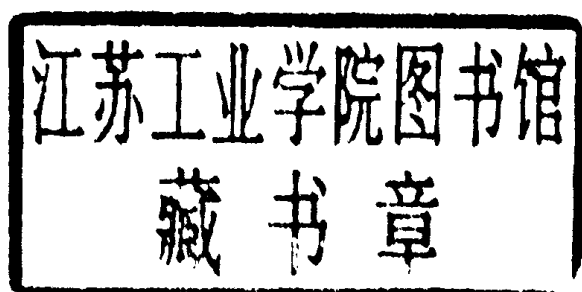


钢压杆稳定极限承载力分析

任伟新 曾庆元 著



中 国 铁 道 出 版 社

1994年·北京

钢压杆稳定极限承载力分析

任伟新 曾庆元 著

中 国 铁 道 出 版 社

1 9 9 4 年 • 北 京

(京)新登字 063 号

内 容 简 介

本书是一本阐述钢压杆弹塑性稳定极限承载力分析方面的专著,大部分内容是作者研究的成果。全书共分六章,内容包括压杆稳定性概念和含义,钢压杆稳定极限承载力分析的主要方法,钢压杆局部与整体相关屈曲极限承载力的半解析工程分析方法——有限条塑性系数增量初应力法和工字形截面钢压杆局部与整体相关屈曲极限承载力分析结果、计算焊接 H 型截面钢压杆极限承载力的空间曲面方程和极限承载力表格,以及 H 型截面钢压杆局部与整体相关屈曲极限承载力试验结果。

钢压杆稳定极限承载力分析

任伟新 曾庆元 著

*

中国铁道出版社出版发行

(北京市东单三条 14 号)

责任编辑 刘启山 封面设计 翟 达

各地新华书店经售

中国铁道出版社印刷厂印

开本:850×1168 毫米 1/32 印张:4.875 字数:123 千

1994 年 10 月 第 1 版 第 1 次印刷

印数:1—1000 册

ISBN7-113-01836-X/TU·397 定价:10.80 元

序

随着现代钢结构不断向轻型薄壁方向发展和高强度材料的应用,钢压杆的稳定极限承载力分析愈来愈显得重要。而且,钢压杆的稳定设计也逐渐由容许应力法发展到以可靠度理论为基础的极限承载力设计方法。因此,钢压杆的稳定极限承载力分析更有着重要的实际意义。

现行钢压杆的设计还是将压杆整体稳定与板件的局部稳定分开来考虑,通过限制板件的宽厚比,分别验算整体稳定与局部稳定,即不考虑板件局部屈曲与压杆整体屈曲的相关作用,这与实际情况有差异。因此按局部与整体相关屈曲分析实腹钢压杆稳定极限承载力是更为合理的分析方法。

任伟新、曾庆元两位学者所写的这本《钢压杆稳定极限承载力分析》专著,主要是他们自己研究成果的总结。他们对压杆稳定性的概念和极限承载力的含义进行了较为详细的阐述,较比一般的书籍有特色。在钢压杆局部与整体相关屈曲极限承载力工程分析方法上首次提出有限条塑性系数增量初应力法,特别是塑性系数法进行材料非线性分析,在概念上有所创新。所得到的工字型截面钢压杆局部与整体相关屈曲极限承载力数值分析结果,对于很好地理解相关屈曲有重要意义。为便于工程实际应用,他们首创的计算H型截面焊接钢压杆极限承载力的三维空间曲面方程和相应的极限承载力计算表格,更是将理论和实际应用结合起来,可供进一步修订《桥规》时参考。最后作者所进行的部分H型截面焊接钢压杆局部与整体相关屈曲试验,使得本书更具有说服力。

总之,这是一本既有学术水平又有工程实际应用意义的好书,可望对钢压杆极限承载力的分析方法和设计方法起到有益的作用。

方秦汉

1994年3月于武汉

前 言

压杆的稳定问题可以说是一个古老的问题,柱就是最古老的结构构件之一。提到柱这个概念,一般都会联想到古希腊人和古罗马人的公共建筑的廊柱。他们在布置这种神殿中的柱时,当时并不懂得柱的性能,于是他们采用了仿人的办法,即测量出人的足印,并把量出的这个尺寸折算成人高,将这个比例用到柱子,使得这些柱子便有了男人体型般的比例,结实和美观以及年轻温柔,肢体优美的少女般的印象。

从 Euler 在理论上发表细长理想弹性压杆临界力的研究到现在已有 200 多年了,在 Euler 随后的近百年间,压杆稳定的研究在理论上并无多大进展,但人们普遍注意到了这样的事实:当杆中的应力超过材料的比例极限后和对于具有初始缺陷的实际压杆,Euler 公式与试验结果相差甚大。于是从上世纪末开始便逐渐有了关于中心压杆非弹性屈曲的双模量理论、切线模量理论以及 Karman、Chwalla、Jezek 等人关于偏心压杆的极限承载力分析结果。及至电子计算机的出现,使得钢压杆的稳定极限承载力研究成为结构理论中一个十分活跃的分枝,用数值积分法、有限单元法等数值方法研究压杆的稳定极限承载力越来越引起人们的重视,提出了许多有效的数值分析方法。

作者在回顾有关问题的许多论文和著作时发现,钢压杆稳定极限承载力的研究工作还未足够完善。

1. 关于压杆稳定性的概念和含义,许多书籍阐述的不够详细,一般读者不易理解。

2. 将压杆整体屈曲与板件的局部屈曲分开考虑,在假定不发生局部屈曲的前提下,分析压杆的稳定极限承载力,即忽略局部屈曲与整体屈曲的相关作用,与实际情况有一定的差异。

3. 许多数值方法过于繁复,也没有制定出表达结果的表格,以致很难在实际设计中加以利用。

因此,本书的主要目的在于介绍一种既能考虑钢压杆局部与整体相关屈曲作用,又便于考虑钢材弹塑性工作,分析实际钢压杆稳定极限承载力的半解析工程分析方法,以及根据大量钢桥压杆极限承载力的计算机模拟结果,建立钢压杆极限承载力的三维空间曲面方程和极限承载力表格,以便于钢压杆极限承载力的计算和工程设计。

全书共分六章。第一章是关于压杆稳定性的基本概念,介绍了平衡状态的稳定性,分枝点失稳与极值点失稳,压杆的大挠度,稳定性的判别准则以及稳定问题的研究特点,试图使读者对压杆稳定问题有一个较完整、全面的认识。第二章介绍了钢压杆稳定极限承载力分析现有的主要办法,包括经典的 Karman 方法,Jezeek 的近似方法,数值积分法,配面增量初应力法和有限单元法,尽量反映压杆极限承载力研究的新进展,使读者对分析方法有一个了解。第三章是作者提出的分析钢压杆局部与整体相关屈曲极限承载力的半解析工程分析方法——有限条塑性系数增量初应力法。第四章在回顾钢压杆局部与整体相关屈曲研究现状的基础上,用作者提出的方法,分析了工字形截面钢压杆局部与整体相关屈曲的极限承载力,包括压杆长细比、板件宽厚比的影响,得到了压杆中截面的屈曲模式,以期对压杆的实际工作作深一步的了解。第五章在大量计算机模拟结果的基础上,拟合出了焊接 H 型截面钢压杆极限承载力的空间曲面方程,制订了极限承载力表格,并提出了相应的压杆极限承载力的验算条件,可直接应用到实际设计中去。第六章是一些试验结果,是作者所进行的 H 型截面钢压杆极限承载力试验,以验证本书提出的计算方法和极限承载力空间曲面方程的正确性。

我们期望本书能对按极限承载力状态修订钢桥压杆的规范有所益处,对钢压杆的分析和设计起码是多了个选择。本书同时可供研究生、结构研究人员、设计人员和有兴趣的高年级工科大学生参

目 录

第一章 钢压杆的稳定性.....	1
第一节 平衡状态的稳定性.....	1
第二节 结构在静力作用下的两类失稳问题—— 分枝点失稳与极值点失稳.....	3
第三节 细长压杆弹性屈曲的大挠度理论.....	8
第四节 失稳的判别准则	12
第五节 结构稳定性分析的特点	15
第二章 钢压杆的稳定极限承载力计算	18
第一节 引 言	18
第二节 偏心钢压杆面内稳定极限承载力分析的 基本方程	20
第三节 卡门(Karman)关于矩形截面偏心压杆的 分析结果	21
第四节 耶拾克(Jezek)的近似分析方法	24
第五节 数值积分法	29
第六节 压弯杆件面内失稳问题的配面增量 初应力解法	32
第七节 双向压弯杆件稳定极限承载力分析的有 限单元法	39
第八节 本章小结	45
第三章 有限条塑性系数增量初应力法	48
第一节 引 言	48
第二节 计算公式	49
第三节 塑性系数增量初应力法求解过程与程序 框图	57
第四节 数值结果	63
第五节 本章小结	65
第四章 实腹钢压杆局部与整体相关屈曲的极限承载力分析...	68

第一节	引 言	68
第二节	薄壁结构局部—整体相关屈曲研究现状	70
第三节	偏心钢压杆局部与整体相关屈曲极限承载力分析	76
第四节	本章小结	84
第五章 H 型钢桥压杆极限承载力空间曲面方程及其在设计中的应用		88
第一节	引 言	88
第二节	计算中考虑的因素及参数的选取	89
第三节	H 型截面钢桥压杆局部与整体相关屈曲极限承载力计算结果	95
第四节	H 型截面钢桥压杆极限承载力三维空间曲面方程	99
第五节	H 型截面钢桥压杆极限承载力计算表格	102
第六节	极限承载力空间曲面方程的验证	118
第七节	H 型截面钢桥压杆极限承载力验算条件与应用	119
第八节	本章小结	124
第六章 焊接 H 型截面钢压杆局部与整体相关屈曲极限承载力试验		126
第一节	引 言	126
第二节	试件材质的机械性能试验	127
第三节	H 型截面钢压杆试件设计与试验方法	128
第四节	H 型截面钢压杆试验结果	131
第五节	H 型截面钢压杆试验值与计算值的比较	138
第六节	本章小结	141
附 录		
附录一	条的应变矩阵	143
附录二	条在局部坐标系中的弹性刚度矩阵、几何刚度矩阵和荷载列阵	144

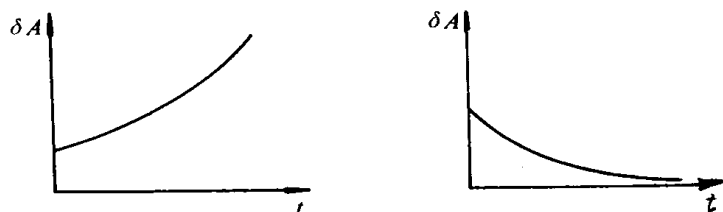
第一章 钢压杆的稳定性

实际钢压杆失稳破坏时的临界荷载为其稳定的极限承载力。钢压杆的失稳过程包括前屈曲和后屈曲两个阶段,二者统一在钢压杆从受载到破坏全过程响应的荷载-挠度曲线之中,此曲线的峰值代表着钢压杆的极限承载力。钢压杆的极限承载力无疑是钢压杆设计中所要考虑的最重要的一种极限状态。随着钢压杆结构不断向轻型薄壁方向发展和高强度材料的应用,当研究钢压杆的工作性能和极限承载力时,弹-塑性阶段的稳定问题就成为一个不可避免地要涉及到的主要课题。在多数情况下,钢压杆的承载能力取决于其稳定性。

第一节 平衡状态的稳定性

根据达朗贝尔(D'Alembert)原理,物体在任何时刻都处于平衡状态,但物体的平衡状态却有稳定平衡状态、随遇平衡状态和不稳定平衡状态之分。在特定荷载的范围内物体的平衡是多值的,因此,一定的已知荷载可能与很多的平衡位置相对应,而这些平衡位置对微小干扰的稳定程度是各不相同的。也就是说,物体平衡状态的稳定性可由物体受干扰后的表现来判定:设物体某平衡状态 A 受到微小干扰变成 $A + \delta A$,若微小偏移 δA 随时间不断增大(图 1—1(a)),则平衡状态 A 为不稳定平衡状态;若微小偏移 δA 随时间逐渐减小(图 1—1(b)),最后 $\delta A = 0$,物体回复到原来的平衡状态 A ,则平衡状态 A 为稳定的平衡状态;若偏移 δA 仅停留在与状态 A 无限邻近的地方,则原来的平衡状态 A 是随遇平衡状态。

例如图 1—2 所示的刚球在三种不同位置的平衡可以很好地说明稳定性的概念。显然在图 1—2 中的每一个位置,球都是平衡



(a) A 平衡状态不稳定 (b) A 平衡状态稳定

图 1-1

的。但是，细心考察一下，就会发现这三种情况之间存在着重要差别。如果施加轻微干扰力使图(a)中的球离开初始位置，干扰力解除后它将回复到原来的平衡位置，因此，我们说这个球是处于稳定平衡状态的。与此相反，要是让图(b)中的球稍微离开其静止位置，它不仅不回到初始平衡位置，而且继续远离该位置而运动，因此图(b)中球的平衡是不稳定平衡。图(c)则描述了另一类可能的平衡类型，球被轻微移动后既不回到初始位置也不继续远离该位置运动，而是停留在移动后的位置上，随遇而安，具有这种特性的平衡即是随遇平衡。

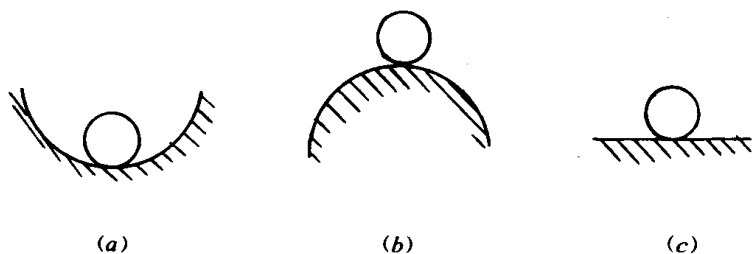


图 1-2 小钢球平衡位置的稳定性

变形体结构的稳定性与刚体运动的稳定性既有相类似之处，又有本质的区别。结构的稳定性除了与支承条件有关外，还取决于荷载的大小与形式，结构本身的变形特性和材料性质等因素。

凡受有压缩作用的结构构件都可能出现平衡状态稳定性发生

改变的情况。结构离开正常的稳定平衡工作状态转入不稳定的平衡工作状态称为结构丧失稳定,又称结构屈曲。此时,外界荷载与结构内部抗力之间的平衡成为不稳定。结构一旦丧失稳定,稍有干扰,即产生急剧增长的变形而迅速破坏。因此,屈曲现象的发生是突然性的、灾难性的,实践中因丧失稳定而失效的结构不少。稳定平衡与不稳定平衡的分界处,称为临界状态,此时作用于结构的荷载称为临界荷载。结构稳定性问题的研究,关键在于确定其临界荷载和进行稳定性校核,以保证结构不致因失稳而丧失承载能力。

第二节 结构在静力作用下的两类失稳问题—— 分枝点失稳与极值点失稳

在静力作用下,结构失稳有两种截然不同的形态:分枝点失稳与极值点失稳,这可以从压杆变形与荷载关系的特征曲线来阐明。

图 1—3 表示一根理想正直的等截面弹性杆件,两端简支,压力 P 准确作用于形心,跨中受干扰力 Q 作用,坐标布置如图,杆件绕 z 轴弯曲的刚度为 EI 。

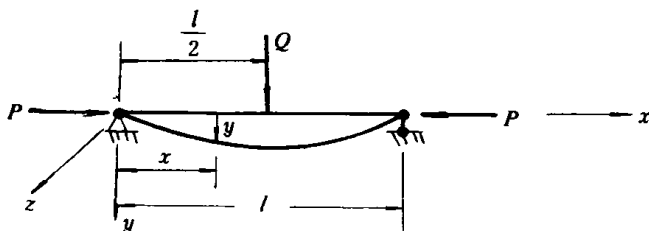


图 1—3

杆件弯曲的曲率为

$$\frac{1}{\rho} = \frac{-y'''}{(1+y'^2)^{3/2}} \quad (1-1)$$

考虑小变形时, $y' \ll 1$, 此时曲率可由其二阶导数代替。根据 x 截面内外力矩的平衡条件, 建立图 1—3 杆件的微分平衡方程

$$-EIy'' = Py + \frac{Q}{2}x$$

令 $\frac{P}{EI} = k^2$, 得

$$y'' + k^2 y = -\frac{Q}{2EI}x \quad (1-2)$$

不难求得式(1-2)的通解为

$$y = A \cos kx + B \sin kx - \frac{Q}{2k^2 EI}x \quad (1-3)$$

由杆的边界条件 $x=0, y=0$ 及 $x=\frac{l}{2}, y'=0$, 解得积分常数

$$A=0, B = \frac{Q}{2kP} \cdot \frac{1}{\cos \frac{kl}{2}}, \text{代入(1-3)式, 得}$$

$$y = \frac{Q}{2Pk} \left(\frac{\sin kx}{\cos \frac{kl}{2}} - kx \right) \quad (1-4)$$

于是压杆中点挠度

$$\delta_{\max} = y_{|x=\frac{l}{2}} = \frac{Q}{2Pk} \left(\operatorname{tg} \frac{kl}{2} - \frac{kl}{2} \right)$$

令 $\beta = \frac{kl}{2}$, 得

$$\begin{aligned} \delta_{\max} &= \frac{Q}{2Pk} (\operatorname{tg} \beta - \beta) = \frac{l^3}{24EI} \cdot \frac{Q}{2Pk} \cdot \frac{24EI}{l^3} (\operatorname{tg} \beta - \beta) \\ &= \frac{Ql^3}{48EI} \cdot \frac{3(\operatorname{tg} \beta - \beta)}{\beta^3} = \frac{Ql^3}{48EI} F(\beta) \end{aligned} \quad (1-5)$$

式中, $F(\beta) = \frac{3(\operatorname{tg} \beta - \beta)}{\beta^3}$. 将 $\operatorname{tg} \beta$ 展开成幂级数

$$\operatorname{tg} \beta = \beta + \frac{\beta^3}{3} + \frac{2}{15}\beta^5 + \frac{17}{315}\beta^7 + \dots,$$

$$\text{则 } F(\beta) = 1 + \frac{2}{5}\beta^2 + \frac{7}{105}\beta^4 + \frac{62}{945}\beta^6 + \dots \quad (1-6)$$

由式(1-6)知, 当压力 P 很小时, β 很小, $F(\beta) \doteq 1$, $\delta_{\max} \doteq \frac{Ql^3}{48EI}$; 当 P 增大, β 增大, $F(\beta)$ 及 $\delta_{\max}$ 则迅速增大, 及至 $\beta \rightarrow \frac{\pi}{2}$ 时, $\operatorname{tg} \beta \rightarrow \infty$, $\delta_{\max} \rightarrow \infty$, 此时

$$\frac{kl}{2} = \frac{\pi}{2}, P = \frac{\pi^2 EI}{l^2} = P_E \text{ (Euler 临界荷载)}$$

这样,我们得出压力 P 与杆件 midpoint 变位 $\delta_{\max}$ 的关系如图 1—4 的曲线①。根据上述分析,曲线①的物理意义为:当轴心压力 $P = P_E$ 时,任何微小的干扰力 Q 都足以引起压杆非常大的挠度。这种物理现象说明 P 等于 Euler 临界力 P_E 时,轴心压杆进入不稳定平衡状态。

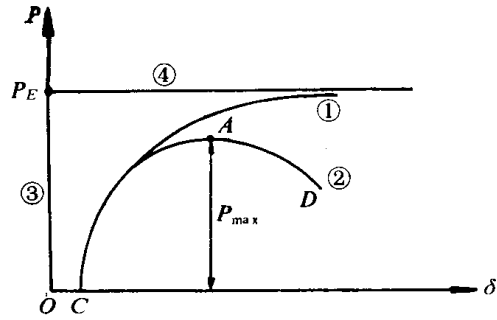


图 1—4 压杆荷载—挠度曲线

下面再回到材料力学中求轴心压杆临界力的方法,以加深对压杆稳定性概念的理解。当 $Q=0$ 时,图 1—3 结构变为理想轴心压杆,式(1—2)变为

$$y'' + k^2 y = 0 \quad (1-7)$$

此式对任意 P 值($P \leq P_E$)都存在一个 $y=0$ 的平凡解,这时压杆保持正直状态,如图 1—4 中的竖直线③。同时,还存在非平凡解

$$y = A \cos kx + B \sin kx$$

由杆件边界条件 $x=0, y=0$, 及 $x=l, y=0$, 解得

$$A = 0 \quad B \sin kl = 0$$

当 $\sin kl \neq 0$ 时,则 $B=0$, 压杆不变位,压杆保持直线平衡状态。

当 $B \neq 0$ 时, $\sin kl = 0$, 即 $kl = n\pi$, 此时

$$P = \frac{n^2 \pi^2 EI}{l^2} \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$n=1$ 时, P 最小, 故 $P = P_E = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$, 压杆变位曲线

$$y = B \sin \frac{\pi}{l} x$$

式中 $B = \delta_{\max}$ 。 B 值不能确定,这是由于采用近似曲率— y'' 计算的结果,与之对应的 P 与 $\delta_{\max}$ 关系如图 1—4 水平线④。

这样,理想轴心压杆的压力与变形关系曲线确定了一个平衡

分枝,荷载与变形关系的特征曲线 $P-\delta$ 曲线是一个不连续的图形,一特定的临界荷载与不连续的点相对应。所谓压杆失稳分析就是由初始直的平衡状态转到另一新的压弯曲平衡状态来描述平衡状态的变化,图 1—4 中的③、④两条直线分别表示压杆稳定的直线平衡状态和不稳定的微弯平衡状态,为 $P-\delta$ 曲线上的两个分枝,二者相交于 $P=P_E$ 的点 B 。当压力 P 达到 P_E 时,压杆开始失稳,此时,两种平衡状态同时发生,是一类具有平衡分枝点的稳定问题,所以称为“分枝点失稳”,又叫第一类失稳问题。 P_E 就是压杆分枝点失稳临界荷载,显然分枝点 B 表示压杆从稳定平衡状态进入不稳定平衡状态。从 B 点开始,压杆开始变位,而压力 P 保持常数 P_E ,具有前述随遇平衡状态的特征,稳定理论中就按随遇平衡状态计算分枝点临界力,称为“中性平衡法”。应当指出,这种说法是按线性小挠度理论计算结果得出的。下节将按大挠度理论的计算结果证明压杆不存在随遇平衡状态,但由于线性小挠度理论计算简单,所得临界力 P_E 与按大挠度理论计算 P_{cr} 相差甚小,故常用之。

图 1—4 中曲线①是假定材料为无限弹性算出的。实际材料为弹塑性,杆件在 Q 干扰下的 $P-\delta_{\max}$ 实际曲线如图 1—4 中的曲线②。在此曲线的 $\overline{CA}$ 段,压力 P 增大,杆件横截面有相应的抵抗力与之平衡,表明此时杆件处于稳定平衡状态;至 A 点,压力达到最大值 $P_{\max}$,杆件开始失稳,内力与外力之间的平衡是不稳定的,并不具有平衡的分枝点,故称之为极值点失稳,又称第二类稳定问题; A 点以后的 $\overline{AD}$ 段,压力 P 减小,位移增大,杆件才能维持平衡,表明此时杆件处于不稳定的平衡状态。极值点失稳只有平衡稳定性状态的变化,而受压受弯的工作状态始终并未改变,与分枝点失稳既有平衡稳定性的变化,又有工作状态的变化(由直变弯)是根本不同的。一般把极值点失稳临界荷载称为极限荷载,即钢压杆的稳定极限承载力,又称压溃荷载(Collapse Load)。

分枝点和极值点都是临界点。临界点以前的平衡状态称为前屈曲平衡状态,临界点以后的平衡状态称为后屈曲平衡状态。应该

强调指出,只有理想结构才会产生分枝点失稳,而理想的结构实际中是不存在的。实际压杆由于制造、运输、安装等原因不可避免地存在一些初始缺陷,如杆不理想正直、有初弯曲、压力作用点不理想对中而出现偏心和残余应力等。因此,实际的压杆是具有初始缺陷的非理想压杆,压杆从开始受力起就始终受压受弯,一般都是极值点失稳。由极值点失稳曲线②可知,极值点失稳具有强烈的非线性,计算复杂。分枝点失稳按线性小挠度理论求解,计算简单,从1744年 Euler 提出压杆临界力以来,压杆的稳定的大量研究工作集中在分枝点失稳。只有在电子计算机广泛应用的今天,极值点失稳的分析才能大量展开。

在按极限承载力状态观点设计压杆时,必须对压杆失稳破坏的全过程进行研究,用其极值点失稳荷载 $P_{\max}$ 作为压杆极限承载力指标,这样才有应用价值。此外,初始缺陷降低承载力,对某些结构降低很多,因此按分枝点失稳计算出来的临界力 P_E 只能看作是实际压杆承载力一个理论的上限值,按分枝点临界力设计压杆除考虑一般的安全系数外,还要考虑特殊的安全系数以反映理想压杆与实际压杆的差别,否则会得出偏于不安全的估计。所以,考虑结构的初始缺陷和材料的弹塑性性质,即按极值点失稳观点分析结构的极限承载力,使得结构分析模型进一步接近实际,是十分必要的,更具有实际意义,这也正是结构稳定性理论的主要发展方向。但是分枝点失稳的研究仍有其价值,这是由于:

1. 有些结构极值点失稳的临界荷载(例如框架柱的压溃荷载)还很难算出,实际中采用相关方程设计。应用相关方程时,需算出框架柱的自由长度 l_0 ,而 l_0 是从框架柱分枝点失稳临界力的算式中确定的。

2. 分枝点失稳临界力与极值点失稳临界力的差别,说明结构初始缺陷的影响。提高结构的极限承载力,必须减少初始缺陷,提高结构制造与施工的质量。因此,分枝点失稳的研究可促进结构质量的提高。

第三节 细长压杆弹性屈曲的大挠度理论

为了说明理想及无限弹性压杆不存在随遇平衡状态,其分枝点失稳临界力与上述小挠度理论算得者同,下面介绍大挠度理论压杆的计算过程与结果,更进一步加深对稳定概念的理解。

对于图 1—5 所示的压杆,为便于求解,此处不宜直接采用曲率的准确数学表达式(1—1),而利用曲率的定义——斜率对弧长的变化率来表达

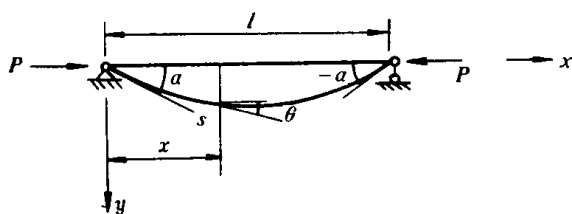


图 1—5 大挠度压杆

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{d\theta}{ds}$$

曲率与弯矩 $M = Py$ 的关系为

$$\frac{d\theta}{ds} = -\frac{Py}{EI} \quad \text{令 } k^2 = \frac{P}{EI} \text{ 得}$$

$$\frac{d\theta}{ds} + k^2 y = 0$$

对 s 微分一次,并考虑 $\frac{dy}{ds} = \sin\theta$,得方程

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} + k^2 \sin\theta = 0 \quad (1-8)$$

这就是细长轴心压杆的大挠度弹性曲线方程,该方程与刚体绕一定点转动的摆的基本方程: $\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin\theta = 0$ 相类似。

将方程(1—8)乘以 $2(d\theta/ds)ds$,然后积分

$$\int \left(\frac{d^2\theta}{ds^2} \right) \cdot 2 \frac{d\theta}{ds} ds + \int 2k^2 \sin\theta d\theta = 0 \quad (1-9)$$

注意: $2 \left(\frac{d^2\theta}{ds^2} \right) \frac{d\theta}{ds} \cdot ds = d \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2$, $\sin\theta d\theta = -d(\cos\theta)$ 得(1—9)式的