中学生必读书库

趣味数学知识

张正青　编著

知　识　出　版　社

目　录

一、跨进代数的大门

在进入初中后，学的数学课程里，一门是《代数》，一门是《几何》。有同学问，什么是代数，代数与小学学的算术有什么不同？

我国清代数学家李善兰在公元 1859 年把棣莫甘著的一本数学书《Algebra》翻译成中文，把 Algebra 译成“代数”，“代数”有用字母表示数的意思。

小学里学的数学主要讲的一些具体的数的问题，而在中学里的代数不仅要学一些具体数的问题，还要学数的性质、运算法则、定律、公式的普遍意义，若只用具体的数就不能说明普遍的规律。这就需要用字母和其它数学符号。

你记得这样一首儿歌吗：“一只青蛙一张嘴，两个眼睛四条腿，卜通一声跳下水。”

两只青蛙跳水又该怎么唱呢？

“两只青蛙两张嘴，四只眼睛八条腿，卜通、卜通跳下水。”

如果是三只青蛙、四只青蛙、五只青蛙……跳下水呢？也像上面那样唱，就会觉得啰嗦，能不能用什么作代表、无论多少只青蛙跳水，都唱得出来呢？回答是“有的”。用字母 n 表示青蛙的只数，其唱法是：“n 只青蛙 n 张嘴，$2n$ 只眼睛 $4n$ 条腿，n 声卜通跳下水。”唱起来确实方便。

从这个例子说明了用字母表示数的优越性，它的作用是很大的，会用字母表示数并会用字母和代数式来研究问题，这就是你跨进了代数的大门的标志。

如果有人问你：$1-a$，a 和 $1+a$ 哪个大？你能回答吗？这个问题对于跨进代数大门的人来说是不难的。经过下面的入门训练，你就会解答了。

1. 确定代数式中字母表示的数

例 1 说出符合条件的字母表示的什么数：

(1) $|a|=a$　　(2) $|a|=-a$

(3) $|a|\geqslant a$　　(4) $a^2>a$

(5) $a>\dfrac{1}{a}$　　(6) $a<\dfrac{1}{a}$

分析：(1)(2)用绝对值法则；

(3)～(6)用解不等式方法。

解：由绝对值法则可知：

(1) $a\geqslant 0$；(2) $a\leqslant 0$；(3) a 为全体实数；

(4) 由 $a^2>a$，$a^2-a>0$，$\therefore$ $a<0$ 或 $a>1$；

(5) 当 $a>0$ 时，只有 $a>1$，$a>\dfrac{1}{a}$才成立；当 $a<0$ 时，只有 $-1<a<0$，不等式 $a>\dfrac{1}{a}$才成立。故 $a>1$ 或 $-1<a<0$；

(6) 当 $a<0$，只有 $a<-1$ 时，$a<\dfrac{1}{a}$成立；当 $a>0$ 时，只有 $0<a<1$ 时，$a<\dfrac{1}{a}$成立。故 $a<-1$ 或 $0<a<1$.

例 2 a，b 都是整数，根据条件求 a，b 的值。

(1) $ab=1$　　(2) $ab=0$

(3) $ab=6$　　(4) $ab=-15$ 且 $a+b=-2$

解：(1) 因 a、b 同号，所以 $a=b=1$，或 $a=b=-1$；

(2)因 a、b 中至少有一个必为零，所以 $a=0$ 或 $b=0$；

(3)$a=2$，$b=3$；或 $a=3$，$b=2$；或 $a=-2$，$b=-3$；或 $a=-3$、$b=-2$.

(4) 解方程组$\begin{cases}ab=-15\\a+b=-2\end{cases}$ 得 $\begin{cases}a=-5\\b=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=3\\b=-5\end{cases}$

例3 $1-a$，a 和 $1+a$ 哪个大？

分析：对 a 分正、零、负三种情形研究。

解：当 $a>0$ 时，必有 $1+a>a$，$1+a>1-a$，而 a 与$1-a$ 的大小有两种情形：

(i) 如果 $1-a>a$，有 $2a<1$，所以 $a<\frac{1}{2}$，即 $0<a<\frac{1}{2}$ 时有 $1+a>1-a>a$；

(ii) 如果 $1-a\leqslant a$，即 $a\geqslant\frac{1}{2}$，所以 $a\geqslant\frac{1}{2}$时，有：$1+a>a\geqslant 1-a$；

当 $a=0$ 时，有 $1-a=1+a>a$；

当 $a<0$ 时，有 $a<1+a<1-a$.

2. 用代数式表示数量关系

例4 用代数式表示：

(1) a 的倒数的相反数与 b 的$\frac{1}{2}$的商；

(2) m，n 两数差的平方的相反数的绝对值；

(3) a，b 两数和的平方与这两数差的积；

(4) 铅笔每支 15 分，笔记本每本价 45 分，买 a 支铅笔和 b 支笔记本，共付钱多少元？

用代数式表示数量关系，一要懂得和、差、积、商、幂分别是加、减、乘、除、乘方运算的结果，二要明白比一个

数多多少(或少多少)用加法(或减法)来表示，三要知道代数式中的运算顺序与数学语言中的运算顺序保持一致，做到这三点，写出来的代数式才正确。

解：(1) $-\frac{1}{a}\div\frac{b}{2}$

(2) $|-(m-n)^2|$

(3) $(a+b)^2(a-b)$

(4) $(0.15a+0.45b)$元.

例5 设某数为 x,用代数式表示：

(1)某数的$\frac{1}{2}$与-3的差的平方；

(2)比某数的 3 倍少 a 的数；

(3)比某数的 a 倍多 b 的数；

(4)某数与 2 的积除 3 的商.

解：(1) $\left[\frac{1}{2}x-(-3)\right]^2$

(2) $3x-a$

(3) $ax+b$

(4) $3\div 2x$

例6 用字母 a、b、c 表示交换律,结合律,分配律。

解:加法交换律 $a+b=b+a$

乘法交换律 $a\cdot b=b\cdot a$

加法结合律 $(a+b)+c=a+(b+c)$

乘法结合律 $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$

加法对乘法的分配律 $(a+b)m=am+bm$

加法对除法的分配律 $(a+b)\div m=a\div m+b\div m$,

$(m\neq 0)$

3. 解关于含有字母系数的方程

对于含有字母系数的方程，若字母系数已注明取值范围，其解法与数字系数方程的解法相同；若字母系数取值范围未注明时，一般都需要从有一解、无解、无数个解三种情况讨论求解。比如解一元一次方程 $ax=b$，分三种情况：(i)当 $a\neq 0$ 时，原方程有一解 $x=\frac{b}{a}$；(ii)当 $a=0$ 且 $b\neq 0$ 时，方程为 $0\cdot x=b$，原方程无解；(iii)当 $a=0$，且 $b=0$ 时，方程为 $0\cdot x=0$，原方程有无数个解。

又如一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$，

(i)当 $\Delta=b^2-4ac>0$ 时，方程有两不相等的实根；

(ii)当 $\Delta=b^2-4ac=0$ 时，方程有两相等实根；

(iii)当 $\Delta=b^2-4ac<0$ 时，方程没有实数根。

掌握这些知识和方法，更能使我们加深对字母表示数的意义的理解。

例 7 解关于 x 的方程：

$$m^2x+1=mx+m$$

解：整理得 $(m^2-m)x=m-1$

即 $m(m-1)x=m-1$

当 $m\neq 0$ 且 $m\neq 1$ 时，方程的解是 $x=\frac{1}{m}$；

当 $m=0$ 时，方程 $0\cdot x=-1$，所以原方程无解；

当 $m=1$ 时，方程 $0\cdot x=0$，所以原方程有无数个解。

例 8 判断方程 $2x^2-3x+(m-1)=0$ 的根的情况。

解 ∵ $\Delta=9-8(m-1)=17-8m$

当 $m<\frac{17}{8}$ 时，$\Delta>0$，方程有不相等的二实根；

当 $m=\frac{17}{8}$时，$\Delta=0$，方程有相等二实根；

当 $m>\frac{17}{8}$时，$\Delta<0$，方程没有实数根。

4. 用字母表示数，便于研究数的性质

例 9 求证任何三个连续自然数的和能被 3 整除。

证明：设 $n-1, n, n+1$ 为三个连续自然数，

$(n-1)+n+(n+1)=3n$，因和 $3n$ 是 3 的倍数，所以能被 3 整除。

例 10 求证一个两位数与把它的数字位置对调所成的数的差能被 9 整除。

证明：设原两位数的个位上数字是 x，十位上数字是 y，那么原两位数是 $10y+x$，两个数字位置对调后的两位数是 $10x+y$。

$$
\begin{aligned}
&10y+x-(10x+y)\\
&=10y+x-10x-y\\
&=9y-9x\\
&=9(y-x)
\end{aligned}
$$

因差是 9 的倍数，所以其差能被 9 整除。

练 习 一

1. 如果 a 是正数，b 是负数，用不等式表示下列各式的正负。

(1) $|a+b|$ ______　　(2) ab ______

(3) $\frac{a}{b}$ ______　　(4) $a+b^2$ ______

(5) $(a+b)^2$ ______　　(6) $a-b$ ______

2. 下列算式中，哪些结果是互为相反数？哪些是互为倒数？

(1) $a-b$ 与 $b-a$　　(2) $(-2)^2$ 与 -2^2

(3) $1\div a$ 与 $a\div 1$　　(4) $|2-3|$ 与 $|2|-|3|$

3. 填空：字母表示的是什么数。

(1) $a>-a$，则 a 为______；

(2) $|x|\geqslant x$，则 x 为______；

(3) $-y<0$，则 y 为______；

(4) $\frac{1}{x-2}$ 中 x 为____________；

(5) $\frac{2}{|x|-2}$ 中 x 为____________；

(6) $|x|<5.5$ 且 x 是奇数，则 x 是______.

4. 已知 $m<n<0$，填上适当的不等号。

(1) $m-2$ ____ $n-2$　　(2) $m-5$ ____ $n-4$

(3) m^3n^2 ____ 0　　(4) 0 ____ $(m-n)$

(5) $7m$ ____ $5n$　　(6) $|m|$ ____ $|n|$

5. 比较大小。

(1) a 与 a^2　　(2) a 与 $\frac{1}{a}$

6. 去掉绝对值符号。

(1) $|x+1|(x\geqslant -1)$　　(2) $|a-1|$

7. 各式中 a,b 表示什么数？

(1) $3a>a$　　(2) $\frac{a}{3}>a$

(3) $|a|>|b|$　　(4) $a^2>a-1$

8. a、b 是什么数时，代数式 $15-(a+b)^2$ 取得最大值？最大值是多少？

9. 用代数式表示：

(1) x 与 y 的差的$\frac{1}{3}$的立方；

(2) 两个数的和是 24，一个数是 x，另一个数是多少？

(3) 矩形的周长是 40 厘米，其矩形的长为 a，这个矩形的面积是多少？

(4) x 与 y 的平方和加上 x 与 y 的积的 2 倍.

10. 解关于 x 的方程$(a-1)(a-4)x=a-2(x+1)$.

11. m 为何时？方程$(m^2-8m+15)x=m^2-2m-3$ 的解是负数.

12. 求证任何两个连续整数的和都不能被 2 整除.

13. 求证一个两位数与把它的数字位置对调所成的数的和能被 11 整除.

二、高斯算题的启示

高斯是一个著名的数学家，德国人，生于1777年，卒于1855年。传说高斯读小学时，有一次老师出了一道题：

计算　$1+2+3+\cdots+99+100$

当时其他同学都埋头依次相加，年仅九岁的高斯却很快算出了结果，并把答数5050告诉给老师，老师问他是怎样这么快就算出来的，高斯在小石板上写出了他的解答：

$$\begin{aligned}&1+2+3+\cdots+99+100\\=&(1+100)+(2+99)+\cdots+(50+51)\\=&50\times101\\=&5050\end{aligned}$$

老师和同学们见了这种简捷算法，都十分称赞。

这个故事你可能早就听说过，你从这个故事中得到什么启示呢？高斯为什么能算得这么快呢？从上面的解答过程中发现，高斯能根据算式的特点，运用交换律和结合律很快得到50×101，然后变加为乘，算出结果。这就是一个重要启示：在数的运算中巧妙的改变运算种类和运算顺序可使运算简便，这正是我们在有理数运算中所学习的。

1. 改变运算种类

例1　计算$(-3.78)+(-4.05)-(-6.17)-(+5.43)-(-2.14)$

说明：含有正、负数的加减法，一般是统一成加法运算。

解：$(-3.78)+(-4.05)-(-6.17)-(+5.43)$

$-(-2.14)$

$=(-3.78)+(-4.05)+(+6.17)+(-5.43)$

$+(+2.14)$

$=[(-3.78)+(-4.05)+(-5.43)]$

$+[(+6.17)+(+2.14)]$

$=(-13.26)+(+8.31)$

$=-4.95$

例2 计算$\left(-1\frac{2}{7}\right)\times\frac{5}{7}\div\left(-\frac{3}{4}\right)\times(-2.5)$

$\div(-0.25)\times\frac{2}{5}\times2\frac{1}{3}\times\left(-\frac{5}{7}\right)$

分析：(1) 含乘除混合运算，通常是把除转化为乘计算；(2) 此算式中同时含有分数和小数，而式中小数易化成分数，所以应化成分数计算。

解：$\left(-1\frac{2}{7}\right)\times\frac{5}{7}\div\left(-\frac{3}{4}\right)\times(-2.5)\div(-0.25)$

$\times\frac{2}{5}\times2\frac{1}{3}\times\left(-\frac{5}{7}\right)$

$=\left(-\frac{9}{7}\right)\times\frac{5}{7}\times\left(-\frac{4}{3}\right)\times\left(-\frac{5}{2}\right)\times(-4)$

$\times\frac{2}{5}\times\frac{7}{3}\times\left(-\frac{5}{7}\right)$

$=-\frac{400}{49}$

例3 计算 $478\times332\div17\div239\times51$

分析：整数的乘除转成乘法时写成分数形式便于约分。

解： $478\times332\div17\div239\times51$

$$=\frac{478\times332\times51}{17\times239}$$

$$=1992$$

例4 计算 (1) 201992×125； (2) 93184×25.

分析：因 $125=1000\div8$，$25=100\div4$；将上面式子变成下列形式就容易算了。

解：(1) 201992×125

$$=\frac{201992\times1000}{8}$$

$$=25249\times1000$$

$$=25249000$$

(2) 93184×25

$$=\frac{93184\times100}{4}$$

$$=23296\times100$$

$$=2329600$$

例5 计算 $1992\times19911991-1991\times19921992$

分析：因 $19911991=1991\times10001$，$19921992=1992\times10001$，先改变原式形式。

解：$1992\times19911991-1991\times19921992$

$$=1992\times1991\times10001-1991\times1992\times10001$$

$$=0$$

2. 改变运算顺序

例6 计算 $12\frac{1}{2}+3\frac{1}{8}+\frac{1}{7}+4\frac{1}{3}+\frac{5}{8}+2\frac{1}{6}+\frac{7}{8}+2\frac{3}{8}$

说明：含有多个数的加法，通常运用交换律和结合律把容易计算的数分别结合在一起计算(比如同号的数，能凑成整数的数，互为相反数，易通分的数)，比较简便。

解：$12\frac{1}{2}+3\frac{1}{8}+\frac{1}{7}+4\frac{1}{3}+\frac{5}{8}+2\frac{1}{6}+\frac{7}{8}+2\frac{3}{8}$

$=\left(12\frac{1}{2}+4\frac{1}{3}+2\frac{1}{6}\right)+\left(3\frac{1}{8}+\frac{7}{8}\right)+\left(\frac{5}{8}+2\frac{3}{8}\right)$

$+\frac{1}{7}$

$=19+4+3+\frac{1}{7}$

$=26\frac{1}{7}$

例7 计算 $125\times2\times131\times15\times8$

解：$125\times2\times131\times15\times8$

$=(125\times8)\times(15\times2)\times131$

$=1000\times30\times131$

$=3930000$

有些问题用分配律.

例8 计算：

(1) $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)\times(-12)$

(2) $1\frac{1}{2}\times\frac{5}{7}-\left(-\frac{5}{7}\right)\times2\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{5}{7}$

解：(1) $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)\times(-12)$

$=-6+4-3+2$

$=-3$

(2) $1\frac{1}{2}\times\frac{5}{7}-\left(-\frac{5}{7}\right)\times2\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{5}{7}$

$=1\frac{1}{2}\times\frac{5}{7}+\frac{5}{7}\times2\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{5}{7}$

$=\left(1\frac{1}{2}+2\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)\times\frac{5}{7}$

$$=\frac{7}{2}\times\frac{5}{7}$$

$$=2\frac{1}{2}$$

还有些问题,既要改变运算种类又要改变运算顺序,算起来才快。

例9 计算$-24\times 9\frac{11}{12}-18\frac{6}{13}\div\left(-\frac{6}{13}\right)$

解: $-24\times 9\frac{11}{12}-18\frac{6}{13}\div\left(-\frac{6}{13}\right)$

$$=-24\times\left(10-\frac{1}{12}\right)-\left(18+\frac{6}{13}\right)\times\left(-\frac{13}{6}\right)$$

$$=-240+2-(-39-1)$$

$$=-240+2+40$$

$$=-198$$

例10 求值:$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{29\times 30}$

分析:因$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$,可把上式中每个数变成两个分数之差。

解: $\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{29\times 30}$

$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{28}-\frac{1}{29}+\frac{1}{29}-\frac{1}{30}$$

$$=1-\frac{1}{30}$$

$$=\frac{29}{30}$$

练 习 二

用合理的方法计算下列各题:

1. $2+4+5+6+7+6+7+6+6$

2. 求下列六个差数的和：$(42-29)$、$(3-42)$、$(50-3)$、$(17-50)$、$(1000-17)$、$(29-100)$.

3. 328965×9

4. 96×75

5. 已知 $237\times 37=10101$，求 237×111.

6. $\underbrace{99\cdots 9}_{n\text{个}}\times\underbrace{99\cdots 9}_{n\text{个}}+1\,\underbrace{99\cdots 9}_{n\text{个}}$

7. $3.37-(-3)-\left(-5\dfrac{1}{2}\right)+(-2)-\left(+5\dfrac{1}{2}\right)-(+4.37)$

8. $1\dfrac{1}{3}\times 3.14\times\left(-\dfrac{3}{4}\right)$

9. $-40\times\left(0.15-\dfrac{7}{8}+3\dfrac{1}{2}\right)$

10. $\left[50-\left(\dfrac{3}{8}+\dfrac{5}{6}-\dfrac{1}{4}\right)\times 24\right]\div 25$

11. $(+379)+[(-58.7)+(-379)+(-85.3)]$

12. $\dfrac{3}{4}\times(-7)-(-15)\times\left(-\dfrac{3}{4}\right)-\dfrac{3}{4}\times 2$

三、撩开绝对值、算术根的面纱

实数 a 的绝对值 $|a|$ 及算术根 $\sqrt{a^2}$，看起来很单纯，谁不知道 $|+5|=5$，$|-5|=5$，$\sqrt{2^2}=2$，$\sqrt{(-2)^2}=2$，因此有一部分同学认为对 $|a|$、$\sqrt{a^2}$ 是很容易了解的，其实不然，请看 $|a|$、$\sqrt{a^2}$ 的身姿的外面有符号“$|\ |$”、“$\sqrt{\quad}$”，这一层符号就像一位公主披了一件薄如蝉翼的面纱，正是这件面纱，使一些人看不清里面 a 的真面目，常使一些同学误入歧途。例如：

化简 $\sqrt{4-4a+a^2}$. 有同学是这样解的：

$\sqrt{4-4a+a^2}=\sqrt{(2-a^2)}=|2-a|=2-a$

这样做对不对？他不知道，这就是被神秘的面纱迷惑的结果，为了认清庐山真面目，必须撩开它们的面纱。

其撩开面纱的方法分别叙述如下。

1. 绝对值

在小学学的是算术数（正整数、零和正分数），由于存在具有相反意义的量，引进了负数，这样把算术数扩充到了有理数，又由于实际生活中遇到了如像 $\pi=3.14159265\cdots$，$\sqrt{2}=1.41421356\cdots$ 这样的无理数（无限不循环小数），又一次把有理数扩充到了实数（有理数和无理数统称为实数）。初中所学的实数系统是：