高等学校试用教材

一般拓扑学导引

李孝传　陈玉清

人民教育出版社

本书是作者参照高等学校理科数学、力学、天文学教材编审委员会于1980年审订的高等师范院校《拓扑学教学大纲》编写的. 内容为拓扑空间、连通性、分离公理与可数性公理、紧致性、正则性与正规性、度量化定理等五章,外加集合论提要作为预篇,且各章配有习题,便于使用.

本书由刘应明教授任主审,经理科数学教材编委会委托蒲保明编委任复审,同意作为高等师范院校教材出版.

本书论述了一般拓扑学的基本内容,取材适当,叙述论证较为清晰,概念引入比较自然,注意到由具体到抽象再回到具体,习题配备难易适度,也可作为综合大学数学系的教材或参考书.

责任编辑 丁鹤龄

高等学校试用教材

一般拓扑学导引

李孝传 陈玉清

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

上海商务印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 8.625 字数 205,000

1982年12月第1版 1983年5月第1次印刷

印数 00,001—13,800

书号 13012·0794 定价 1.15 元

前　言

一般拓扑学也叫做点集拓扑学，它在现代数学的许多分支中、特别是在现代分析学中得到了大量的应用，不但如此，它在数学的邻近学科中也不乏应用. 因此，它对于现代数学及其邻近学科、乃至工程技术科学的学习与研究方面，其重要性已无容置疑了. 可是，关于拓扑学方面的书籍在国内目前已出版的不多，这与中国这样一个土地广大、人口众多的国家是很不相称的，更不用说这种情况如何能满足科学技术现代化的需要了. 有鉴于此，我们决心合作写出这本书来以作为引玉之砖.

本书是根据我们关于这门课程的原有讲稿、结合祖国当前的实际、并参照祖国1980年理科数学编委会审订的高等师范院校《拓扑学教学大纲》改写而成的. 它可以作为高等师范院校或综合性大学数学系的教材与教学参考书之用.

为了减少教学方面的困难并能引起初学者的兴趣起见，我们写作时采用了由具体到抽象再回到具体，或者说得更确切一些，由特殊到一般再回到特殊的方法：以欧氏空间为模型引入度量空间，进而引入拓扑空间，并从第一章开始，各章都以这一章的一般理论在欧氏空间中的应用来结束，或者以与本章所论拓扑性质有关的度量性质来结束. 这样，度量空间的理论将不设专章讨论，而分散于各章.

本书内容如书名所示，以引导初学“点集拓扑学”者入门为目的，因此取材不侧重全面与现代化，而只求为这门学科的进一步学习与研究奠定基础. 根据我们各自在中国与美国的教学经验，我

们相信,本书的内容已经足以达到这个目的.

本书的内容也许可以说已经足够精简了; 但如果在实际教学中,由于各种原因需要对本书内容作进一步的精简,则以下的删节是可以参考的: 预篇可以不讲, 或只介绍以后各章所需要用到的记号和术语;凡节数、款数、例数右肩附有星号的可以不讲;定理下面"证"字右肩或证明的"明"字右肩附加星号的,表示定理应该讲,但它的证明可以不讲,或者表示定理及其第一个证明应该讲,第二个证明可以不讲. 第一章第六节的款 5* 虽然可以略去,但由于商空间是一个比较重要的概念, 我们建议最好还是介绍一下这个概念及例子, 以下的几个定理则可以酌情不讲. 又如果删去第五章的第四节*, 则显然下一节的定理(5.8)、(5.9)与(5.10)中的 T_3 必须用 T_4 来代替. 总之, 本书作为教科书, 可以灵活处理: 部分内容既可以删节, 也可以不删节, 甚至可以补充; 若是删节也可以多于上面提到的范围, 但应注意不影响后继教材的讲授.

每章末尾都有习题. 一般说来,习题并不难;而具有一定难度的,习题号数右肩则注有星号,初学者可以不做. 在某些习题中我们引入了正文中所未引入的一些概念, 并列出了与之相关的一些定理,其中某些定理的证明无疑是困难的,但容易在某些文献中查出. 这样的一些习题,可以看作是对正文的补充.

顺便说明一下本书所采用的几个记号: 我们仿效江泽涵教授在他的《拓扑学引论》一书中那样,用记号"▌"表示"证明完毕". 在援引同一章的定理、命题或定义时,将直接写出它们在这一章里的番号. 但如果,比如说,在第二章以后的某一章援引第二章的定理(4.2) 和定义 (1.1) 时, 则将它们分别写成定理 (2.4.2) 和定义(2.1.1); 定义(0.6.8)则表示预篇第六节的定义(6.8); 又例(三)2 及习题(二)VI*,1 分别表示第三章的例 2 及第二章的习题 VI*,

1；依此类推.

还应该说明的是，本书的写作是在西南师范学院数学系教授李孝传的主持下，由他执笔写成并修订的. 本书的内容和习题的绝大多数取自他的原有讲稿. 而这些内容中有很大一部分则又取材于C. Chevalley于1945年为美国普林斯顿(Princeton)大学数学专业研究生和数学系本科生合开的«一般拓扑学»和他在1946年为数学专业研究生所开设的«实变函数论»，以及R. H. Fox于1946年在该大学为数学专业研究生所开设«点集拓扑学»，且为李孝传所作的课堂讲授笔记.不过这些内容几经后者组织、整理、删节和增补，已失去原样. 特别是写作本书时，改动更大；其中许多内容与他自己的工作也是分不开的；例如，预篇中关于笛卡尔积的部分积的命名和记号、关于分支函数的命名、关于康托尔集性质的评论、关于度量凸性的命名和有关性质及其应用、以及第四章和第五章习题中的公理E_δ和公理B_*及其推论等等. 美国福德姆(Fordham)大学数学系副教授陈玉清博士，于1978—1979年在北京师范大学讲学期间首先倡议由李孝传主持与他合写此书，从而对本书的写成起了促进作用.在拟订写作提纲和讨论本书初稿时，陈玉清博士提出了有益的意见，并且在本书中也采用了他在北京师范大学讲学时所用的一些记号、术语、教材内容和习题；例如命题(0.2.1)、(0.4.12)、(2.4.7)、预篇第四节中关于有序偶的N. Wiener的定义、第一章的例14等等. 又李孝传在执笔时对陈玉清的讲学内容也略有发展；例如，系(3.2.6)原为他讲学内容的一个定理，经前者推广而得到定理(3.2.5).

最后，我们对北京师范大学和西南师范学院领导所给予我们的支持和关怀，对北京大学数学系江泽涵教授所给予我们的鼓励，对北京师范大学数学系以系主任张禾瑞教授为首的老师们、特别是四川大学数学系刘应明教授对本书所提的宝贵意见和建议，以

及西南师范学院数学系刘建军同志对本书索引的编写，我们在此一并致以衷心的感谢．又本书的缺点和错误在所难免，切望读者斧正。

李孝传　陈玉清

1980年12月

目　录

预篇 集合论提要

集合论的初步知识假定读者业已具备. 下面我们只引进为以后各章所需要的记号、定义与基本定理,而且一般不给予定理以证明.

一、记 号

令 p 与 q 表示任意两个命题.

1) $p\wedge q$ 表示 p 与 q 或既 p 且 q.

2) $p\vee q$ 表示 p 或 q, 但不排斥 p 与 q; 也就是说, 这里的"或"是"或此或彼或两者"的"或".

3) $\sim\cdot p$ 表示 p 的否定, 即非 p.

4) $p\Rightarrow q$ 表示 p 蕴涵 q; 也就是说, 如果 p 则必 q.

5) $p\Leftrightarrow q$ 表示 p 与 q(逻辑地)等价; 这就是说, p 当且仅当 q; 或 p 以 q 为充要条件; 或者换句话说, p 与 q 同时为真或同时为假; 也就是说,

$$(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow p).$$

例如, "$(p\Rightarrow q)\Leftrightarrow(\sim\cdot q\Rightarrow\sim\cdot p)$"的意义就是"命题 $p\Rightarrow q$ 与其逆否命题 $\sim\cdot q\Rightarrow\sim\cdot p$ 等价".

6) $\exists x$ 表示存在一个 x; 这就是说, 至少有一个 x.

7) $\exists|x$[1] 表示存在唯一的一个 x.

---

① 参看 L. M. Graves, The Theory of Functions of Real Variables, 2nd edition (p. 12), McGraw-Hill Book Comp., Inc., New York 1956. 也有用 $\exists!$ 表示"存在且唯一"的.

8) $\ni\cdot$或者 s.t. 表示使得或能使.

9) $\forall x$ 表示对于所有或对于每一个 x. 例如，令 x 与 y 表示实数. 那末，命题

p: $$\forall x>0\,\exists y\ni\cdot 0<y\wedge y<x$$

的意义就是："对于所有的正数 x 都至少有一个正数 $y<x$." 鉴于实数系的稠密性，这个命题显然是真的. 命题 p 的否定是

$\sim\cdot p$: $$\exists x>0\ni\cdot\forall y(0\geqslant y\vee y\geqslant x),$$

意即，"至少有一个正数 x，使得对于所有的 y，或者 y 不为正数，或者 y 不小于 x"；换句话说，"至少有一个正数 x，使得每一个正数 y 都不小于 x". 这个命题当然不真.

应该观察到，在这两个互相否定的命题 p 及 $\sim\cdot p$ 中，记号 $\forall$ 与 $\exists$ 互相交换，又记号 $\wedge$ 与 $\vee$ 也互相交换，自然还有其他互相否定的改变. 而这正是否定一个命题的一般规律.

二、集合·区间

集合论是现代理论数学各分支的共同基础，它给予了后者一种共同的语言. 因此《拓扑学》不能例外，也建立在这一基础之上，利用着这一共同的语言.

1. 集合 集合是数学中的一个很基本的概念，对它作深入的分析是数学基础的任务. 我们现在满足于对它进行适当的描述. 这样的描述也可以称为描述性定义.

任何具体的或抽象的事物(讨论的对象)，集多为一，把它们看作一个整体时，这个整体就叫做一个**集合**. 例如，某处的"一堆石块"的"堆"，某一牧场上的"一群牛"的"群"，以及实数的"全体"，拉丁字母的"全体"，都是各式各样的集合. 集合也简称为集.

组成一个集合的每一个对象叫做这个集合的一个**元素**. 例如"银河系"就是一个集合，其中的每个星体都是银河系这个集合的元素.

集合也可以看成是由一个特性(property)或条件 $p(x)$ 所决定. 特性$p(x)$必须是这样：一个对象 x 具有或不具有特性(满足或不满足条件)$p(x)$，二者必居其一，且只居其一. 于是一切具有特性 $p(x)$的对象 x 就组成一个集合 A，称为由特性 $p(x)$所决定；而每个具有特性 $p(x)$的对象都是 A 的元素，否则就不是[①]. 为了表示集合 A 由特性 $p(x)$所决定,我们使用记号

$$A=\{x|p(x)\}.$$

为了表示 x 是集合 A 的元素,我们写成:

$$x\in A \quad 或 \quad A\ni x,$$

读作"x 属于 A"、"x 在 A 中"、"x 包含于 A"或"A 包含 x". 记号 $x\notin A$ 或 $A\not\ni x$ 表示"x 不属于 A"，即 $x\in A$ 的否定[②].

例 1 令特性 $p(x)$表示"x 是一个自然数",并令

$$\mathbb{N}=\{x|x 是一个自然数\},$$

则 $\mathbb{N}$ 为一切自然数所成的集合,称为**自然数系**. 令

$$\mathbb{Z}=\{x|x 是一个整数\},$$

则 $\mathbb{Z}$ 为一切整数所成的集合,称为**整数系**.

空集将用记号 $\emptyset$ 表示,其定义如下:

$$\emptyset=\{x|x\neq x\}.$$

其实，空集可用任何特性 $p(x)$ 来定义，只要它不为任何对象 x 所具有. 例如,令 x 表示实数;则

① x 应该限制在一个已被承认的集合内取值,否则可能产生悖论. 例如，若令特性 $p(x)$表示"x 是一个集合",则 $p(x)$所决定的就是一切集合组成的"集合"，因为任何特定的集合 x 都满足条件 $p(x)$. 但如下文(2.1)所示,它不能是一个集合,从而导致了矛盾.

② $x\notin A$ 也被写成 $x\overline{\in} A$ 或 $x\in' A$,但我们宁愿使用前者.

$$\emptyset=\{x \mid x>7 \wedge x<6\}. \tag{1}$$

空集只有一个，它不包含任何元素.

令 $\mathbb{R}$ 表示所有实数组成的集合，即**实数系**. 我们看出，(1)式中的 x 在 $\mathbb{R}$ 中取值. 一般说来，设 A 为任一给定的集合，$p(x)$ 为一给定的条件. 若集合 B 由满足条件 $p(x)$ 的 A 中一切元素 x 所组成，则写成：

$$B=\{x\in A \mid p(x)\}.$$

例 2 令 $\mathbb{E}=\{x\in\mathbb{Z} \mid \exists n\in\mathbb{Z}\ni\cdot x=2n\}$；则 $\mathbb{E}$ 表示一切偶数组成的集合，即**偶数系**.

我们以后分别用记号 $\mathbb{N}$、$\mathbb{Z}$、$\mathbb{Q}$、$\mathbb{R}$、$\mathbb{C}$ 去表示自然数系、整数系、有理数系、实数系及复数系.

一个集合的元素本身也可以是其他对象组成的集合. 例如，银河系由星体所组成，而银河系的每个元素，即星体，又可以看成是由构成它的一切原子所组成的集合. 如果一个集合的元素是集合，那末，这个集合的元素的元素也仍然可以是集合，依此类推. 然而“包罗一切的集合”或“由一切集合组成的集合”并不存在. 事实上，我们有下面的命题.

(2.1) $\forall$ 集合 A, $\exists$ 集合 $B\ni\cdot B\notin A$.

证 令 $$B=\{x\in A \mid x\notin x\}.$$

假定 $B\in A$. 那末，下面的两种情形必定有一种，而且也只有一种发生.

1) $B\in B$. 在这一情形下，必然有 $B\in A\wedge B\notin B$. 这是一个矛盾.

2) $B\notin B$. 在这一情形下，由于 $B\in A$，因而有 $B\in B$. 这又是一个矛盾.

由此可见，决不能有 $B\in A$，也就是说，必然有 $B\notin A$. ∎

当 A 是所谓“所有集合组成的集合”时，命题(2.1)证明中的

论述就是罗素悖论. 因此这个命题证明中的论述①应该说是著名的罗素悖论的推广，现在也被称为**罗素悖论**，由(2.1)立即看出：

(2.2) 不存在所有集合组成的集合以及包罗一切的集合.

满足条件“$A\in A$”的所有所谓的“集合”A 我们也从集合论中把它们排除掉.

前面提到的“整体”、“全体”和“系”其实都是集合的同义词. “总体”及“类”也是集合的同义词②.

如果一个集合由对象 a、b、c、$\cdots$所组成，则这个集合可以写成

$$\{a,\ b,\ c,\ \cdots\}.$$

例如，自然数系 $\mathbb{N}$ 可以写成

$$\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n,\ \cdots\};$$

偶数系 $\mathbb{E}$ 可以写成

$$\{0,\ \pm2,\ \pm4,\ \cdots,\ \pm2n,\ \cdots\};$$

自然数列的前面 n 个数所成的集合可以写成

$$\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n\}.$$

由一个对象 a 单独组成的集合 $\{a\}$ 叫做**单元集**，它也可以用 $\{x|p(x)\}$ 的形式定义如下：

$$\{a\}=\{x|x=a\}.$$

二元集 $\{a,\ b\}$ 也叫做**无序偶**，可定义如下③：

$$\{a,\ b\}=\{x|x=a\vee x=b\}.$$

单元集 $\{a\}$ 在概念上与它的唯一元素 a 并不是一回事. 例如，令 $a=\{1,\ 2,\ 3\}$；则集合 a 由三个元素 1、2、3 所组成，但 $\{a\}$ 只有唯一

---

① 参阅 P. R. Halmos, Naive Set Theory, p. 7.

② 在《范畴论》中有将“集合”与“类”加以区别的必要. 粗略地说来，凡“集合”都是“类”，但“类”则不一定是“集合”，并承认“所有集合组成的类”. 不过有的数学家也怀疑这种非集合的“类”的存在. 于此，我们不予深究. 由于在本书范围内无必要引用这种非集合的“类”，我们倒不如把它看成“集合”的同义词.

③ 当 $a=b$ 时，$\{a,\ b\}=\{a\}$.

的一个元素 a, 可见 $\{a\}$ 与 a 不同.

一个集合与组成它的元素之间的次序无关. 例如, 集合

$$\{1,\ 2,\ 3\}、\{2,\ 3,\ 1\}、\{3,\ 2,\ 1\}$$

等等都是同一个集合. 二元集之所以称为无序偶, 其原因也就在这里. 又一个集合的任何两个不同的元素不能当成同一个元素看待; 一个元素也决不能看成两个或两个以上的元素. 例如, 在一个空间笛卡尔坐标系中, 点 $(1,\ 1,\ 1)$ 的三个坐标组成的集合只能是单元集 $\{1\}$.

习惯上, 我们常用大写的拉丁字母 A、B、C、…去表示集合, 用小写的拉丁字母 a、b、c、…去表示集合的元素, 但也不排斥其他的记号法.

2. 区间 设 $a,\ b\in\mathbb{R},\ a<b$. 令

$$[a,\ b]=\{x\in\mathbb{R}\mid a\leqslant x\leqslant b\},\quad]a,\ b[=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x<b\},$$

则集合 $[a,\ b]$ 与 $]a,\ b[$ 分别称为以 a、b 为端点的**闭区间**与**开区间**①.

令 $[a,\ b[\ =\{x\in\mathbb{R}\mid a\leqslant x<b\},\quad]a,\ b]=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x\leqslant b\}$, 则集合 $[a,\ b[$ 及 $]a,\ b]$ 都叫做以 a、b 为端点的**半开区间**或**半闭区间**.

以 a、b 为端点的开、闭和半开区间统称为**有限区间**或**有界区间**. a 叫做有限区间的**左端点**或**下端点**, b 叫做**右端点**或**上端点**. 正数 $b-a$ 叫做有限区间的**长度**, 或简称为**长**.

令 $[a,\ +\infty[\ =\{x\in\mathbb{R}\mid x\geqslant a\},\quad]-\infty,\ b]=\{x\in\mathbb{R}\mid x\leqslant b\}$, 它们分别叫做以 a 或 b 为端点的**无穷闭区间**. 令

$$]a,\ +\infty[\ =\{x\in\mathbb{R}\mid x>a\},\quad]-\infty,\ b[\ =\{x\in\mathbb{R}\mid x<b\},$$

① 为了避免与后文引入的"有序偶"的记号相混淆, 在这里我们采用布巴基(N. Bourbaki)关于区间的记号法.