上有人只承认必然性而否认偶然性，有人只承认偶然性而否认必然性，也有人把二者分割开来、对立起来。概率论产生和发展的历史，是充满着唯物主义与唯心主义、辩证法与形而上学斗争的历史。在数学和各门自然科学的发展中，概率论是充满不同哲学观点的斗争的学科之一。

由于偶然现象是客观世界中广泛存在的现象，所以概率论的应用极为广泛，它同微分方程一样，都是联系实际最紧密的数学分支。特别是最近几十年，随着科学技术的迅速发展，它在国民经济、工农业生产等领域，以及近代物理、地球物理、自动控制与通讯理论、生物学和医学等学科都有应用。

第一章　排列·组合·集合

§1.1　排　　列

1. 排列的概念

先看一个具体问题：用1、2、3三个数字能排成多少个不同的两位数。

实际排一下可得：

12 13 21 23 31 32

共六个两位数。

在一般情况下，从n个互不相同的元素中，每次取出r个（$r \leqslant n$），按不同的顺序排成列，每两列中只要有一个元素不同，或者两列元素虽然完全相同，但只要其中有两个元素的顺序不同，就算是不同的排列，这就是一个排列问题。排列问题，一般并不关心具体的排列方法，而只关心共有多少种排法。所以排列问题是计算排列**数目**多少的问题。

排列一般又有不重复排列和重复排列两类。

所谓**不重复排列**，就是在一个排列中没有相同的元素；也就是说，在排列时，同一个元素不能重复使用。例如，abc与cab就是不重复排列(又称**无放回排列**)。

重复排列（又称**有放回排列**）就是在一个排列中允许有相同的元素；也就是说，每个元素犹如打字机上的铅字，可以反复使用。例如，abb与aaa就是重复排列。

2. 加法原理与乘法原理

这两个原理不仅在计算排列数时经常用到，而且在下节的组

合问题的计算中也反复使用。

加法原理 设有 r 类元素，在第一类，第二类，…，第 r 类中，分别有m_1个，m_2个，…，m_r个，且每个元素都不相同，则共有$m_1+m_2+\cdots+m_r$个元素。

本原理也可表述成：设完成一件事有 r 类方法，在第一类，第二类，…，第 r 类中，分别又有m_1、m_2、…、m_r种方法，并且在这些方法里，任何两种方法都不相同，那末完成这件事共有$m_1+m_2+\cdots+m_r$种方法。

乘法原理 设有两类元素，第一类有 n 个，用a_1，a_2，…，a_n表示；第二类有 m 个，用b_1，b_2，…，b_m 表示。从每一类中各取一个构成一组，则共有mn组。

证 先在第一类中取a_1，第二类中依次取b_1，b_2，…，b_m，于是可得 m 组，即

$$a_1b_1\ \ a_1b_2\ \ \cdots\ \ a_1b_m$$

再从第一类中取a_2，第二类中依次取b_1，b_2，…，b_m，于是亦可构成 m 组，即

$$a_2b_1\ \ a_2b_2\ \ \cdots\ \ a_2b_m$$

如此进行下去，由于第一类共有 n 个元素，所以共有 n 个 m 组，即mn组。

本原理也可表述成：如果一个过程可以分成两个阶段进行，第一阶段有 m 种不同的做法，第二阶段有 n 种不同的做法，且第一阶段的任一种做法都可以与第二阶段的任一种做法配成整个过程的一种做法，那么整个过程应该有mn种做法。

推论 设有 r 类元素，第一类中共有元素m_1个，第二类中共有元素m_2个，…，第 r 类中共有元素m_r个；从每一类中各取一个元素构成一组，则共有$m_1m_2\cdots m_r$组。

乘法原理与加法原理是不难区别的。例如：从底楼到二楼有三个楼梯、两个电梯，那末从底楼到二楼的走法共 $3+2=5$ 种(加法原理)；如果从底楼到二楼只有两个楼梯，从二楼到三楼又

只有两个电梯，则从底楼到三楼的走法共有 $3\times2=6$ 种（乘法原理）；如果在这个问题中，在底楼与三楼之间再加上一个电梯，则从底楼到三楼的走法共有 $3\times2+1=7$ 种（乘法原理与加法原理联用）。

3. 不重复排列的计算

下边的定理给出了不重复排列数的计算方法。

定理 1 在 n 个不同的元素中，每次取出 r（$r\leqslant n$）个进行排列，设排列数为 P_n^r，则

$$P_n^r=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$
$$=\frac{n!}{(n-r)!}$$

证 第一个可以从 n 个元素中任取一个，所以共有 n 种取法。当第一个取定之后再取第二个时，由于不能重复，所以只有 $n-1$ 种取法。依次类推，到了取第 r 个时，由于前边的 $r-1$ 个已经取定了，所以只有 $n-(r-1)=n-r+1$ 种取法。由乘法原理可知

$$P_n^r=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$

推论 当 $r=n$ 时，$P_n^n=n!$

例 1 用 0，1，2，…9 共10个符号可以组成多少个不同的四位数。

解 10个符号每次取 4 个的排列数为

$$P_{10}^4=10\cdot9\cdot8\cdot7$$

其中包括把 0 排在第一位的数字，但这是三位数，而把 0 排在第一位的排列数为

$$P_9^3=9\cdot8\cdot7$$

所以四位数字应为

$$P_{10}^4-P_9^3=10\cdot9\cdot8\cdot7-9\cdot8\cdot7=4536(\text{个})$$

例 2 用三种不同颜色的旗子共能打出多少种不同的信号？

解 因为每次取一个、两个、三个的信号数目分别是

$$P_3^1=3,\ P_3^2=3\cdot 2=6,\ P_3^3=3!=6,$$

所以能打出的信号数目为$3+6+6=15$(种)。

4. 重复排列的计算

定理 2 从n个不同的元素中，每次取出r个的重复排列数为n^r。

证 第一个元素有n种取法，由于是重复排列，所以第二个也有n种取法，依此类推，第r个仍有n种取法，所以共有

$$\overbrace{n\times n\times\cdots\times n}^{r}=n^r$$

种排列。

例 3 用1、2、3、4四个数字可以组成的三位数字有$4^3=64$个

5. 有相同元素排列的计算

定理 3 设在n个元素中有$p(p<n)$个是相同的，则n个元素全取的排列为$\frac{n!}{p!}$。

证 设所求的排列数为P，如这p个元素全不相同，则在P种排法中的每一种又有$p!$种排法，所以共有$P\cdot p!$种排法。而n个不同元素的排列为$n!$，故

$$P\cdot p!=n!$$

即

$$P=\frac{n!}{p!}$$

推论 在n个元素中，如果分别有$n_1, n_2, \cdots, n_k$个相同$\left(\sum_{i=1}^{k}n_i\leqslant n\right)$，则全取的排列为$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$。

例 4 设有甲种书 5 本，乙种书 6 本，丙种书 4 本，分别奖给15个学生，问有几种分配方法。

解 设分配数为 P，由定理 3 的推论可知

$$P=\frac{15!}{5!6!4!}=630630。$$

*6. 循环排列的计算

以上讲的排列有头有尾，可以看成“直线”排列。如果将若干个元素排成一个封闭曲线(如圆圈)，则称循环排列。

定理 4 从 n 个不同的元素中，每次取 r 个排成一个封闭曲线，则排列为 $\frac{P_n^r}{r}$ 个。

证 将 r 个不同的元素排在一条封闭的曲线上，若将它们按一定的方向（比如按照顺时针的方向）依次序分别移动一个位置，两个位置，…，$r-1$ 个位置，则同没有移动时完全一样。也就是说，循环排列只关心元素之间的次序，而不关心具体的位置。可见，在直线上有 r 种排列，而在封闭曲线上只有一种排列，所以循环排列数应为 $\frac{P_n^r}{r}$ 种。

推论 n 个不同元素全取的循环排列为

$$\frac{P_n^n}{n}=(n-1)!$$

定理 5 n 个不同的珠类，每次取 r 个($r\leqslant n$)穿成一个珠圈，则排列数为 $\frac{P_n^r}{2r}$ 个。

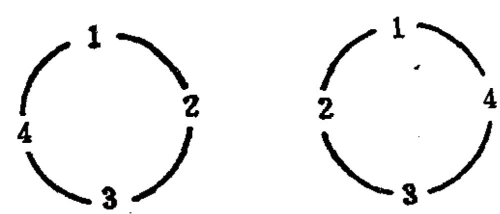


图 1.1

证 如图 1.1 所示，对循环排列来说，表示两种不同的排列，但若是珠类排列，由于把其中任一个反转180°后可以同另一个完全重合，所以只能算一种排列。在一般情况下，因为珠类排列没有顺时针同逆时针的次序区别，所以它恰好是循环排列之一半，

故 n 个不同的珠类每次取 r 个穿成一个珠圈之排列数为 $\frac{P_n^r}{2r}$ 个。

例 5 男女同学各四人围坐一张圆桌，约定男女相间，求共有几种排列。

解 先排四个女同学(先排男同学亦可)，由定理 4 的推论可知共有 $(4-1)!$ 种排列。对其每一种排列，再将四个男同学插入四个空位，则有 $4!$ 种排法。所以共有排列

$$(4-1)! \times 4! = 144 (\text{种})。$$

§1.2 组 合

1. 组合概念

先看一个具体问题：设有甲、乙、丙、丁、戊五个球队进行循环比赛，问共赛几场。

实际排一下，可知共赛十场，即

甲乙　甲丙　甲丁　甲戊　乙丙

乙丁　乙戊　丙丁　丙戊　丁戊

在一般情况下，若从 n 个不同的元素中每次取 r 个成为一组(没有次序)，每组只要有一个元素不同就算不同的组合，这就是组合问题。和排列问题一样，组合问题只关心组合数目的计算，并不关心分组的技巧。

2. 不同元素组合的计算

下边的定理给出了组合数的计算方法。

定理 1 若从 n 个不同的元素中，每次取出 r ($r \leqslant n$)个的组合数为 C_n^r(或用符号 $\binom{n}{r}$)，则

$$C_n^r = \frac{P_n^r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

证 因 r 个不同元素的排列数为 $r!$，所以 C_n^r 组应有 $C_n^r \cdot r!$ 排

列。但 n 个不同元素每次取 r 个时排列为 P_n^r，所以 $C_n^r \cdot r! = P_n^r$，即 $C_n^r = \dfrac{P_n^r}{r!} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$。

当 $r=n$ 时，一方面 $C_n^n=1$，另一方面应用上边的定理 $C_n^n = \dfrac{n!}{n!(n-n)!} = \dfrac{1}{0!}$。可见 $\dfrac{1}{0!}=1$。为了使该式成立，数学**规定** $0!=1$。此外，数学上还**规定** $C_n^0=1$。

例 1 在15个同样大小的球中，有10个红的 5 个白的，每次取出 3 个，则共有 $C_{15}^3 = \dfrac{15\cdot 14\cdot 13}{3\cdot 2\cdot 1} = 455$ 种取法。如果在三个中必须是两个红球，一个白球，则共有 $C_{10}^2 \cdot C_5^1 = 225$ 种取法。

3. 分组组合的计算

定理 2 把 n 个不同的元素分成 k 组，使各组分别有 n_1、n_2、…、n_k 个元素 $\left(\sum\limits_{i=1}^{k} n_i = n\right)$，则组合数为

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

证 为简单起见，设 $k=3$，则一、二、三组分别有 n_1，n_2，n_3 个元素 $(n_1+n_2+n_3=n)$。分第一组时共有 $C_n^{n_1}$ 种分法。当分完第一组后仅余 $n-n_1$ 个元素，再分第二组则有 $C_{n-n_1}^{n_2}$ 种分法。当分完第一、第二组后尚余 $n-n_1-n_2$ 个元素，于是第三组共有 $C_{n-n_1-n_2}^{n_3}$ 种分法。可见分成三组的分法应为

$$C_n^{n_1}\cdot C_{n-n_1}^{n_2}\cdot C_{n-n_1-n_2}^{n_3} = \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!}\cdot\frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!}\cdot\frac{(n-n_1-n_2)!}{n_3!(n-n_1-n_2-n_3)!}$$

由于 $(n-n_1-n_2-n_3)! = 0! = 1$，所以

$$C_n^{n_1}\cdot C_{n-n_1}^{n_2}\cdot C_{n-n_1-n_2}^{n_3} = \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!}。$$

同理，当分成k组时，就有$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$种分法。

需要注意的是，这个定理同前一节定理3的推论(第6页)虽然在形式上完全一样，得数也相同，但是含义却不相同。

例 2 一副52张的扑克牌，平均分给4人，每人13张，则共有$\frac{52!}{13!\cdot13!\cdot13!\cdot13!}$种分法。由于此数非常大，所以打扑克时很难两次抓到同样的牌。

4. 组合的若干性质

性质 1 $C_n^r=C_n^{n-r}$。

性质 2 $C_{n+1}^r=C_n^r+C_n^{r-1}$

性质 3 若n为偶数，则当$r=\frac{n}{2}$时C_n^r最大；

若n为奇数，则当$r=\frac{n\pm1}{2}$时C_n^r最大。

性质1的证明非常简单，性质2的证明作为习题。下边证明性质3。

证 由于r的不同，C_n^r有不同的值。当$r=0$及$r=n$时，得到C_n^r的最小值1。这个性质告诉我们C_n^r取最大值时的条件。为了证明这个性质，我们从一般式入手。因为

$$C_n^r=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+2)(n-r+1)}{r\cdot(r-1)!}$$

$$C_n^{r-1}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+2)}{(r-1)!}$$

所以

$$\left(\frac{n+1}{r}-1\right)\cdot C_n^{r-1}=C_n^r$$

当$\frac{n+1}{r}-1>1$，即$r<\frac{n+1}{2}$时，$C_n^{r-1}<C_n^r$，可见，这时C_n^r是r的递增函数；

当 $\frac{n+1}{r}-1<1$，即 $r>\frac{n+1}{2}$ 时，$C_n^{r-1}>C_n^r$，可见，这时C_n^r是 r 的递减函数。

由于 r 只能取正整数，故当 $r=\frac{n+1}{2}$ 或最后一次小于 $\frac{n+1}{2}$ 时，C_n^r 之值最大。

如果 n 为偶数，设 $n=2m$，则 $\frac{n+1}{2}=m+\frac{1}{2}$，故 $r=m=\frac{n}{2}$ 是小于 $\frac{n+1}{2}$ 的最大整数，因知$C_n^{n/2}$是最大值。

如果 n 为奇数，则当 $r=\frac{n+1}{2}$ 时 $C_n^{\frac{n+1}{2}}$ 之值最大。再由性质1，$C_n^{\frac{n+1}{2}}=C_n^{n-\frac{n+1}{2}}=C_n^{\frac{n-1}{2}}$，可见 $r=\frac{n-1}{2}$ 时 $C_n^{\frac{n-1}{2}}$ 也是最大值。

例3 C_{14}^r 的最大值为 $C_{14}^{\frac{14}{2}}=C_{14}^7=3432$。

C_{15}^r 的最大值为 $C_{15}^{\frac{15-1}{2}}$ 或 $C_{15}^{\frac{15+1}{2}}$，即最大值为

$C_{15}^7=C_{15}^8=6435$。

5. 用组合记号表示二项式定理

我们已知，当 n 为正整数时，

$$
\begin{aligned}
(x+a)^n= & x^n+nx^{n-1}a+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}a^2 \\
& +\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}a^3+\cdots \\
& +\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}x^{n-r}a^r+\cdots+a^n。
\end{aligned}
$$