

τ - p 变换及应用

τ - p 变换及应用

吴 律 编著

石
油
工
业

石油工业出版社

学(北京)

131.4

047

073124



P631.4/047

τ - p 变换及应用

吴 律 编著



2006/5-



石 油 工 业 出 版 社

(京)新登字082号

内 容 提 要

本书是作者在进行 τ - p 变换方法研究的基础之上,将自己的科研成果与大量国内外文献结合起来经过整理而写成的。本书共分九章,前两章论述了 τ - p 变换方法的基本原理及其在计算机上实现的方法。第三章至第九章叙述了用 τ - p 方法压制线性干扰波、多次波、分离纵横波的效果,在偏移与反演以及在垂直地震剖面中的应用。本书可供从事地球物理勘探的工程技术人员和高等院校有关专业师生参考。

τ - p 变换及应用

吴 律 编著

石油工业出版社出版

《北京安定门外安华里二区一号楼》

北京昌平第一排版厂排版

北京怀柔燕文印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

787×1092毫米 16开本 8 1/2印张 205千字 印1—1,000

1993年5月北京第1版 1993年5月北京第1次印刷

ISBN 7-5021-0858-0/TE·803

定价: 7.60元

序

地震资料处理，以50年代鲁宾逊（Robinson）模型作为它的起点到70年代就达到了相当成熟的程度。显著的标志是数以百计的处理模块广泛用于生产。

进入80年代，地震资料处理一方面不断自我完善，另一方面面对石油地球物理勘探中的新问题。研究新的处理方法和技術并从邻近学科引入新理论（如反散射反演理论），新原理（如全息成象原理），新技术〔诊断医学中的层析（CT）技术〕。使地震资料处理得到迅速发展。

τ - p 变换（倾斜叠加）就某个角度上来说是从天然地震学中的 τ 方法引入到地震数字处理中来的。在50年代已开始研究 τ 方法，之后又引用了层析技术中傅里叶（Fourier）投影定理。还吸收了已有的地震资料处理方法的技巧。因此可以说 τ - p 方法的进展是很快的。

自1978年美国斯坦福大学发表了 τ - p 变换的研究论文起到1984年的五年间，在速度分析压制多次波、纵横波分离、偏移和反演等方面，该方法都得到了应用。1985年之后，许多研究者在 τ - p 变换与平面波分解问题上进行了卓有成效的工作，推进了 τ - p 方法进一步发展，使其效果又上了一个台阶。目前，许多学者对它的研究兴趣有增无减。

本书分为九章。第一章基本原理，是围绕 τ - p 变换与平面波分解这个中心来写的。第二章叙述 τ - p 变换在计算机上的实现以及在实现中的问题，特别突出了关于假频和端点效应。第三章论述 τ - p 变换方法压制线性干扰波和EMO叠加。第四章是关于压制多次波。第五章是利用 τ - p 变换分离波场。第六章是 τ - p 变换在速度分析中的应用。第七章是关于 τ - p 域偏移。第八章是在反演问题中的应用。第九章是在垂直地震剖面（VSP）中的应用。第一章和第二章是共同的。第三章至第九章各章内容是独立的。读者可按照需要选取章节阅读。

本书系作者近十年对 τ - p 变换的研究与文献调研工作的结果。尽可能反映不同的观点和各家之所长，以推动学术上有益的争论。书中大部分内容曾经在清华大学、北京大学、石油大学、地质大学以及西安地质学院给研究生讲授过。西安地质学院朱光明教授审阅了全书，在此表示感谢。本书不当之处，敬请专家和读者指正。

吴 律

1990年5月1日

于石油大学（北京）

目 录

第一章 τ - p 方法的基本原理	1
第一节 τ 、 p 参数与简单的 τ - p 变换公式	1
第二节 线震源 τ - p 变换公式	5
第三节 点震源 τ - p 变换公式	8
第四节 圆柱坐标下点震源 τ - p 变换公式	9
第五节 Chapman 方法	12
第六节 τ - p 变换与平面波分解有关问题的讨论	15
附录A 傅里叶投影定理	18
第二章 τ - p 变换在计算机上的实现	21
第一节 在时间—空间域中的 τ - p 变换方法	21
第二节 在波数—频率域中的 τ - p 变换算法	30
第三章 压制线性干扰波与 EMO 叠加	36
第一节 压制面波和声波	36
第二节 压制相干干扰波	40
第三节 EMO 叠加	45
第四节 空间道内插	48
第五节 在折射波中的应用	50
第六节 小结	51
第四章 τ - p 方法压制多次波	53
第一节 多次波的重复周期问题	54
第二节 τ - p 域中压制多次波效果讨论	56
第三节 小结与展望	59
第五章 用 τ - p 方法分离纵波和横波	63
第一节 从海上观测记录中分离纵横波的物理实验	63
第二节 野外资料的纵横波分离	69
第六章 τ - p 域中的速度分析	74
第一节 入射角与初至波的关系	74
第二节 剥层法	76
第三节 炮检距与速度估算精度的关系	80
第四节 小结	83
第七章 τ - p 偏移	84
第一节 τ - p 偏移 I	85
第二节 τ - p 偏移 II	89
第三节 τ - p 偏移 III	93

第四节	τ - p 偏移与 f - k 偏移	95
第五节	小结	96
第八章	τ - p 域参数反演	97
第一节	τ - p 域反射系数反演法	99
第二节	τ - p 域振幅和相位反演法	103
第九章	VSP波场 τ - p 分离法	110
第一节	τ - p 变换方法分离上行波和下行波	110
第二节	分离上行波与下行波试验	112
第三节	VSP资料纵横波分离方法	114
第四节	τ - p 域中纵横波分离试验	116
第五节	τ - p 方法与 f - k 方法分离波场的比较	121
参考文献		125

第一章 τ - p 方法的基本原理

任何一种地震数字处理方法，几乎都经历了提出问题、实际检验、完善理论、再实践、再提高这样一种螺旋式的上升过程。这也是科学技术发展的普遍规律。 τ - p 变换方法的发展亦是为此。明显表现在对它的物理性质的讨论与研究。不同学术论点促进它的理论完善也促进了它在实际中的应用。

起初是简单的正反 τ - p 变换公式（也就是倾斜叠加）Schultz等人^[1]和 Stoffa^[2]等人认为简单的 τ - p 变换在物理上是平面波分解。

Harding^[7]则认为简单的 τ - p 变换方法没有任何物理意义，它只起到一种视速度滤波的作用。

Brysk等人^[8]的工作，从波动方程的角度把 τ - p 变换分为二维线震源和三维点震源，前者是近似“平面波分解”，后者才代表平面波分解。

Mithal和Vera^[9]用理论合成资料和野外实际资料通过试验证实，点源倾斜叠加与平面波分解两者是有差别的。

Treitel等人直接从著名的Sommerfeld平面波分解公式得到的数学模型与简单 τ - p 变换比较，无论是数学公式形式或理论记录的结果都有明显的不同。

由于人们对 τ - p 变换方法基本性质的研究，还起到了压制端点效应和假频干扰的积极作用，提高了 τ - p 变换的质量。

在本章中，我们首先介绍Schultz等人的简单 τ - p 变换公式。然后从波动方程出发讨论线源 τ - p 变换和点源 τ - p 变换。由于Chapman^[12,13]的奠基工作，在本章中以一节篇幅专门介绍。同时我们还从Sommerfeld平面波分解公式导出加权函数的 τ - p 变换公式。这些论述对以后各章的应用颇为重要。

第一节 τ 、 p 参数与简单的 τ - p 变换公式^[1,2,14]

设想在一无限大的空间，由震源激发产生一个球面波，当波传播到足够远，地震波传播半径足够大，这时把球面波的波前可以近似看成是平面波波前。

有一种模拟近似平面波的方法，假设地面有多个炮点，在一直线上等间距排列，于同一时间激发，通过对很多球面波前叠加就得到一个下行的合成波前。它可看成均匀的圆柱形波前，或视为“平面波”（见图1-1-1）。也可以模拟倾斜“平面波”。设想炮点在地面呈线状等间距排列，在炮点间（即 S_{i+1} 与 S_i 之间）依次延迟 Δt 时间激发，则可合成以 θ 角（ θ 角为任意的）见图1-1-2倾斜的“平面波”。 s 为炮点水平坐标， g 为检波点水平坐标，由关系式

$$f = g - s \quad y = (s + g)/2 \quad (1-1-1)$$

假设 $\varphi(f, t)$ 为常数 g 的 (f, t) 坐标上的数据，

$$\psi(t) = \sum_{i=1}^N \varphi(f_i, t) \quad (1-1-2)$$

通过叠加，它就与图1-1-1所示的单独的物理实验的检波器记录相当。

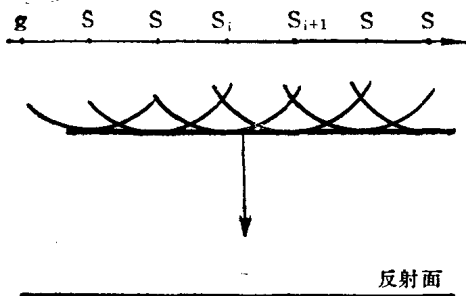


图 1-1-1 单个检波器接收、多个炮点在同一时间激发，产生的下行“平面波”

如果 $\Delta S = S_{i+1} - S_i$, $\Delta f = f_{i+1} - f_i$, 则

$$\Delta t = \frac{\Delta f}{v_h}$$

v_h 为传播波前的水平相位速度，约定在正 x 方向的速度为正。

按照斯涅耳 (Snell) 定律，

$$p = \frac{\sin \theta}{v} = \frac{1}{v_h} = \text{常数}$$

p 的单位取 s/m ($\times 10^{-6}$)。

由 (1-1-1)

$$\psi(\tau, p) = \sum_{i=1}^N \varphi(f_i, t = \tau + p f_i') \quad (1-1-3a)$$

τ 的单位一般取秒，与记录时间相同。

我们将 f_i 换成通常用的地面距离 x ，上式可写成

$$\Psi(\tau, p) = \sum_{i=1}^N \varphi(x, \tau + p x) \quad (1-1-3b)$$

(1-1-3) 式是 τ - p 正变换公式。

为了进一步刻画 p 和 τ 参数的性质，从另外一个角度来讨论。假设一个由三层介质组成的模型，它的速度分别为 v_1 、 v_2 和 v_3 ，层内是均匀的。厚度为 z_1 、 z_2 、 z_3 。在 S_1 点上激发，波向下传播（见图 1-1-3a），我们考察其中一条射线，从 S 点到 A 点，根据斯涅耳定律，透射（小于临界角）射线产生折射，到达 B 点，在 B 点又产生透射波并折射再传至 C 点，向地面反射，入

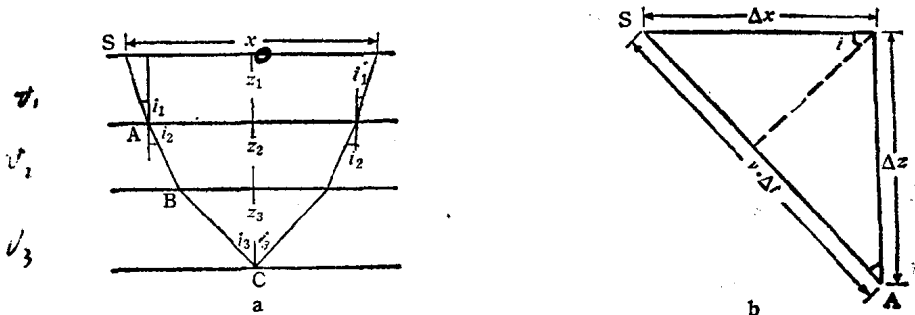


图 1-1-3 说明水平波慢度和垂直波慢度简图

a—三层模型；

b—将旅行时分解为水平分量和垂直分量

射角等于反射角。在均匀介质,反射射线的路径同入射线路径以OC(C是地面炮检距的中点)为对称

我们来看图1-1-3a在左上方的三角形,将它放大,见图1-1-3b。

$$\overline{SA} = v\Delta t$$

(Δt 是波自S到A点的旅行时)

$\overline{SA}$ 可以分解成水平分量的垂直分量,记

$$\Delta x_1 = v\Delta t \sin\theta$$

$$\Delta z_1 = v\Delta t \cos\theta$$

旅行时 Δt 也可表示成

$$\Delta t_1 = p_1 \Delta x_1 + q_1 \Delta z_1$$

式中

$$p_1 = \frac{\sin\theta}{v},$$

$$q_1 = \frac{\cos\theta}{v}$$

p_1 称为第一层的水平视慢度, q_1 为第一层的垂直视慢度。

地震波波慢度 u 可写成(速度的倒数)

$$u = \frac{1}{v} = \sqrt{p^2 + q^2}$$

对于图1-1-3的水平层状介质,反射波旅行时是各层中旅行时之和

$$t = 2 \sum_{i=1}^n p_i x_i + 2 \sum_{i=1}^n q_i z_i$$

推广到N层的水平层状介质

$$t = 2 \sum_{i=1}^N p_i x_i + 2 \sum_{i=1}^N q_i z_i$$

由斯涅耳定律, $p_1 = p_2 = \dots = p_N = p$,所以有

$$t = px + 2 \sum_{i=1}^N q_i z_i$$

$$t = px + \tau$$

记

$$\tau = 2 \sum_{i=1}^N q_i z_i$$

τ 表示地震波在垂直方向上的双程旅行时分量。下面我们将看到它是截距时间。

注意到单个水平反射介面得到的反射时距曲线,在均匀介质条件下,它的半支时距曲线如图1-1-4a,过曲线上任意一点作切线,与时间(t)轴的交点,在交点处引平行 x 轴的直线,该线与切线的夹角为 α ,截距时间记为 τ ,由几何图形,显然有关系式:

$$t = \tau + \operatorname{tg} \alpha \cdot x$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta t}{\Delta x} = p$$

因为 $\Delta x / \Delta t$ 表示沿水平方向传播的速度, $\Delta t / \Delta x$ 也就是水平波慢度,所以这里 $\operatorname{tg} \alpha = p$,于

是,

$$t = \tau + px$$

$$\tau = t - px$$

我们用 $\varphi(x, t)$ 表示反射双曲线, 在该曲线上逐点作切线, 即是取不同的 p 与之相应的有不同的截距时间 τ , 按不同的切线叠加, 即求和, 用 $\psi(p, \tau)$ 表示, 有

$$\psi(p, \tau) = \sum \varphi(x, \tau + px) \quad (1-1-4)$$

(1-1-3) 式与 (1-1-4) 式可从不同的角度得到, 前者由近似模拟平面波得出, 后者从反射记录道得出。综上所述, 便可归纳出有关 τ 、 p 参数的意义。

关于 τ 参数, 从物理的角度可解释为垂直波慢度。从几何的角度可看作是 τ - p 变换中在时间 t 轴上的截距。

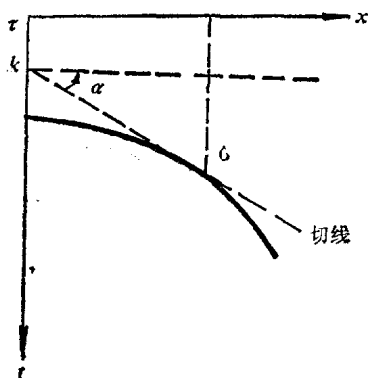


图 1-1-4a 从几何角度说明 τ 、 p 参数, 在双曲线上不同点取切线作叠加

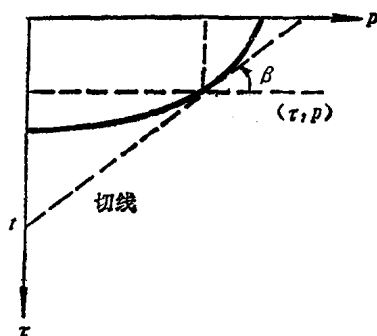


图 1-1-4b 沿椭圆曲线作切线并沿切线叠加

关于 p 参数的含义, 可以解释为:

- (1) 水平波慢度;
- (2) 射线参数, 即斯涅耳常数;

$$\frac{\sin \theta_1}{v_1} = \frac{\sin \theta_2}{v_2} = \dots = \frac{\sin \theta_N}{v_N} = p$$

- (3) 可以把它看成是反射波同相轴上各点的斜率。

了解 τ 、 p 参数的物理和几何意义, 从普通地震记录 x - t 空间变换到 τ - p 空间, 可以说是将地震波观察坐标 (x - t) 变换到以地震波垂直波慢度分量 (τ) 和水平波慢度分量 (p) 的空间; 也可看成是以不同的斜率和截距的空间。

τ - p 反变换或 τ - p 逆变换, 就是从 τ - p 空间变换到原来的 x - t 空间。或者把 $\tau = \psi(p)$ 还原为 $t = \varphi(x)$ 。即把处理空间 τ - p 空间变换到记录时间与炮检距 t - x 空间。运用直观的方法, 在 τ - p 平面上对椭圆曲线作切线, 则

$$x = -\operatorname{tg} \beta = -\frac{d\tau}{dp}$$

再用

$$t = \tau + px$$

于是, 反变换的数学公式为

$$\varphi(x, t) = \sum \psi(p, t - px) \quad (1-1-5)$$

公式 (1-1-4) 和 (1-1-5) 式是 τ - p 正、反变换对。

下面我们将专门讨论 τ - p 反变换公式。

第二节 线震源 τ - p 变换公式^[8]

一、从声波方程推导线震源 τ - p 公式

在均匀介质中，取线震源为 y 轴， x 轴与 y 轴垂直， z 轴铅直向下，声波方程可写为：

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad (1-2-1)$$

v 是速度，上式满足某些初始值和边值的解可以写成

$$\varphi(t, x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega, p) e^{-i\omega(t-pz-q^2)} dp \quad (1-2-2)$$

其中 $p^2 + q^2 = v^{-2}$

在方程 (1-2-1) 中，指数项表示一个连续的“平面波”离开 y 轴传播， $\varphi(t, x, z)$ 是这些波的叠加，每个分量波有频率 ω 和斯涅耳参数 p 。

τ - p 正变换公式记为：

$$\Psi(\tau, p') = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau + p'x, x, 0) dx \quad (1-2-3)$$

已知 $\Psi(\tau, p')$ ，求 $\varphi(t, x, z)$ 。首先将 (1-2-2) 式代入 (1-2-3) 式

$$\Psi(\tau, p') = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega, p) e^{-i\omega\tau} dp \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x(p-p')} dx$$

因为 $|\omega| = \omega \cdot \text{sgn}(\omega)$ ，又根据 δ 函数的性质，于是

$$\begin{aligned} \Psi(\tau, p') &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \text{sgn}(\omega) e^{-i\omega\tau} \frac{d\omega}{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega, p) \delta(p - p') dp \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \text{sgn}(\omega) g(\omega, p') e^{-i\omega\tau} \frac{d\omega}{\omega} \end{aligned} \quad (1-2-4)$$

利用傅里叶变换，得

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\tau, p') e^{i\omega'\tau} d\tau = 4\pi^2 \text{sgn}(\omega') g(\omega', p') / \omega' \quad (1-2-5)$$

所以 (1-2-2) 式中的系数 g 是由 τ - p 变换后所作的傅里叶变换而得到的，也就是

$$g(\omega, p) = \frac{1}{4\pi^2} \text{sgn}(\omega) \omega \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\tau, p) e^{i\omega\tau} d\tau \quad (1-2-6)$$

由于上式中有 $\text{sgn}(\omega)$ 因子，使求 (1-2-6) 式的逆变得复杂起来，要使用 希尔伯特 (Hilbert) 变换。按照 Ψ 的希尔伯特变换 ($H\Psi$) 定义：

在柯西 (Cauchy) 主值意义下

$$(H\Psi)(\tau, p) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Psi(t, p) dt}{\tau - t} \quad (1-2-7)$$

对上式取傅里叶反变换：

$$\int e^{i\omega\tau}(H\Psi)(\tau, p)d\tau = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(t, p)dt \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega\tau}}{\tau-t} d\tau$$

令 $y = \omega(\tau - t)$ 。 $dy = \omega d\tau$

$$\begin{aligned} & \int e^{i\omega\tau}(H\Psi)(\tau, p)d\tau \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(t, p)e^{i\omega t} dt \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(\omega) \frac{e^{iy}}{y} dy \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(t, p)e^{i\omega t} \cdot \operatorname{sgn}(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(\omega) \frac{e^{iy}}{y} dy \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(t, p)e^{i\omega t} \cdot \operatorname{sgn}(\omega) \cdot i\pi \end{aligned}$$

所以,

$$\int (H\Psi)(\tau, p)e^{i\omega\tau} d\tau = -i \operatorname{sgn}(\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(t, p)e^{i\omega t} dt \quad (1-2-8)$$

上式给出函数的傅里叶变换和函数的希尔伯特变换的傅里叶变换关系, 把 (1-2-8) 式代入 (1-2-6) 式, 得

$$\begin{aligned} G(t, p) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega, p)e^{-i\omega t} d\omega \\ &= \frac{i}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} \omega e^{-i\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} (H\Psi)(\tau, p)e^{i\omega\tau} d\tau \\ &= -\frac{1}{8\pi^3} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} (H\Psi)(\tau, p)e^{i\omega\tau} d\tau \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \frac{d}{dt} (H\Psi)(t, p) \end{aligned} \quad (1-2-9)$$

方程 (1-2-9) 满足方程 (2) 中关于 ω 的积分

$$\varphi(t, x, z) = -\frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} (H\Psi)(t - px - qz, p) dp \quad (1-2-10)$$

上式中, 考虑地面采集数据, $z=0$

$$\varphi(t, x, z=0) = -\frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} (H\Psi)(t - px, p) dp \quad (1-2-11)$$

或写做

$$\varphi(t, x) = -\frac{1}{2\pi} \frac{dH}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(t - px, p) dp \quad (1-2-12)$$

(1-2-12) 是 τ - p 反变换公式。

二、线震源 τ - p 变换公式的简易推导^{[3] [5] [7]}

设共炮点记录 (或共接收点记录) 为 $\varphi(x, t)$, 二维傅里叶正变换记为:

$$\tilde{\varphi}(k_x, \omega) = \iint_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, t) e^{i(\omega t - k_x x)} dx dt \quad (1-2-13)$$

二维傅里叶反变换为:

$$\varphi(x, t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \iint_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}(k_x, \omega) e^{-i(\omega t - k_x x)} dk_x d\omega \quad (1-2-14)$$

$$k_x = \omega p$$

p 是沿 x 方向的水平波慢度

$$\tilde{\varphi}(\omega p, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, t) e^{i(\omega t - \omega p x)} dt$$

因为 $t = \tau + px$,

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(\omega p, \omega) &= \int dx \int \varphi(x, t) dt \int e^{-i\omega\tau} \delta(\tau - t + px) d\tau \\ &= \int dx \int e^{-i\omega\tau} d\tau \int \varphi(x, t) \delta(\tau - t + px) d\tau \end{aligned} \quad (1-2-15)$$

$$\tilde{\varphi}(\omega p, \omega) = \int e^{i\omega\tau} d\tau \int u(x, \tau + px) dx$$

由(1-2-14)式

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\omega \int dk_x \tilde{\varphi}(k_x, \omega) e^{-i(\omega t - k_x x)} \cdot \delta\left(\frac{k}{\omega} - 1\right) dp$$

由 δ 函数的定标性质

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\omega \int dp \int |\omega| \tilde{\varphi}(k_x, \omega) e^{-i(\omega t - k_x x)} \cdot \delta(k - \omega p) dk_x \quad (1-2-16)$$

所以

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint |\omega| \tilde{\varphi}(\omega p, \omega) e^{i\omega(t - px)} d\omega dp \quad (1-2-17)$$

此式与(1-2-6)式相似。

根据傅里叶投影定理(见附录A)

$$\tilde{\varphi}(\omega p, \omega) = \tilde{\varphi}_\theta(p, \omega) \quad (1-2-18)$$

即是

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint |\omega| \tilde{\varphi}_\theta(p, \omega) e^{-i\omega(t - px)} d\omega dp \quad (1-2-19)$$

因为 $|\omega| = (-i\omega) \cdot (i \operatorname{sgn} \omega)$

$$(1-2-20)$$

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} (-i\omega) (i \operatorname{sgn} \omega) \varphi_\theta(p, \omega) \cdot e^{-i\omega(t - px)} d\omega \right] dp \quad (1-2-21)$$

由微分关系

$$-i\omega \longleftrightarrow \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} (i \operatorname{sgn} \omega) \varphi_\theta(p, \omega) \cdot e^{-i\omega(t - px)} d\omega \right] dp \quad (1-2-22)$$

根据傅里叶变换与褶积的关系,在频率域的乘积等价于时间域中的褶积和傅里叶变换延迟定理

$$-i \operatorname{sgn} \omega \longleftrightarrow -\frac{2}{\pi t} \quad (1-2-23)$$

$$\tilde{\varphi}_\theta(p, \omega) \cdot e^{i p x} \longleftrightarrow \Psi(p, t - p x) \quad (1-2-24)$$

将 (1-2-23) 式和 (1-2-24) 式代入 (1-2-22) 式得:

$$\varphi(x, t) = -\frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{1}{\pi t} \right) * \Psi(pt - px) dp \quad (1-2-25)$$

或

$$\varphi(x, t) = -\frac{1}{2\pi} \frac{dH}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(p, t - px) dp \quad (1-2-26)$$

公式 (1-2-26) 是共炮点记录 (或共接收点记录) 的 τ - p 反变换公式, 即是线震源条件下的 τ - p 反变换公式。

第三节 点震源 τ - p 变换公式

地震勘探中, 一般是在一点激发, 使用一排检波器接收或将检波器在地面上布置成方形、十字形排列, 在面积上采集地震资料。

假设在均匀介质中, 点震源激发, 使 xoy 与地面重合, z 轴铅直向下, 声波方程可写为:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad (1-3-1)$$

v 是速度, 与本章第二节线震源声波方程的解类似, (1-3-1) 式的解可以写成:

$$\begin{aligned} \varphi(t, x, y, z) = & \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dp_x \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega, p_x, p_y) \\ & \cdot \exp[-i\omega(t - p_x x - p_y y - gz)] dp_y \end{aligned} \quad (1-3-2)$$

式中 $p_x^2 + p_y^2 + q^2 = \frac{1}{v^2}$

p_x —— x 方向上的斜率分量;

p_y —— y 方向上的斜率分量。

(1-3-2) 式中的指数项为平面波, 相应的 τ - p 变换公式为:

$$\Psi(\tau, p'_x, p'_y) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau + p'_x x + p'_y y, x, y) dy \quad (1-3-3)$$

将 (1-3-2) 式代入 (1-3-3) 式, 类似于前节 (1-2-4) 式的处理, 得:

$$\Psi(\tau, p'_x, p'_y) = 4\pi^2 \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega, p'_x, p'_y) e^{-i\omega\tau} \frac{d\omega}{\omega^2} \quad (1-3-4)$$

对 (1-3-4) 式做傅里叶变换, 显然有

$$g(\omega, p_x, p_y) = \frac{\omega^2}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\tau, p_x, p_y) e^{i\omega\tau} d\tau \quad (1-3-5)$$

对 ω 作傅里叶变换, 得

$$\begin{aligned}
G(t, p_x, p_y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega, P_x, P_y) e^{-i\omega t} d\omega \\
&= \frac{1}{16\pi^4} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 e^{-i\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\tau, p_x, p_y) \cdot e^{i\omega \tau} d\tau \\
&= -\frac{1}{8\pi^3} \frac{d^2}{dt^2} \Psi(t, p_x, p_y)
\end{aligned} \tag{1-3-6}$$

在上式推导中, 应用了傅里叶变换与时间的对应关系

$$-\omega^2 \longleftrightarrow \frac{d^2}{dt^2}$$

(1-3-6) 式的反变换算子

$$\begin{aligned}
\varphi(t, x, y, z) &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} dp_x \int_{-\infty}^{\infty} G(t - p_x x - p_y y - qz, p_x, p_y) dp_y \\
&= -\frac{1}{4\pi^2} \frac{d}{dt^2} \int_{-\infty}^{\infty} dp_x \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(t - p_x x - p_y y - qz, p_x, p_y) \cdot dp_y
\end{aligned} \tag{1-3-7}$$

对于地面资料, 令 $z=0$ 。

$$\varphi(t, x, y, z) = -\frac{1}{4\pi^2} \frac{d^2}{dt^2} \int_{-\infty}^{\infty} dp_x \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(t - p_x x - p_y y, p_x, p_y) dp_y \tag{1-3-8}$$

第四节 圆柱坐标下点震源 τ - p 变换公式

在三维直角坐标系下 τ - p 变换公式中, 变元用 p_x 和 p_y , 不是只用斯涅耳参数 p , 还需要作些讨论, 在柱坐标系下就更能说明问题, 令:

$$\begin{aligned}
(x, y) &= (r \cos \beta, r \sin \beta) \\
(p_x, p_y) &= (p \cos \alpha, p \sin \alpha)
\end{aligned} \tag{1-4-1}$$

式中 r 代表径向, α 、 β 角的定义可将 (1-3-4) 式和 (1-3-8) 式写成柱坐标下函数的公式, 它们分别是:

$$\Psi(\tau, p, \alpha) = \int_0^{\infty} r dr \int_{-\pi}^{\pi} \varphi[\tau + p r \cos(\beta - \alpha), r, \beta, 0] d\beta \tag{1-4-2}$$

和

$$\varphi(t, r, \beta, z) = -\frac{1}{4\pi^2} \frac{d^2}{dt^2} \int_0^{\infty} p dp \int_{-\pi}^{\pi} \Psi(t - p r \cos(\beta - \alpha) - gz, p, \alpha) d\alpha \tag{1-4-3}$$

如果震源是圆柱状的, 地下介质横向是均匀的, 即是在轴对称的假设条件下, Ψ 和 φ 不依赖于角度。 τ - p 变换随斯涅耳参数变化而不随波的传播方向变化。但在 (1-4-2) 和 (1-4-3) 式中保留着对角度的积分, 这是因为这两个公式中的积分是位置向量和波传播方向的相对方向。

在轴对称问题中，地震数据仅与偏移距有关，还期望与方向无关，即

$$\varphi(t, r, \beta, z) = \varphi(t, r, 0, z) = \varphi(t, r, \alpha, z) \quad (1-4-4)$$

在轴对称的条件下可以将柱坐标下 τ - p 变换与线震源 τ - p 变换联系起来。将方程(1-4-4)式代入(1-4-2)。令 $\beta' = \beta - \alpha$ ，利用余弦函数的对称性，(1-4-2)式可写为：

$$\Psi(\tau, p, \alpha) = 2 \int_0^\infty r dr \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [\varphi(\tau + pr \cos \beta', r, 0, 0) + \varphi(\tau - pr \cos \beta', r, 0, 0)] d\beta' \quad (1-4-5)$$

注意，对称条件下使积分限发生了变化，交换积分次序，令第一项中 $r = x$ ，第二项中 $r = -x$ ，利用 $\varphi(t, x, 0, 0) = \varphi(t, -x, 0, 0)$ 得：

$$\Psi(\tau, p, \alpha) = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\beta' \int_0^\infty |x| \varphi(\tau + px \cos \beta', x, 0, 0) dx \quad (1-4-6)$$

对 $p=0$

$$\Psi(\tau, 0, \alpha) = \pi \int_{-\infty}^\infty |x| \varphi(t, x, 0, 0) dx \quad (1-4-7)$$

对 $p>0$ ，令 $p' = p \cos \beta'$

$$dp' = -p \sin \beta' d\beta' = -(p^2 - p'^2)^{\frac{1}{2}} d\beta' \quad (1-4-8)$$

$$\Psi(\tau, p, \alpha) = 2 \int_0^p (p^2 - p'^2)^{\frac{1}{2}} dp' \int_{-\infty}^\infty |x| \varphi(\tau + p'x, x, 0, 0) dx \quad (1-4-9)$$

方程(1-4-9)的外层积分说明对 p 的圆柱 τ - p 变换（或倾斜叠加）是作为线震源 τ - p 变换（或倾斜叠加）的累加。对所有 p' 从0到 p ，用加权函数相乘，以利于 p' 接近 p 。

还应该提及的是，(1-4-5)式中被积函数中的第一项对应于(1-4-9)式的正的 x 值，它的第二项对应于负的 x 值。这里包含着炮点两边的全部接收点的位置。如果野外排列只是单边的，在(1-4-5)式中相应的第二项应由负的斯涅耳参数提供，也就是

$$\Psi(\tau, p, \alpha) = 2 \int_0^p (p^2 - p'^2)^{-\frac{1}{2}} dp' \int_0^\infty [\varphi(\tau + p'r, r, 0, 0) + \varphi(\tau - p'r, r, 0, 0)] r dr \quad (1-4-10)$$

轴对称 τ - p 变换公式还可用另外一种形式表示，(1-4-2)式可写为

$$\begin{aligned} \Psi(\tau, p, \alpha) &= \int_0^\infty r dr \int_{-\pi}^{\pi} d\beta \int_{-\infty}^\infty \varphi(t, r, \beta, 0) \delta[t - \tau - pr \cos(\beta - \alpha)] dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty r dr \int_{-\pi}^{\pi} d\beta \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t, r, \beta, 0) \\ &\quad \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(t - \tau - pr \cos(\beta - \alpha))} d\omega \end{aligned} \quad (1-4-11)$$

在(1-4-11)式中利用了 δ -函数谱公式

$$\delta(t) = \int_{-\infty}^\infty e^{i\omega t} d\omega$$

因为轴对称问题， φ 与 β 无关。而

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\omega pr \cos(\beta-\alpha)} d\beta = J_0(\omega pr) \quad (1-4-12)$$

J_0 是零阶贝塞尔函数 (Bessel)

(1-4-11) 可写成

$$\Psi(\tau, p) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega\tau} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} r J_0(\omega pr) dr \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t, r) \cdot e^{i\omega t} dt \quad (1-4-13)$$

当 $p=0$, $J_0(\omega pr)=1$, 于是有

$$\Psi(\tau, 0) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} r \varphi(\tau, r) dr \quad (1-4-14)$$

$p>0$ 时, 利用贝塞尔函数的傅里叶变换

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} J_0(\omega pr) e^{i\omega(t-\tau)} d\omega \\ &= \begin{cases} 2[p^2 r^2 - (t-\tau)^2]^{-\frac{1}{2}} & pr > |t-\tau| \\ 0 & pr < |t-\tau| \end{cases} \end{aligned} \quad (1-4-15)$$

给定 r , t 在有限范围内积分不为零, 于是

$$\Psi(\tau, p) = 2 \int_0^{\infty} r \int_{\tau-pr}^{\tau+pr} [p^2 r^2 - (t-\tau)^2]^{-\frac{1}{2}} \varphi(t, r) dt \quad (1-4-16)$$

利用分部积分, 首先改变积分变量, 由 t 变为

$T = |t-\tau|$, 于是

$$\Psi(\tau, p) = 2 \int_0^{\infty} r dr \int_0^{pr} (p^2 r^2 - T^2)^{-\frac{1}{2}} [\varphi(\tau+T, r) + \varphi(\tau-T, r)] dT \quad (1-4-17)$$

上式对 T 积分, 得

$$\Psi(\tau, p) = 2 \int_0^{\infty} r dr \int_0^{pr} \arccos \frac{T}{pr} \left[\frac{d\varphi(\tau+T, r)}{dT} + \frac{d\varphi(\tau-T, r)}{dT} \right] dT \quad (1-4-18)$$

利用

$$\frac{d}{dT} \varphi(\tau \pm T, r) = \pm \frac{d}{dT} \varphi(\tau \pm T, r) \quad (1-4-19)$$

回到以 t 作为变量

$$\Psi(\tau, p) = 2 \frac{d}{dt} \int_0^{\infty} r dr \int_{\tau-pr}^{\tau+pr} \operatorname{sgn}(t-\tau) \arccos \frac{|t-\tau|}{pr} \varphi(t, r) dt \quad (1-4-20)$$

如果直接对 (1-4-16) 式和 (1-4-17) 式交换积分顺序可得

$$\Psi(\tau, p) = -\frac{2}{p^2} \int_0^{\infty} dr \int_{\tau-pr}^{\tau+pr} [p^2 r^2 - (t-\tau)^2]^{-\frac{1}{2}} \frac{d\varphi(t, r)}{dr} \quad (1-4-21)$$

以上讨论了均匀介质中的点源 τ - p 变换公式和轴对称条件下的点源 τ - p 变换公式。还可给出无几何对称性的区域覆盖的数据的公式, 我们从方程 (1-4-11) 所对应的方程开始。