线性系统理论

段广仁　编著

哈尔滨工业大学出版社

线性系统理论

段广仁　编著

哈尔滨工业大学出版社

内 容 简 介

本书系统地阐述了以状态空间方法为主的线性系统的时间域理论。全书共分十二章：第一章介绍与本书密切相关的一些数学基础知识；第二章介绍线性系统的数学描述；第三章至第五章阐述线性系统的分析理论，分别介绍线性系统的运动分析、能控性和能观性分析以及稳定性分析；第六章至第十章阐述线性系统的设计理论，分别介绍线性系统的极点配置和特征结构配置、镇定与渐近跟踪、线性二次型最优控制、解耦控制、状态观测器等设计问题；第十一章概括性地介绍离散线性系统理论；第十二章介绍鲁棒性的概念和几个基本的鲁棒控制问题。

本书结构清楚、层次分明、论述严谨、重点突出，注重基本概念、基本原理和基本方法。在内容上以基本的分析和设计问题为主，同时介绍了线性系统理论的一些新进展和作者的一些相关研究成果。本书可作为高等工科院校自动控制及相近专业本科高年级学生和研究生的教材，也可供广大科研工作者、工程技术人员以及高等院校教师参考或自学。

线性系统理论

Xianxing Xitong Lilun

段广仁 编著

*

哈尔滨工业大学出版社 出版发行

哈尔滨工业大学印刷厂印刷

*

开本787×1092 1/16 印张24.75 字数600千字

1996年11月第1版 1996年11月第1次印刷

印数 1—2 000

ISBN 7-5603-1181-4/O·80 定价：32.00元

前　　言

线性系统理论是现代控制理论中最基本、最重要也是最成熟的一个分支，是生产过程控制、信息处理、通讯系统、网络系统等多方面的基础理论。其大量的概念、方法、原理和结论对于系统和控制理论的许多学科分支，诸如最优控制、非线性控制、随机控制、系统辨识、信号检测和估计等都具有十分重要的作用。因而国内外许多高等院校都将线性系统理论作为系统和控制科学课程方面的一门最基础的课程。

有关线性系统理论方面的著作或教材现在已有很多。美国纽约州立大学石溪分校陈启宗教授著的《线性系统理论与设计》[1]，在国内外影响很大；清华大学郑大钟教授著的《线性系统理论》[2]，内容系统全面；还有其它许多这方面的著作和教材[3-10]，都各具特点。

本书是作者近年来在哈尔滨工业大学从事自动控制专业研究生《线性系统理论》课程教学的基础上写成的。本书在写作过程中力求做到结构清楚，层次分明。作为高等院校自动控制或相近专业高年级本科生和研究生的教材，本书在选材上没有包含以多项式矩阵方法为主的复频域理论，而只是系统地介绍了以状态空间方法为主的时间域理论。考虑到高等院校研究生的《线性系统理论》课一般都只有60学时左右，因而，本书将重点放在了线性系统理论中最基本、最重要的分析和设计问题之上。另一方面，为了适合广大工程技术人员和科学工作者使用以及学生将来的进一步深入研究之需要，本书还包含了一些带有“*”号的选学内容。第一次接触线性系统理论的读者可跳过这些内容，这样并不影响对于基本内容的理解。

本书包含了一批作者近年来的工作，如第六章中的特征结构配置设计和整个第十二章关于鲁棒控制的介绍，此外还有1.6、5.4、6.6、7.4、9.2、9.3、10.3、10.5等各节的内容。这些内容是于作者的许多工作中筛选出来的，并与全书内容有机地融为一个系统的整体。另外，这些内容也在一定程度上反映了线性系统理论近年来的新进展和本书的时代性。

在作者的教学过程中，学生普遍反映的一个问题是这门课程的“数学性”太强。针对这一点，本书第一章介绍了本书后续内容中经常用到的一些数学基础知识，其中1.6节介绍的广义Sylvester矩阵代数方程为作者的成果，在后续的特征结构配置设计、模型参考渐近跟踪设计、观测器设计和鲁棒极点配置设计等内容中屡次用到。

离散系统理论在很大程度上是与连续系统理论平行的。作者认为初涉线性系统理论的读者可以首先只学习连续系统方面的内容，因而将离散线性系统理论中的一些最基本的问题作为选学内容单独列在第十一章之中，并使其自成体系。

鲁棒控制是近年来国际控制理论界中十分活跃的一个研究领域，目前已经有了相当丰富的内容。本书第十二章作为选学内容对鲁棒控制进行了简单的介绍。应该指出，鲁棒控制的内容非常广泛，即使一本内容丰富的鲁棒控制方面的专著也无法搅括鲁棒控制的全部内容。我们将鲁棒控制加入本书的目的是为一些未接触过鲁棒控制的读者提供一个入门的

机会。

许多现有教材都是将系统设计的内容归在一章中笼统讲述的。而本书则将系统设计的几个基本问题——极点配置与特征结构配置、镇定与跟踪、二次型最优调节、解耦控制、观测器设计分成五章分别讨论，这样做可以使读者对控制系统设计有一个整体的认识，并对每一个具体的问题能有一个更加深入、全面的了解。

本书的每一章末尾都有一个小结和一定量的习题。小结中对全章的内容给出了简单扼要的概括和总结；为读者指出对于某些内容进行深入研究所需阅读的文献；提示读者在学习某些内容时应注意的一些问题；对某些理论和方法给出适当的评价；指出某些内容与其它章节内容的联系等等。在习题的配备上，除了一些基本的用以巩固一些基本原理和方法的计算题外，我们还有意识地配备了一定数目的思考题和证明题。它们对于加深基本概念和原理的理解是非常有益的。

在本书的写作过程中，许多地方得益于王恩平教授、郑大钟教授和刘豹教授等人的著作[2,4,7]。这些著作为本书的一些基本内容提供了部分素材。另外，本人的学生胡文远、马克茂和刘湘黔等人协助完成了书中部分内容的打字和校对工作。本人教过的许多研究生，特别是1995年秋季学期教过的全体研究生都对本书做了许多校对工作，同时还提出了许多宝贵意见。作者的同事陈兴林同志不仅协助审阅了本书的全部校样，而且在协助作者授课的过程中，对书中的许多内容还提出了建设性的意见。对于这些同志的热诚帮助和辛勤劳动，作者在此表示真诚的感谢！另外，在本书的写作过程中，作者得到了哈工大校领导、研究生院和航天学院领导以及控制工程系领导的大力支持，在此作者一并表示感谢！

由于作者水平有限，书中错误和不当之处在所难免。在此，作者诚挚的欢迎读者和同行提出批评指正意见。

段广仁

1996年6月

于哈尔滨工业大学

符　号　表

符　号	含　义
$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{\Phi}, \cdots$	大写黑斜体字母表示矩阵
$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{\phi}, \cdots$	小写黑斜体字母表示向量
$u, y, \alpha, \cdots$	小写斜体字母表示标量函数或标量
$V, \Omega, \cdots$	大写斜体英文字母或大写希腊字母表示集合
0	零数字、零向量或零矩阵
$\mathbf{C}^{m\times n}$	所有 $m\times n$ 复元素矩阵的全体
$\mathbf{R}^{m\times n}$	所有 $m\times n$ 实元素矩阵的全体
$\mathbf{C}^{n}$	所有 n 维复列向量的全体（即 $\mathbf{C}^{n\times 1}$）
$\mathbf{R}^{n}$	所有 n 维实列向量的全体（即 $\mathbf{R}^{n\times 1}$）
$\mathbf{C}$	所有复数的全体（即 $\mathbf{C}^{1}$）
$\mathbf{R}$	所有实数的全体（即 $\mathbf{R}^{1}$）
$\dim V$ 或 $\dim(V)$	子空间 V 的维数
$\exists$	存在
$\in$	元素属于
$\forall$	任取
$\subset$	集合含于
$\supset$	集合包含
$\cup$	集合的并
$\cap$	集合的交
$p\Rightarrow q$	p 蕴涵 q
$p\Leftarrow q$	q 蕴涵 p
$p\Leftrightarrow q$	p 等价 q
$\dot{\boldsymbol{x}}$	$=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{x}$
$\ddot{\boldsymbol{x}}$	$=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dot{\boldsymbol{x}}$
$\dddot{\boldsymbol{x}}$	$=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ddot{\boldsymbol{x}}$
$\boldsymbol{x}^{(i)}$	$=\dfrac{\mathrm{d}^{i}}{\mathrm{d}t^{i}}\boldsymbol{x}$
$\lVert\boldsymbol{x}\rVert$	向量 $\boldsymbol{x}$ 的欧氏范数

$\boldsymbol{I}_n$	n 阶单位矩阵
$\boldsymbol{A}^{-1}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆，
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置
$\overline{\boldsymbol{A}}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的共轭
$\boldsymbol{A}^{*}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的共轭转置
$\boldsymbol{A}>0$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 正定
$\boldsymbol{A}\geq 0$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 半正定
$\boldsymbol{A}>\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}>0$
$\boldsymbol{A}\geq\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\geq 0$
$\lambda_i(\boldsymbol{A})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 个特征值
$\lambda_{\max}(\boldsymbol{A})$ 或 $\overline{\lambda}(\boldsymbol{A})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最大特征值
$\lambda_{\min}(\boldsymbol{A})$ 或 $\underline{\lambda}(\boldsymbol{A})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最小特征值
$\rho(\boldsymbol{A})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的谱半径
$\sigma(\boldsymbol{A})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的谱 $\{\lambda \mid \det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=0\}$
$\sigma_i(\boldsymbol{A})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 个奇异值
$\sigma_{\max}(\boldsymbol{A})$ 或 $\overline{\sigma}(\boldsymbol{A})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最大奇异值
$\sigma_{\min}(\boldsymbol{A})$ 或 $\underline{\sigma}(\boldsymbol{A})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最小奇异值
$\boldsymbol{A}^{1/2}$	由 $(\boldsymbol{A}^{1/2})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{1/2})=\boldsymbol{A}$ 定义
$\|\boldsymbol{A}\|_2$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的谱范数
$\|\boldsymbol{A}\|_F$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 Frobenius 范数
$\|\boldsymbol{A}\|_1$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行和范数
$\|\boldsymbol{A}\|_\infty$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列和范数
$\mu_i(\boldsymbol{A})$	由 $\|\boldsymbol{A}\|_i\ (i=1,2,\infty)$ 导出的测度
$\mathrm{Re}\,\boldsymbol{A}$ 或 $\mathrm{Re}(\boldsymbol{A})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的实部
$\mathrm{Im}\,\boldsymbol{A}$ 或 $\mathrm{Im}(\boldsymbol{A})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的虚部
$\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}$ 或 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的迹
$\det\boldsymbol{A}$ 或 $\det(\boldsymbol{A})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式
$\mathrm{rank}\,\boldsymbol{A}$ 或 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩
$\mathrm{Adj}\,\boldsymbol{A}$ 或 $\mathrm{Adj}(\boldsymbol{A})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵
$\Delta\Delta\Delta$	证明结束符

目　　录

绪论

0.1 现代控制理论概述 ··· 1

0.2 线性系统理论概述 ··· 4

0.3 本书的内容安排 ··· 9

第一章　数学基础

1.1 线性空间与线性变换 ··· 11

1.2 矩阵代数中的几个结果 ··· 16

1.3 多项式矩阵 ··· 20

1.4 有理分式矩阵及其互质分解 ··· 25

1.5 若当分解 ··· 29

1.6 广义Sylvester矩阵方程 ··· 35

小结 ··· 39

习题 ··· 40

第二章　线性系统的数学描述

2.1 线性系统的传递函数描述 ··· 44

2.2 线性系统的状态空间描述 ··· 46

2.3 两种描述形式的比较及相互转换 ··· 52

2.4 线性系统的代数等价性 ··· 59

2.5 复合系统的数学模型 ··· 61

小结 ··· 65

习题 ··· 65

第三章　线性系统的运动分析

3.1 运动分析的含义 ··· 69

3.2 状态转移矩阵及其性质 ··· 71

3.3 线性时变系统的运动分析 ··· 73

3.4 线性定常系统的运动分析 ··· 76

3.5 脉冲响应矩阵 ··· 80

小结 ··· 84

习题 ··· 84

第四章　线性系统的能控性和能观性

4.1 能控性和能观性的定义 ··· 87

4.2 线性时变系统的能控性判据 ··· 91

4.3 线性定常系统的能控性判据 ··· 95

4.4 对偶原理与能观性判据 ……99
4.5 线性系统的能控、能观性指数 ……103
4.6 单输入-单输出线性系统的能控规范型和能观规范型……107
4.7 多输入-多输出线性系统的能控规范型和能观规范型……114
4.8 线性系统的结构分解 ……125
*4.9 线性系统的实现问题 ……134
小结……139
习题……140
第五章 系统的运动稳定性
5.1 Lyapunov意义下的运动稳定性 ……144
5.2 线性时变系统的稳定性判定 ……151
5.3 线性定常系统的稳定性 ……156
*5.4 二阶动力学系统的稳定性 ……162
*5.5 线性系统的外部稳定性 ……165
小结……167
习题……168
第六章 极点配置与特征结构配置
6.1 线性系统的常规控制律 ……171
6.2 极点配置问题及其解的存在性 ……176
6.3 状态反馈极点配置问题的求解方法 ……181
6.4 状态反馈特征结构配置 ……186
*6.5 输出反馈特征结构配置 ……191
*6.6 模型匹配(Model Matching)问题 ……199
小结……203
习题……204
第七章 镇定问题与渐近跟踪问题
7.1 镇定问题及其解的存在性 ……207
7.2 线性系统的状态反馈镇定律设计 ……210
7.3 渐近跟踪问题——定常参考信号的情形 ……214
*7.4 模型参考输出跟踪问题 ……218
小结……225
习题……225
第八章 线性二次型最优控制
8.1 变分法简介 ……228
8.2 有限时间状态调节器问题 ……233
8.3 无限长时间状态调节器问题 ……240
*8.4 输出调节器问题 ……244
*8.5 输出跟踪问题 ……246

小结……250
习题……251
*第九章 线性系统中的解耦问题
9.1 输入-输出解耦问题……253
9.2 输入-输出动态解耦——可解耦条件……257
9.3 输入-输出动态解耦——算法与算例……263
9.4 干扰解耦……268
9.5 跟踪系统中的干扰解耦……272
小结……280
习题……281
第十章 状态观测器设计
10.1 全维状态观测器……283
10.2 降维状态观测器……288
10.3 Luenberger函数观测器……293
10.4 观测器——状态反馈控制系统与分离原理……298
*10.5 环路传递复现(LTR)问题……303
小结……307
习题……308
*第十一章 离散线性系统理论
11.1 离散动态系统的数学描述……310
11.2 线性离散系统的运动分析……312
11.3 线性连续系统的时间离散化……315
11.4 离散时间系统的稳定性……319
11.5 离散时间系统的能控性和能观测性……324
11.6 连续系统时间离散化后保持能控和能观测的条件……329
11.7 离散系统的控制问题……333
小结……338
习题……339
*第十二章 鲁棒控制
12.1 鲁棒性定义……342
12.2 鲁棒控制的研究内容……345
12.3 时域稳定鲁棒性分析……349
12.4 线性系统的输出反馈鲁棒镇定……356
12.5 鲁棒极点配置……361
12.6 鲁棒Luenberger观测器设计……369
小结……376
习题……377
参考文献……378

绪　论

0.1　现代控制理论概述

线性系统理论是现代控制理论的一个重要组成部分，因此，在了解线性系统理论之前，了解一下现代控制理论，弄清楚线性系统理论在现代控制理论中的位置与地位是非常必要的。

控制理论包括古典控制理论和现代控制理论两大部分。

0.1.1　从古典控制理论到现代控制理论

古典控制理论的起源可以追溯到本世纪20年代。在20～40年代之间，曾涌现出许多古典控制理论的先驱，如Minorsky、Nyquist、Hagen、Bode和Wiener等。他们的工作[11-15]为古典控制理论奠定了基础，同时促进了二次大战中的许多武器和通信自动化系统的研制工作。大战后人们更多地总结了武器研制和设计方面的实践经验，陆续出版了古典控制理论方面的一些古典著作[16,17]，建立了较为系统的伺服理论。这对战后的许多实际自动控制工程起到了良好的指导作用，也为人类在较短的时间征服宇宙空间作出了贡献。二次大战后到50年代中期，控制理论又得到了新的发展，添加了根轨迹法、非线性系统的谐波近似法(描述函数法)、采样控制系统、自寻最优控制和部分最优控制、多变量系统、系统灵敏度分析和动态系统测试等新内容。到60年代初期，出现了划时代意义的状态空间方法、极大值原理和Kalman滤波技术以及Bellman动态规划。至此古典控制理论的发展与现代控制理论接轨。

概括性地讲，古典控制理论是具有下述特点的一门科学：

①以单变量线性定常系统为主要研究对象；

②以频率法作为研究控制系统动态特性的主要方法；

③以各种图表，如Nichles图、Bode图、Nyquist曲线、根轨迹Roth表等作为系统分析和综合的主要工具。

在特定输入下研究系统输出的运动规律称为系统的运动分析，而按一定动态性能要求，如稳定性、误差精度和各种动态指标——飞升时间、带宽、超调量和误差系数等，来改变这种运动规律，称为系统综合。值得指出的是，在古典控制理论的发展过程中，开始和后来都曾用过时域方法，如微分方程和差分方程描述等，但频率法却是主导的。同样，古典控制理论发展的后期，也曾研究过多变量系统和非线性系统，但从整体上看，它是以研究单变量线性定常系统为主的。

0.1.2　现代控制理论的形成与特点

现代控制理论起源于60年代。它以下述三个方面作为其形成的标志：

① 用于系统的整个描述、分析和设计过程的状态空间方法;

② 最优控制中的Pontriagin极大值原理和Bellman动态规划;

③ 随机系统理论中的Kalman滤波技术。

现代控制理论是在古典控制理论的基础上发展起来的。但不同于古典控制理论，它具有下述几方面的特点:

① 以多变量线性系统和非线性系统为研究对象。近代工业过程和航空、航天等许多领域中的实际系统都是非常复杂的，其中包含有多变量耦合、时变参数和非线性等等。这些复杂的系统都在现代控制理论的研究之列。事实上，作为现代控制理论形成标志之一，最优控制理论中的Pontriagin极大值原理，即是针对一般的非线性系统提出的。

② 以时域法，特别是以状态空间方法为主要研究方法。不同于古典控制理论，现代控制理论是在时间域上建立系统模型的状态空间描述，并在此基础上进行系统的各种定量和定性分析以及希望的控制规律设计。

③ 以现代数学为主要分析手段。古典控制理论以复变函数理论和拉氏变换为数学工具，而现代控制理论则涉及到现代数学的许多领域。研究对象从单变量线性定常系统过渡到多变量系统和非线性系统，必然对分析手段提出了更高的要求；系统描述从频域转为时域，为现代数学的介入提供了方便条件。现代控制理论中应用较多的数学分支是矩阵代数和微分方程理论。然而在现代控制理论已经得到了极大发展的今天，许多新的分支不断涌现。早在60年代看来和控制理论根本无缘的许多数学理论现已被用于现代控制理论新分支的研究之中。李代数理论用于离散事件系统，微分几何用于非线性系统都是这方面的例子。

④ 以计算机为主要实现工具。我们这里所讲的“实现”，并不是指将一个系统付诸于实际运行，而是指其分析和设计过程的实现。在古典控制理论中，由于研究对象简单，人们利用一些图、表通过手工即可完成分析和设计。但在现代控制理论中，单靠手工计算一般是无法完成较为复杂的研究对象的分析和设计的，而必须要利用计算机来实现分析和设计中的各种计算。目前，以计算机为主要工具，以现代控制理论为依据的一个现代控制理论分支——控制系统计算机辅助设计(CSCAD)已经日趋完善，并在实际中得到了重要的应用。计算机用于控制系统设计除在计算上显示了其极大的优越性外，还有许多其它的优点。如在计算机上很容易修改系统的参数，因而可对各种控制方案及不同的参数组合进行充分地比较，从中选出较好的控制方案。另外借助于计算机的图形显示功能，可对控制系统的动态特性获得更加深入的直观的理解。

尽管古典控制理论和现代理论各有其特点，但二者却是密切相关的。对此我们谈及下述两个方面:

① 任何事物都处于不断的发展变化之中，古典和现代控制理论从产生到发展至今天，已经在许多方面相互渗透。如以英国学者Rosenbrock学派的多变量频域理论[1]和控制系统中的多项式矩阵方法[2,3]都属于两者交叉的内容。

② 即使在古典控制理论的约定研究范围之内，也即单变量线性定常系统的分析和设计之中，尽管古典方法和现代方法从模型描述到设计方法各不相同，但二者的设计结果可在Laplace变换及其逆变换下相互转化。从这种意义上讲，二者在单变量系统的分析和设计上是统一的。

0.1.3 现代控制理论的研究内容与分支

控制理论的研究对象是系统，而所谓的控制是指系统的控制。从这一角度来看，现代控制理论的研究内容和分支在很大程度上要取决于系统的范畴。

系统的概念及其含义是比较广泛的。系统是由相互关联和相互作用的若干部分按一定规律组合而成的具有特定功能的一个整体。系统可具有完全不同的属性，如工程系统、生物系统、经济系统、社会系统等。但是，在系统理论中，常常抽去具体系统的物理或社会含义而把它抽象化为一个一般意义下的系统加以研究，这种处理方法有助于揭示系统的一般特性。系统的概念具有相对性，系统的每个组成部分也可以是一个系统，而系统自身又可以是一个更大系统的组成部分。系统最基本的特征是它的整体性，系统的行为和性能是由其整体所决定的，系统可以具有其组成部分所没有的功能。有着相同组成部分但它们的关联和作用不同的两个系统可呈现出截然不同的行为和功能。

系统有静态系统和动态系统之分。动态系统又称之为动力学系统，其含义是含有动力学行为，在模型描述上表现为含有系统变量的导数项或差分项，也即系统模型可用微分或差分方程来部分或完全描述。而静态系统的模型则只是各变量间的代数方程。在系统与控制理论中，主要研究动态系统。

对于动态系统，有连续和离散之分。凡是用微分方程描述的系统为连续系统；凡是用差分方程描述的系统为离散系统。对于连续和离散系统，有线性和非线性之分。凡在其模型描述中含有非线性微分或差分环节的系统称之为非线性系统，而在其模型中只含有线性微分或差分环节的系统称之为线性系统。对于线性和非线性系统，又都有确定性和随机性之分。凡在其模型描述中含有随机变量的系统称之为随机系统，而那些其模型中不含有随机变量、只含有确定性变量的系统称之为确定性系统。进一步对于确定性系统和随机系统，又都有正常和奇异之分。所谓正常系统是指在其模型描述中状态变量的个数与微分或差分环节数目一致的系统；而奇异系统是指那些模型中同时含有状态的微分或差分方程和代数方程的系统。奇异系统也常称为广义系统。对于正常系统和广义系统，又都有单变量和多变量之分。凡是具有一个输入变量和一个输出变量的系统称之为单变量系统，而凡是具有多个输入和/或多个输出的系统称之为多变量系统。对于单变量系统和多变量系统，又有定常和时变之分。凡在其模型描述中含有时变参数的系统称之为时变系统，而凡在其模型描述中全部参数均与时间无关的系统称之为定常系统或时不变系统。而对于定常系统和时变系统，又都有确知和不确知之分。凡其模型完全确定、参数已知的系统称之为确知系统，而在其模型描述中含有未知因素的系统称之为不确知系统。动态系统的上述分类过程示于图0.1.1之中。注意，在该图的各个层次中，每上一层的限定定语仍然作用于下一层。如第六层的单变量系统实为连续、线性、确定性的和定常的并且是确知的单变量系统。这样，在古典控制理论中所研究的系统实际上只是一类非常窄的连续、线性、确定性的和正常的单变量确知系统。另外需要说明的是，此图中各层的排列顺序并不很重要，调换它们的顺序只是改变一些层次的修饰语的顺序。还有，此图在纵向和横向上都可以继续分划下去。

在现代控制理论中，图0.1.1中的任何一个层次中的任一位置所代表的系统均在所研究之列。现代控制理论的内容即是这些系统的分析和设计，包含了非常广泛的内容。

目前图0.1.1所示的所有系统的分析和设计，均得到了一定程度上的讨论。并根据所讨

论的系统类型产生了一系列分支，如线性系统理论、非线性系统理论、分布参数系统理论，随机系统理论(或Kalman滤波与随机最优控制)，广义系统理论、大系统理论等等。另外涉及到不确知系统、还有系统辨识和自适应控制、鲁棒控制理论等一些分支。

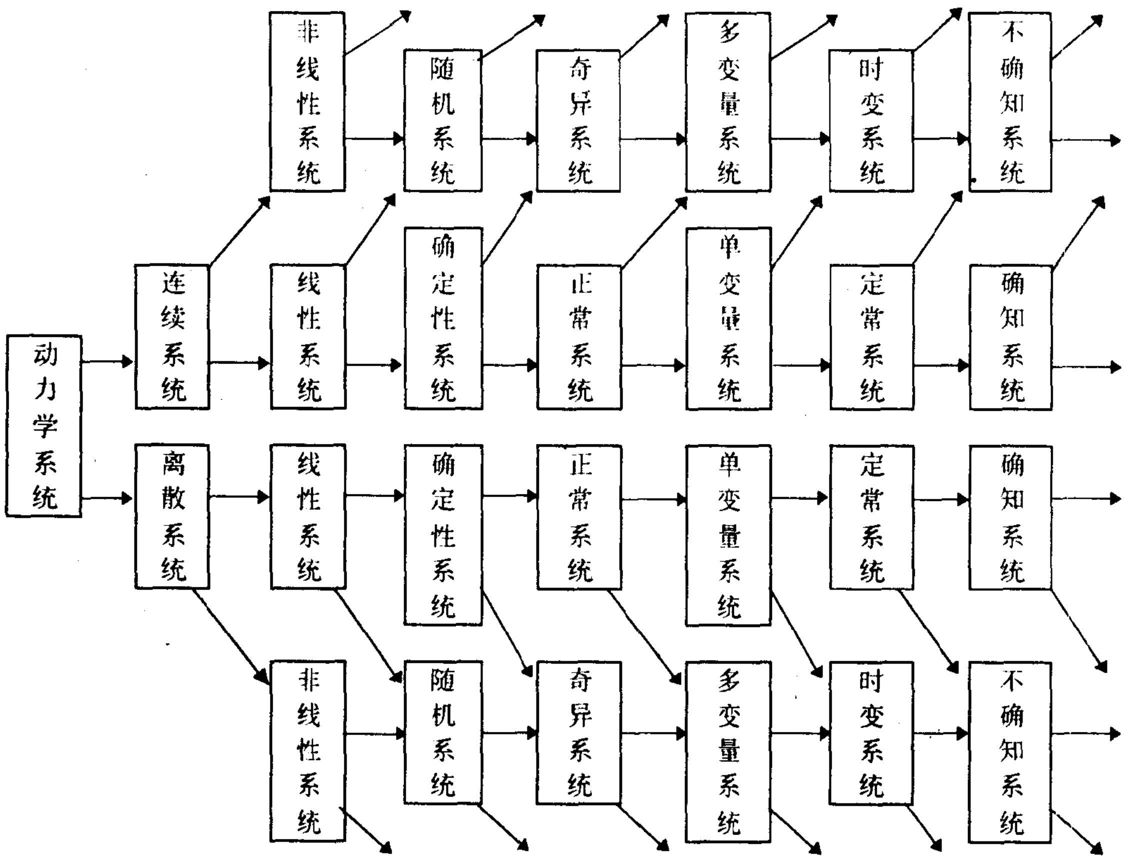

图0.1.1 动力学系统的分类图

0.2 线性系统理论概述

作为现代控制理论中最基本、最成熟的分支之一——线性系统理论，具有其基本的重要性。它一方面在过程控制、航空、航天等领域的应用中起到了重要作用，另一方面也为现代控制理论的其它分支提供了基础。在进入本书对于线性系统理论的系统探讨之前，我们先对其作一个概括性的介绍，以使读者能先对它在整体上有个端貌性的认识。但值得首先说明的是，按照线性系统的定义，广义线性系统和随机线性系统等一些分支均属于线性系统理论范畴。然而按习惯，通常所指的线性系统理论仅涉及到确定性的正常线性系统，而广义线性系统和随机线性系统理论则视为现代控制论的另外的独立分支。

0.2.1 线性系统理论的研究对象

顾名思义，线性系统理论的研究对象为线性动态系统，简称线性系统。它是实际系统

的一类理想化了的模型。当描述动态系统的数学方程具有线性属性时，称相应的系统为线性系统。线性系统是一类最简单且研究得最多的动态系统。线性系统的一个基本特征是满足叠加原理，即若表示系统的数学描述为L，那么对任意两个输入变量u_1和u_2以及任意两个有限常数c_1和c_2，必有

$$L(c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2) = c_1 L(\boldsymbol{u}_1) + c_2 L(\boldsymbol{u}_2)$$

但是，应当指出，上述叠加原理的关系式通常只适用于有限项和，如果不附加假设就不能推广到无穷项和。线性系统满足叠加原理这一属性，导致了其在数学处理上的简便性，使得可以采用比较成熟的数学工具，如数学变换(傅里叶变换、拉普拉斯变换等)和线性代数，来研究它的运动和性质。

严格地说，一切实际的系统都是非线性的，真正的线性系统在现实世界中是不存在的。但是，很大一部分实际系统，它们的某些主要关系特性，在一定的范围内，可以充分精确地用线性系统来近似地代替。并且，实际系统与理想化了的线性系统间的差别，对于所研究的问题而言，已经小到无关紧要的程度而可忽略不计。因此，从这个意义上说，线性系统或者可线性化的系统又是大量存在的，而这正是研究线性系统的实际背景。对于一个实际的系统是否可将其按线性系统处理，一般难以给出普遍的和绝对的判断准则，需要对具体系统进行具体的分析。这里，不仅需要考虑系统本身的因素，而且也需要考虑所研究问题方面的因素，只有从这两个方面才能决定是否可把一个实际系统看成为线性系统。

将线性系统进行更细致的分类，可区分为线性定常系统和线性时变系统两类情况。线性定常系统也称为线性常系数系统，其特点是描述系统状态的线性微分或差分方程中的每一个系数都是不随时间变化的常数。如果系统的线性微分或差分方程的系数不全是常数，其中包含有为时间t的函数的系数，则这样的系统就为线性时变系统，通常也称为线性变系数系统。考虑到系统的运动状态的特性和描述此系统的微分方程或差分方程的类型有着密切的联系，而不同类型的微分方程在解的特性上有着重要的和实质性的差别，因此把线性系统作上述分类是必要的和有意义的。从实际的观点而言，线性定常系统也只是一种实际系统的理想化模型，它是对实际系统经过近似化和工程化处理后所导出的一类理想化系统。线性常系数系统是最易于研究的，而且为数很多的实际系统都可在一定的范围内足够精确地用线性常系数系统来代替，因此它是线性系统理论的主要研究对象。

0.2.2 线性系统理论的主要任务

简单地说，线性系统理论主要研究线性系统状态的运动规律和改变这种运动规律的可能性和方法，建立和揭示系统结构、参数、行为和性能间的确定的和定量的关系。通常，研究系统运动规律的问题称为分析问题，研究改变运动规律的可能性和方法的问题则为综合问题或设计。前者属于认知系统，后者则为改造系统。

(1) 系统数学模型的建立

不管是对系统进行分析还是综合，一个首要的前提是建立起系统的数学模型。在建立模型时，最重要的是要确定什么是需要反映和研究的主要系统属性，并在此基础上来定出它的定量关系。随着所考察的问题的性质的不同，一个系统可以有不同类型的模型，它们代表了系统的不同侧面的属性。数学模型中的基本要素是变量、参量、常量和它们之间的关系。系统模型中的变量，包括状态变量、输入变量和输出变量，在有些情况下还需要考

虑扰动变量。参量可以是系统的参数或表征系统性能的参数，前者受系统环境的影响可产生变动，后者可随设计要求而人为地改变其取值。常量是指系统中不随时间改变的参数。而变量、参量和常量的关系，需要针对具体问题根据相应的物理原理来决定。线性系统的数学模型主要有两种形式，即时间域模型和频率域模型。时间域模型表现为微分方程组或差分方程组，可同时适用于常系数系统和变系数系统；频率域模型表现为传递函数和频率响应，只适用于常系数系统。对应于系统的这两种模型，发展和形成了线性系统理论中的两类不同方法——状态空间方法和复频域方法。建立系统的数学模型的基本途径有解析法和实验法，前者通过分析系统的机制直接运用物理原理来建立表征系统动态过程的数学描述，后者则是在通过实验取得数据和按照相应准则处理数据的基础上来导出最接近系统实际情况的简化数学描述。建模问题是系统研究中的一项非常基本和重要的问题，它已构成系统理论中的一个独立的分支。

(2) 系统分析

线性系统的分析包含两个大方面——定量分析和定性分析。

回忆一下古典控制理论，其中的一个重要内容即是系统动态过程分析，即分析系统对于一典型输入信号的响应并定义了飞升时间、超调量等一些描述响应特性的量。对多变量系统对象，分析清楚系统对于某个输入的响应和性能，无疑也是十分必要的。这种系统分析称为线性系统运动分析，它是一个已知系统的输入量来求其输出量的过程，为一种定量分析。

线性系统定量分析可以解析地给出系统在某种激励信号下的运动轨线，但其分析涉及到繁多和复杂的计算，常常需要借助于数字或模拟计算机来完成。另一方面，这种解析的运动规律给我们带来的对于系统的认识并不够深刻和明确。例如，为了保证系统能在实际的带有一定扰动的环境下正常地工作，人们希望当系统的响应受扰发生变化时，能够经“足够长”的时间之后再恢复到希望的响应轨迹上去。再如，为了对系统实施有效的控制，人们特别关心的一个问题是存不存在一个允许控制输入，使得系统在它的作用下能够产生希望的动作和运动。对于这两个问题，基于系统的定量分析结果是不能立即得到答案的。它们属于系统的定性分析问题。前者为系统的运动稳定性分析问题，后者为系统的能控、能观性分析中的问题。

(3) 系统设计

任何一个实际的系统都有特定的任务或性能要求。当一个系统不能满足希望的性能或不能完成所规定的任务时，就需要对系统进行干预、调节或控制来改变原有系统，使改变后的系统满足所规定的任务或性能要求。这样一个完整的过程称为控制系统设计或控制系统综合。

如何实现对于一个系统的干预或控制呢？每一个系统都有一定的输入变量和输出变量，它们分别代表了系统受外界作用和系统作用于外界环境的窗口。通过调整控制变量便达到改变原有系统结构及性能的目的。通常把控制量的调整规律称为控制规律，简称控制律。

控制律的选取有两大类。一类是不利用系统中变量信息的控制律，在形式上表现为关于时间的一个特定的一元函数，这类控制律称为开环控制律。而受其作用，调整运行的系统称为开环系统。显然，由于开环控制律不能“敏感”系统的变化，因而当系统模型不准

确或受扰发生变化时，开环控制系统就会产生大的控制误差。另一类控制规律是利用了系统的变量信息的控制律，称为反馈控制律。在反馈控制律作用下运行的系统称为相对于原来系统的闭环系统。不同于开环控制律，闭环控制律能够“敏感”系统变量的变化，实现对系统变化的调节，因而具有一定的抗扰动能力，得到了广泛的使用。

根据上面介绍的术语，所谓一个闭环控制系统设计问题，即是要设计给定系统的一个适当的反馈控制律，使得闭环系统具有希望的性能或可实现希望的任务要求。那么如何表征这种“希望的性能或任务要求”呢？这又需要所谓性能指标的概念，它是所谓系统希望性能和任务要求的确切描述。性能指标分为优化型指标和非优化型指标两大类。性能指标的不同决定了不同的设计问题。常见的优化型指标是一类二次型指标，求解满足这种指标的控制系统的设计问题称为二次型最优控制问题，于本书第八章中讲述。另外，如模型匹配问题，即要求闭环系统与一个给定的已知系统充分接近，所用的也是一种优化型指标。在线性系统设计的基本问题中，用得较多的还是非优化型指标，它们所注重的是闭环系统的某种性质，而与动态优化无关。如本书第六章中的极点配置问题，以一组希望的闭环极点为指标，反映了系统的稳定性和响应的快速性；第七章介绍的镇定问题和渐近跟踪问题分别以闭环系统的稳定性和系统输出渐近跟踪某一指定信号为指标。在一个实际系统的设计中，可能对控制系统提出各种各样的要求，而且往往还可能是多种要求并存。从这一角度讲，控制系统设计的内容可以是很广泛、很复杂的。但这种复杂的多目标设计问题在一般线性系统理论的教科书中不予讨论。

0.2.3 线性系统理论的发展过程

本世纪50年代中期，古典的线性系统理论已经发展成熟和完备，并在不少工程技术领域中得到了成功的应用。古典线性系统理论的数学基础是拉普拉斯变换，系统的基本数学模型为传递函数，主要的分析和综合方法是频率响应法。古典频率法对于单输入-单输出线性定常系统的分析和综合是很有成效的。但是，古典线性系统理论也具有明显的局限性，突出的是难于有效地处理多输入-多输出系统，并且难以揭示系统的更深刻的特性。

在50年代蓬勃兴起的航天技术的推动下，线性系统理论在1960年前后开始了从古典阶段到现代阶段的过渡，其重要标志之一是卡尔曼(R.E.Kalman)系统地把状态空间法引入到系统与控制理论中来[3, 2]。状态空间法的一个基本特点是，采用状态空间这种内部描述取代先前的传递函数那种外部输入-输出描述，并对系统的分析和综合直接在时间域内来进行。状态空间法可同时适用于单输入-单输出系统和多输入-多输出系统、线性定常系统和线性时变系统。在状态空间法的基础上，卡尔曼进一步提出了能控性和能观测性这两个表征系统结构特性的重要概念，已经证明这是线性系统理论中的两个最基本的概念。能控性和能观测性的引入，导致了线性系统分析和综合在指导原则上的一种根本性的变化。它集中表现在用系统的“内部研究”代替了传统的“外部研究”，并使分析和综合过程建立在严格的理论基础上。建立在状态空间法基础上的线性系统的分析和综合方法通常称为现代线性系统理论。

自60年代中期以来，线性系统理论不论是在研究内容还是在研究方法上，又有了一系列新的发展。出现了着重从几何方法角度来研究线性系统的结构和特性的线性系统的几何理论，出现了以抽象代数为工具的线性系统的代数理论，也出现了在推广古典频率法基础