線性代數導論

問題詳解

弗里德伯格　英塞爾　原著
韓光遠　陳瑞琳　等譯著

曉園出版社
世界圖書出版公司

前　言

研習理工的同學，都有一種認識，那就是：一本書的習題往往是該書的精華所在，藉着習題的印證，才能對書中的原理原則澈底的吸收與瞭解。

有鑒於此，曉園出版社特地聘請了許多在本科上具有相當研究與成就的人士，精心出版了一系列的題解叢書，為各該科目的研習，作一番介紹與鋪路的工作。

一個問題的解答方法，常因思惟的角度而異。曉園題解叢書，毫無疑問的都是經過一番精微的思考與分析而得。其目的在提供對各該科目研讀時的參考與比較；而對於一般的自修者，則有啓發與提示的作用。希望讀者能藉着這一系列題解叢書的幫助，而在本身的學問進程上有更上層樓的成就。

线性代数导论问题详解
弗里德伯格、英塞尔　原著
韩光远、陈瑞琳　等译著
*
晓园出版社出版
世界图书出版公司北京公司重印
北京朝阳门内大街137号
北京中西印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售
*
1994年11月第　一　版　　开本：711×1245　1/24
1994年11月第一次印刷　　印张：18.75
印数：0001—650　　字数：20万字
ISBN：7-5062-1981-6/O·149
定价：24.30元　（WB9405/10）

目　錄

第一章　R^n之向量空間性質導論及線性方程組

第1-1節　R^2之向量

1. 對於點A，B，C及D，決定$\overrightarrow{AB}$是否等於$\overrightarrow{CD}$。繪出每一向量。

(a) $A=(1,2)$，$B=(3,4)$，$C=(1,5)$及$D=(3,7)$

(b) $A=(1,-1)$，$B=(2,1)$，$C=(4,2)$及$D=(5,1)$

(c) $A=(-3,2)$，$B=(2,1)$，$C=(0,0)$及$D=(5,-1)$

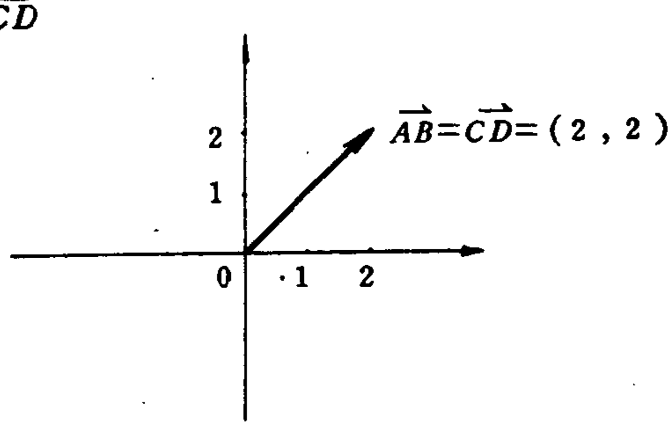
(d) $A=(2,1)$，$B=(1,4)$，$C=(1,-3)$及$D=(0,0)$

(e) $A=(-2,3)$，$B=(2,3)$，$C=(0,1)$及$D=(0,0)$

解：(a) $\overrightarrow{AB}=(2,2)$

$\overrightarrow{CD}=(2,2)$

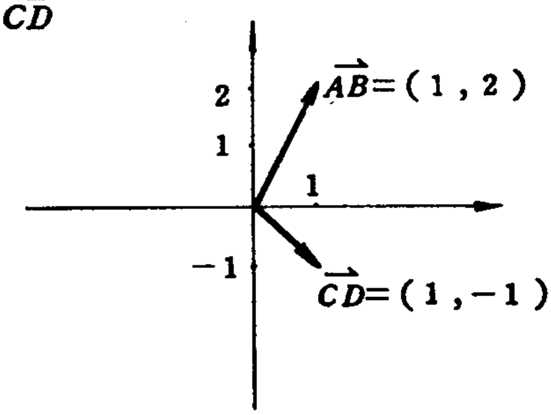
$\therefore \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$



(b) $\overrightarrow{AB}=(1,2)$

$\overrightarrow{CD}=(1,-1)$

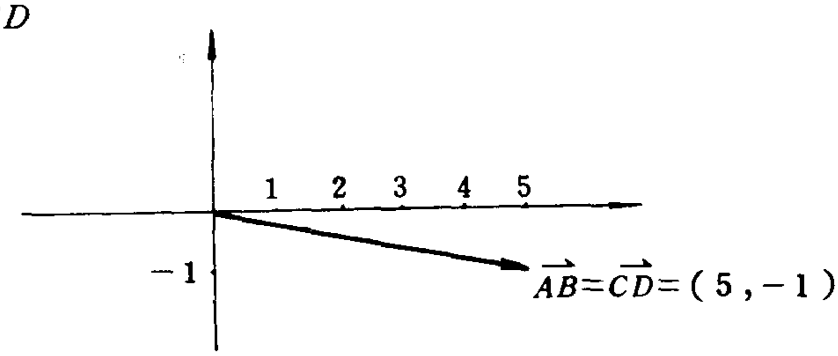
$\therefore \overrightarrow{AB}\neq\overrightarrow{CD}$



(c) $\overrightarrow{AB}=(5,-1)$

$\overrightarrow{CD}=(5,-1)$

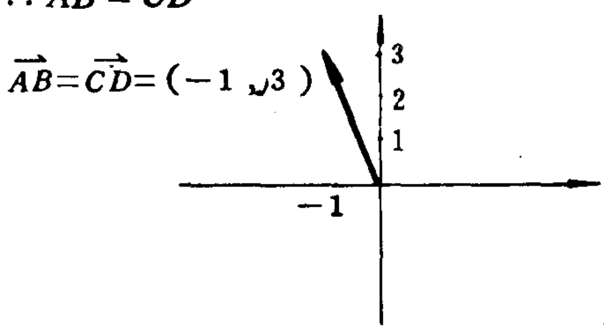
$\therefore \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$



(d) $\overrightarrow{AB}=(-1,3)$

$\overrightarrow{CD}=(-1,3)$

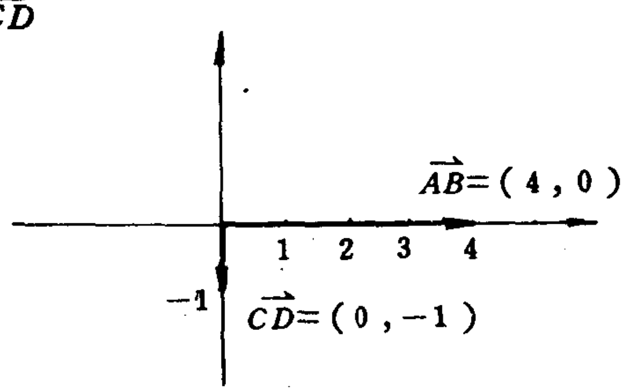
$\therefore \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$



(e) $\overrightarrow{AB}=(4,0)$

$\overrightarrow{CD}=(0,-1)$

$\therefore \overrightarrow{AB}\neq\overrightarrow{CD}$



2. 根據下列對每一向量$\overrightarrow{x}$之敍述來決定$\overrightarrow{x}$之分量。每一種情形皆假設以指向東方爲 x 一軸正向，指向北方爲 y 一軸正方之 xy 一座標系統。

(a)一朝向西北方以每小時 50 哩行駛之汽車的速度。

(b)一將玩具車推向南方之火箭推進器之推力。此力之大小爲 2 磅。

(c)一船與河岸之相對速度。此河流以每小時 4 哩之速度向南方流動。此船相對於水以每小時 3 哩之速度向東移動。

(d)作用於一飛機之兩各別力之合成。第一個力爲引擎之力，大小爲 2000 磅，將飛機推向西方。第二個力爲風力，大小爲 200 磅，將飛機推向北方。

(e)以始點（1，3）及終點（−2，5）連成線段所決定之向量。

解：(a) x −分量 $= -50\cos 45^\circ = -25\sqrt{2}$

y −分量 $= 50\cos 45^\circ = 25\sqrt{2}$

(b) x −分量 $= 0$

y −分量 $= -2$

(c) x −分量 $= 3$

y −分量 $= -4$

(d) x −分量 $= -2000$

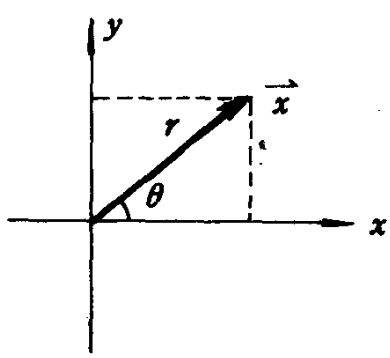
y −分量 $= 200$

(e) x −分量 $= -2-1=-3$

y −分量 $= 5-3=2$

3. 令 $\vec{x}$ 爲一大小爲 r 之平面向量且 $\vec{x}$ 與正 x −軸之夾角爲 t 弳。
證明 $\vec{x} = (r\cos t, r\sin t)$〔提示：在極座標上考慮 $\vec{x} = (x, y)$〕

證：



由上圖知直角坐標（x，y）轉換成極座標之公式爲

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

此時　$\theta = t$，故

$$x = r\cos t$$
$$y = r\sin t$$

則 $\vec{x} = (x, y) = (r\cos t, r\sin t)$ 得證！

4. 一飛行員以每小時 300 哩之速度將飛機朝東北方飛行。一從西方來的風以每小時 50 哩向東方吹。

(a)求描述飛機相對於地面之速度的向量。

(b)飛機相對於地面之速度是多少？

解：(a) $(50 + 150\sqrt{2},\ 150\sqrt{2})$

(b) $\sqrt{(50 + 150\sqrt{2})^2 + (150\sqrt{2})^2} = 337.21$（哩／時）

5. 證明定理 1-1-1 之(a)，(c)，(d)，(e)，(g)及(h)。

證：令 $\vec{x} = (x_1, x_2)$，$\vec{y} = (y_1, y_2)$

(a) $\vec{x} + \vec{y} = (x_1, x_2) + (y_1, y_2)$
$= (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$
$= (y_1, y_2) + (x_1, x_2)$
$= \vec{y} + \vec{x}$

(c) $\vec{x} + \vec{0} = (x_1, x_2) + (0, 0)$
$= (x_1, x_2)$
$= \vec{x}$

(d) $\vec{x} + (-\vec{x}) = (x_1, x_2) + (-x_1, -x_2)$
$= (0, 0) = \vec{0}$

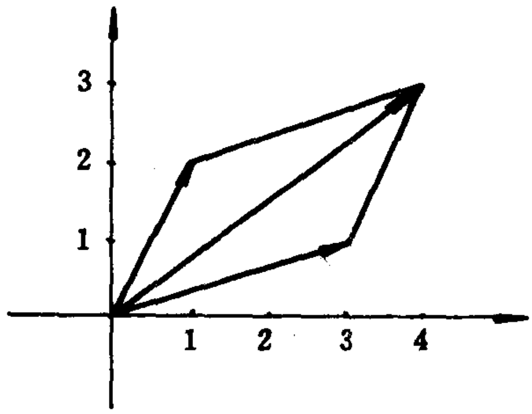
(e) $1\vec{x} = 1(x_1, x_2)$
$= (x_1, x_2) = \vec{x}$

(g) $s(\vec{x} + \vec{y}) = s(x_1 + y_1, x_2 + y_2)$
$= (sx_1 + sy_1, sx_2 + sy_2)$
$= (sx_1, sx_2) + (sy_1, sy_2)$
$= s\vec{x} + s\vec{y}$

(h) $(s + t)\vec{x} = (s + t)(x_1, x_2)$
$= (sx_1 + tx_1, sx_2 + tx_2)$
$= (sx_1, sx_2) + (tx_1, tx_2)$
$= s\vec{x} + t\vec{x}$

6. 假設連接（0，0）至（1，2）及（0，0）至（3，1）之線段為一平行四邊形之鄰邊，求此平行四邊形之第四個頂點。

解：



參照上圖，由平行四邊形之性質知

第四個頂點座標為（1，2）+（3，1）=（4，3）

7. 假設連接（2，3）至（5，7）及（2，3）至（4，4）之線段為一平行四邊形之鄰邊，求此平行四邊形之第四個頂點。

解：同上題，第四個頂點座標為

$$(2,3)+(5-2,7-3)+(4-2,4-3)$$
$$=(2,3)+(3,4)+(2,1)$$
$$=(7,8)$$

8. (a)令$\vec{x}$為R^2之向量且t為一正純量。證明$t\vec{x}$之大小為t與$\vec{x}$之大小的乘積。

(b)若t為一負數，如何修正(a)之結論？

解：(a)令$\vec{x}=(a,b)$，則

$$t\vec{x}=t(a,b)=(ta,tb)$$

其大小為$\sqrt{(ta)^2+(tb)^2}=t\sqrt{a^2+b^2}$

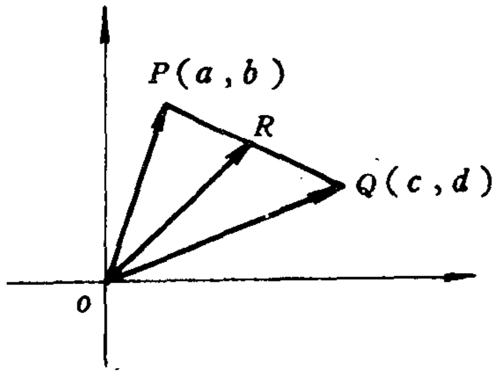
而$\sqrt{a^2+b^2}$即為$\vec{x}$之大小，故得證！

(b)若t為負數，由於$t\vec{x}$之大小必為正數，故

要將(a)之結論修正為：$t\vec{x}$之大小為$-t$與$\vec{x}$之大小的乘積。

9. 假設在xy一平面上給定點（a，b）及（c，d）。證明連結這兩點之線段的中點為（（$a+c$）／2，（$b+d$）／2）。

證：



如圖，R點爲PQ線段之中點，故

$$\overrightarrow{PR}=\frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}(c-a,\ d-b)$$

而 $\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PR}$

$$=(a,b)+\frac{1}{2}((c-a),(d-b)$$

$$=((a+c)/2,(b+d)/2)$$

故 R點之座標爲$((a+c)/2,(b+d)/2)$

10. 證明R^2中之$\overrightarrow{0}$及任意純量t所構成之恒等式，$t\overrightarrow{0}=\overrightarrow{0}$。

證：$t\overrightarrow{0}=t(0,0)=(0,0)=\overrightarrow{0}$

11. 證明R^2中之任意向量$\overrightarrow{x}$都有$0\overrightarrow{x}=\overrightarrow{0}$之關係。

證：令$\overrightarrow{x}=(a,b)$，則

$0\overrightarrow{x}=0(a,b)=(0,0)=\overrightarrow{0}$

12. 令$P=(1,-1)$爲一點且$\overrightarrow{x}=(2,3)$爲R^2中之一向量。求在R^2中使得$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{x}$之$Q$點座標。

解：令Q點座標爲(a,b)

由 $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{x}$ 知

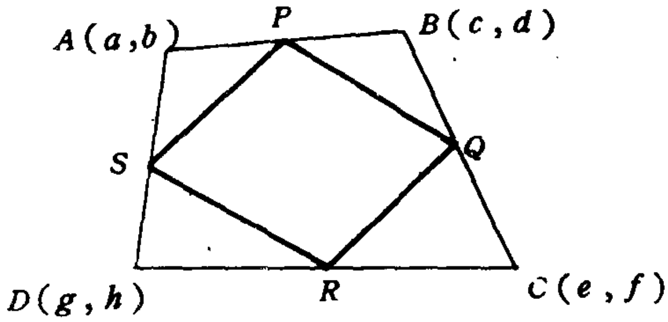
$(a-1,b+1)=(2,3)$

$\therefore a=3$，$b=2$

故Q之座標爲$(3,2)$

13. 證明將一四邊形各鄰邊中點連成之圖形爲平行四邊形。（提示：利用習題 9）

證：



如圖，A，B，C，D爲此四邊形之頂點，而P，Q，R，S爲各邊之中點，由習題9知P，Q，R，S之座標分別爲

$$\left(\frac{a+c}{2},\frac{b+d}{2}\right),\left(\frac{c+e}{2},\frac{d+f}{2}\right),\left(\frac{e+g}{2},\frac{f+h}{2}\right)\text{及}\left(\frac{a+g}{2},\frac{b+h}{2}\right)$$

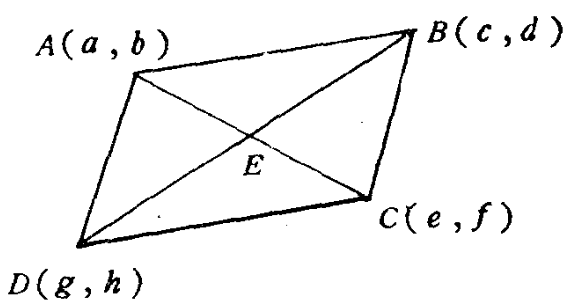
所以 $\overrightarrow{PQ}=\left(\frac{e-a}{2},\frac{f-b}{2}\right)$

$\overrightarrow{SR}=\left(\frac{e-a}{2},\frac{f-b}{2}\right)$

故 $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{SR}$，可知$PQRS$爲一平行四邊形。

14. 證明平行四邊形之對角綫相互二等分。

證：



如圖，$ABCD$爲一平行四邊形，令E爲AC之中點，則E之座標爲

$$\left(\frac{a+e}{2},\frac{b+f}{2}\right)$$

由於$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$　故　$(c-a,d-b)=(e-g,f-h)$

即　$c-a=e-g$

　　$d-b=f-h$

則　$a+e=c+g$

　　$b+f=d+h$

故 E 之座標 $\left(\dfrac{a+e}{2},\dfrac{b+f}{2}\right)=\left(\dfrac{c+g}{2},\dfrac{d+h}{2}\right)$

因此可知 E 亦為 BD 之中點，即得證！

第1-2節　R^2 及 R^3 之向量

1. 決定 $\overrightarrow{AB}$ 是否等於 $\overrightarrow{CD}$。

(a) $A=(1,2,3)$，$B=(0,1,-1)$，$C=(2,3,5)$ 及 $D=(1,2,1)$

(b) $A=(0,0,0)$，$B=(1,-3,-2)$，$C=(-1,3,2)$ 及 $D=(0,0,0)$

(c) $A=(-1,0,1)$，$B=(2,1,3)$，$C=(2,3,5)$ 及 $D=(3,4,7)$

解：(a) $\overrightarrow{AB}=(-1,-1,-4)$

$\overrightarrow{CD}=(-1,-1,-4)$

$\therefore \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$

(b) $\overrightarrow{AB}=(1,-3,-2)$

$\overrightarrow{CD}=(1,-3,-2)$

$\therefore \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$

(c) $\overrightarrow{AB}=(3,1,2)$

$\overrightarrow{CD}=(1,1,2)$

$\therefore \overrightarrow{AB}\neq\overrightarrow{CD}$

2. 給定點 P 及向量 $\overrightarrow{y}$，求點 Q 使得 $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{y}$

(a) $P=(2,3,4)$ 及 $\overrightarrow{y}=(1,2,0)$

(b) $P=(1,-4,3)$ 及 $\overrightarrow{y}=(-4,4,2)$

解：令 $Q=(a,b,c)$，則

(a) $\overrightarrow{PQ}=(a-2,b-3,c-4)=(1,2,0)$

$\therefore a=3,\ b=5,\ c=4$

即 $Q=(3,5,4)$

(b) $\overrightarrow{PQ}=(a-1,b+4,c-3)=(-4,4,2)$

$\therefore a=-3,\ b=0,\ c=5$

即 $Q=(-3,0,5)$

3. 給定點 $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ 及向量 $\overrightarrow{y}=(a,b,c)$，求包含 P_0 且平行於 $\overrightarrow{y}$ 之直線的參數方程式。

(a) $P_0=(2,-1,3)$ 及 $\overrightarrow{y}=(1,3,1)$

(b) $P_0=(-1,0,3)$ 及 $\overrightarrow{y}=(2,-1,1)$

解：此直線之參數方程式爲

$$x=x_0+ta$$
$$y=y_0+tb$$
$$z=z_0+tc$$

(a) $x=2+t$

$y=-1+3t$

$z=3+t$

(b) $x=-1+2t$

$y=-t$

$z=3+t$

4. 給定點 $P=(x_0,y_0,z_0)$ 及 $Q=(x_1,y_1,z_1)$，求包含 P 及 Q 之直線的參數方程式。

(a) $P=(2,3,5)$ 及 $Q=(4,5,1)$

(b) $P=(-1,2,-1)$ 及 $Q=(1,0,3)$

解：此直線之參數方程式爲

$$x-x_0=t(x_1-x_0)$$
$$y-y_0=t(y_1-y_0)$$
$$z-z_0=t(z_1-z_0)$$

及 $x = x_0 + t(x_1 - x_0)$

$y = y_0 + t(y_1 - y_0)$

$z = z_0 + t(z_1 - z_0)$

(a) $x = 2 + 2t$

$y = 3 + 2t$

$z = 5 - 4t$

(b) $x = -1 + 2t$

$y = 2 - 2t$

$z = -1 + 4t$

5. 一物體位於點 $P = (2, 4, 3)$ 以一向量 $\overrightarrow{y} = (-1, 2, 3)$ 之定速度開始沿一直綫移動。求其在兩個單位時間後之位置。

解：$x = 2 - t$

$y = 4 + 2t$

$z = 3 + 3t$

當 $t = 2$ 時

$(x, y, z) = (0, 8, 9)$

6. 在下列各種情形中，選擇一適當的 n 維向量來敍述下列資料：

(a)一雜貨商的貨物有 100 個小雞蛋，150 個中雞蛋，300 個大雞蛋及 100 個特大雞蛋。

(b)一飼狗者有 100 隻達爾馬希亞狗，200 隻㹴狗，及 50 隻獅子狗。

(c)在一次 3 個問題的考試中，有一學生在第一題得到 10 分，第二題得到 15 分，第三題得到 20 分。

解：(a) (100 , 150 , 300 , 100)

(b) (100 , 200 , 50)

(c) (10 , 15 , 20)

7. 假設一雜貨商有一貨物爲 50 個小雞蛋，200 個中雞蛋，100 個大雞蛋而沒有特大雞蛋。他將此貨物與習題 6 (a)之貨物合併。請問如何以向量來表示此合併後貨物之分配情形。

解：(100 , 150 , 300 , 100) + (50 , 200 , 100 , 0)
　　= (150 , 350 , 400 , 100)

8. 一飛機以每小時 300 哩之對地速度朝北偏東 30° 之方向（見圖 1-2-6）飛行。另外，此飛機還以每小時 10 哩之速度爬升。試決定在R^3中表示此飛機速度之向量。

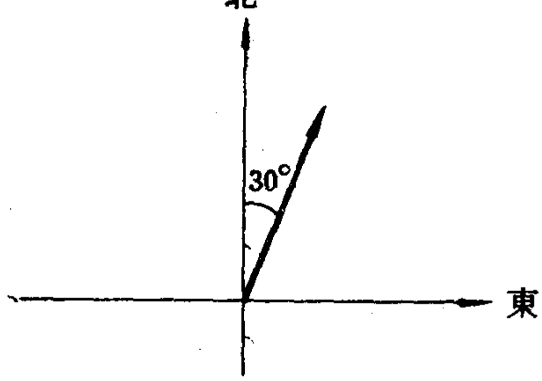


圖 1-2-6

解：(300 sin 30° , 300 cos 30° , 10) = (150 , $150\sqrt{3}$, 10)

9. 假設連接 (1 , −1 , 3) 至 (0 , 1 , 2) 及 (1 , −1 , 3) 至 (2 , 2 , 5) 之線段爲一平行四邊形之鄰邊。求此平行四邊形之第四個頂點。

解：第四個頂點坐標爲
(1 , −1 , 3) + (0 − 1 , 1 + 1 , 2 − 3) + (2 − 1 , 2 + 1 , 5 − 3)
= (1 , −1 , 3) + (−1 , 2 , −1) + (1 , 3 , 2)
= (1 , 4 , 4)

10. 證明對R^n中之$\vec{0}$及任意純量t，有$t\vec{0} = \vec{0}$之關係。

證：$t\vec{0} = t\,(\overbrace{0 , 0 , \cdots\cdots , 0}^{n\text{個}})$
$= (\overbrace{0 , 0 , \cdots\cdots , 0}^{n\text{個}}) = \vec{0}$

11. 證明R^n中之任意向量$\vec{x}$有$0\vec{x} = \vec{0}$之關係。

證：令 $\vec{x}=(x_1\ ,x_2\ ,\cdots\cdots,x_n)$

則 $0\vec{x}=0(x_1\ ,x_2\ ,\cdots\cdots,x_n)$

$$=(\overbrace{0\ ,0\ ,\cdots\cdots,\ 0}^{n\text{個}})=\vec{0}$$

12. 證明定理 1-2-1 之(a)，(b)，(c)，(e)，(g)及(h)。

證：(a) $\vec{x}+\vec{y}=(x_1\ ,x_2\ ,\cdots,x_n)+(y_1\ ,y_2\ ,\cdots,y_n)$

$=(x_1+y_1\ ,x_2+y_2\ ,\cdots,x_n+y_n)$

$=(y_1\ ,y_2\ ,\cdots,y_n)+(x_1\ ,x_2\ ,\cdots,x_n)$

$=\vec{y}+\vec{x}$

(b) $(\vec{x}+\vec{y})+\vec{z}$

$=(x_1+y_1\ ,x_2+y_2\ ,\cdots,x_n+y_n)+(z_1\ ,z_2\ ,\cdots,z_n)$

$=(x_1+y_1+z_1\ ,x_2+y_2+z_2\ ,\cdots,x_n+y_n+z_n)$

$=(x_1\ ,x_2\ ,\cdots,x_n)+(y_1+z_1\ ,y_2+z_2\ ,\cdots,y_n+z_n)$

$=\vec{x}+(\vec{y}+\vec{z})$

13. 求擲一對骰子事件結果之機率向量。

解：擲一對骰子共可能出現 21 種情形如下：

(1,1)，(1,2)，(1,3)，(2,2)，(1,4)，(2,3)，
(1,5)，(2,4)，(3,3)，(1,6)，(2,5)，(3,4)，
(2,6)，(3,5)，(4,4)，(3,6)，(4,5)，(4,6)，
(5,5)，(5,6)，(6,6)

$$\text{出現}(i\ ,j)\text{之機率爲}\begin{cases}\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{36}\text{若 } i=j\\[2ex] 2\times\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{18}\text{若 } i\neq j\end{cases}$$

由此依序得機率向量

$$\vec{P}=\left(\frac{1}{36},\frac{1}{18},\frac{1}{18},\frac{1}{36},\frac{1}{18},\frac{1}{18},\frac{1}{18},\frac{1}{18},\frac{1}{36},\frac{1}{18},\frac{1}{18},\frac{1}{18},\right.$$

$$\left.\frac{1}{18},\frac{1}{18},\frac{1}{36},\frac{1}{18},\frac{1}{18},\frac{1}{18},\frac{1}{36},\frac{1}{18},\frac{1}{36}\right)$$

第1-3節　子空間與線性組合

1. 對下列每一個集合，試驗證其向量加法與純量乘法之封閉性。

(a) $\{(x, y): xy=0\}$

(b) $\{(x, y, z): x+y=z\}$

(c) $\{(x, y, z): x>y$且$z<0\}$

(d) $\{(x, y, z): xy=z^2\}$

(e) $\{(x, y, z): (xy)^2\geq 0\}$

(f) $\{(x, y): x+y>0\}$

解：(a)向量加法：否　　純量乘法：是

(b)向量加法：是　　純量乘法：是

(c)向量加法：是　　純量乘法：否

(d)向量加法：否　　純量乘法：是

(e)向量加法：是　　純量乘法：是

(f)向量加法：是　　純量乘法：否

2. 決定下列那個R^n之子集合為子空間。證實你的結論。

(a) $\{(x, y): x^2+y^2=1\}$

(b) $\{(x, y, z): 2x-y+z=0\}$

(c) $\{(x, y, z): x=yz\}$

(d) $\{(p, q): p$及q為整數$\}$

(e)所有非負數之集合

(f) $\{(x, y, z): x-2y=3z\}$

(g) $\{(x, y, z, w): x+y+z+w=1\}$

(h) $\{(x, y, z): x\geq y\geq z\}$

解：(a)否。不滿足兩種封閉性

(b)是。

(c)否。不滿足兩種封閉性

(d)否。不滿足純量乘法封閉性

(e)否。不滿足純量乘法封閉性

(f)是。

(g)否。不滿足兩種封閉性