2

进　　展

数　　学

数 理 逻 辑

参照《数学评论》的分类，我们将数理逻辑分为七部分：1．哲理与评述；2．一般逻辑；3．模型论；4．递归论；5．集合论；6．证明论与构造数学；7．非标准模型。

1．哲理与评述　（1）徐利治等[1]应用延伸、穷竭的概念，引入不断延伸原理和相对穷竭原理，定义了数学中的潜无限与实无限，进而讨论延伸变程的层次概念和穷竭原理的相对性，借此分析 Gödel 不完备定理的证明思想，指出其实质是"层次不可越原理"，即任何低一层次的无穷过程恒不能列举或判定相应的而又比它高一层次的无限总体的全体元。

（2）莫绍揆[2]分析 ZF 与 BG 系统的优缺点，认为：

（一）集合论应该建基于二级谓词演算之上，这时无论从什么方面说，ZF 系统均优于 BG 系统；

（二）如果限于在一级谓词演算之上发展集合论，并愿意采用无穷条公理，则 ZF 系统仍优于 BG 系统；倘若要求采用有限条公理，则希望把 BG系统作如下改进：对于什么是集合，选择更符合直觉的叙述，并把分离公理与相当于素朴概括公理的元定理的意义作根本的改变，采用类变元以代替原来的集合变元。

2．一般逻辑　（1）沈有鼎[3]研究在狭谓词演算中加入"同一"概念所构成的纯逻辑演算。他采用下列四组基本概念：

（一）真值：T 与 F；

（二）$=$：$x=y$ 表示个体 x 即是个体 y；

（三）$[A, B, C]$：条件析取，意同$(B\to A)\wedge(\neg B\to C)$，其中 A、B、C 表示真值变元或谓项变元；

（四）$\langle xAy\rangle$：杂函项，当 A 取 T 为值时其值同于 x，当 A 取 F 为值时其值同于 y。

他未举出本系统的公理，但肯定这系统是完全的。因此可以采用一种和命题演算的真值表相类似的方法，判定一个公式 Δ是否永真，从而判定 Δ是否为定理。

(2)罗铸楷[4]研究在 $K(K\geqslant 3)$ 值逻辑中，K 值函数集 P_K 的所有极大封闭集的确定问题。他证明了 P_K 中任意极大封闭集必是一个单调函数集 M、T 型集 $T_{E,O}$、保分划函数集 T_{D^r}、自对偶函数集 S_σ 或线性函数集 L_G。由于函数集 M、$T_{E,O}$、S_σ、L_G 的极大封闭性问题已经解决，因此原来的问题就转化为解决 T_{D^r} 的极大封闭性问题了。

3. 模型论　(1)王世强等[5~8]把真假值为 $\{0,1\}$ 的 2 值模型论中的一些结果推广到在一个具有补运算的完备格 L 上取值的情况。他们在[6]中证明了当 L 为有限值格，其中补运算满足

$$0'=1,\ 1'=0$$

时，超积基本定理成立。应用这一结果，他们证明了有限值格时的紧致性定理。

在[7]中，王给出了格值模型论常量构作法的两个应用，证明有限值格时的紧致性定理及某些值格的省略型定理。

(2)张锦文[9~12]研究弗晰集合结构的逻辑性质。

设 M 是带本元的集合论公理系统 ZFU 的一个传递模型，亦称基础模型。S 是 M 的本元集合，G 是 M 中的一个完备拟布尔格。超穷归纳定义弗晰集合结构 $U(M,S,G)$（简记为 $U^{(G)}$）如下：

当 $\alpha=0$ 时，令 $U_0(M,S,G)=S\cup\{\phi\}$；

当 $\alpha=\beta+1$ 时，令 $U_\alpha(M,S,G)=U_\beta(M,S,G)\cup\{x:\ Fcn(x)\wedge \mathrm{dom}x\subseteq U_\beta(M,S,G)\wedge \mathrm{ran}x\subseteq G\}$，其中 $Fcn(x)$ 表示 x 为函数；

当 α 为极限序数时，令 $U_\alpha=\cup_{\lambda<\alpha}U_\lambda(M,S,G)$，

$U(M,S,G)=\cup_{\alpha\in \mathrm{On}}U_\alpha(M,S,G)$。

当 G 为布尔代数 B 时，$U^{(B)}$ 称为正规弗晰集合结构；当 $G=[0,1]$ 时，$U^{(G)}$ 称为实值弗晰集合结构。张证明 $U^{(2)}$ 与 M 同构，实值弗晰集合结构是弱谓词演算的一个模型。

张认为对于弗晰集合论建立坚实的理论基础是非常必要的。每类形式的逻辑系统加上集合论公理就得到相应的集合论。他的工作表明 Cantor 集合论是公理集合论的标准模型，而弗晰集合论则是非标准的集合论。弗晰集合结构与正规弗晰集合结构是公理集合论的一类非标准模型——布尔值模型的推广。通过建立弗晰集合论与布尔值模型的联系，使布尔值模型成为弗晰集合论与非标准分析之间的一座桥梁。由这三门数学分支汇合而产生的非标准数学和弗晰数学将对整个数学产生巨大的影响，会在应用研究、系统科学、计算机应用方面带来新的局面。

4. 递归论　(1)在递归函数论中所讨论的递归式大都只用以定义数论函数。1956年胡世华开始讨论一种用以定义算子的递归式，证明它的原始递归性。后来 R. Peter 与莫绍揆分别对它加以推广。莫绍揆、叶大兴[13]给出一种新的用以定义算子的递归式，证明它的原始递归性，并且包括 Peter 与莫的推广作为特例。

这个结果还可以推广到具有初等算子的递归式去。

(2)设 A_n 表示有穷字母表 $\{S_1S_2\cdots S_n\}$，$\Omega(A_n)$ 表示 A_n 中所有字的集合，其中包含空字⊙。$\Omega(A_n)$ 上的函数叫做字函数，关于字函数的研究叫做字算术(WA)。

沈百英[14]在 Vučković 研究的基础上为 WA 建立起一个简单而严格的公理系，它由四条公理与三条原始规则组成。四条公理是：

(一) O:　$O(x)=0$;

(二)I_{mt}：$I_{mt}(x_1,\cdots,x_t,\cdots,x_m)=x_t(m\geqslant t\geqslant 1)$；

(三)DS_i：$D(S_i(x))=x(i=1,\ 2,\cdots,\ n)$；

(四)迭$_m^t$：任给 m 个 t 元函数 $\varphi_i(x_1,\cdots,x_t)(i=1,\cdots,m)$ 与一个 m 元函数 $\varphi(x_1,\cdots,x_m)$，恒有 t 元函数 $\psi(x_1,\cdots,x_t)$，满足 $\psi(x_1,\cdots,x_t)=\varphi(\varphi_1(x_1,\cdots,x_t),\cdots,\varphi_m(x_1,\cdots,x_t))$ $(m\geqslant 1,t\geqslant 1)$。

三条原始规则是：

(一)代入：$\varphi(x_1,\cdots,x,\cdots,x_m)=\psi(x_1,\cdots,x,\cdots,x_m)\underline{\alpha}\varphi(x_1,\cdots,\alpha,\cdots,x_m)=\psi(x_1,\cdots,\alpha,\cdots,x_m)$；

(二)替换：$\alpha=\beta\vdash\varphi(\alpha_1,\cdots,\alpha,\cdots,\alpha_m)=\varphi(\alpha_1,\cdots,\beta,\cdots,\alpha_m)$；

(三)左等换：$\alpha=\beta,\ \alpha=\gamma\vdash\beta=\gamma$。

5．集合论　(1)ZF 系统包括下述七条公理：(一)外延；(二)对偶集；(三)联集；(四)幂集；(五)替代或分出；(六)无穷；(七)正规。加上(八)选择就构成 ZFC 系统。公理集合论重要课题之一是用较强的公理来代替原来的公理。

莫绍揆[15]沿 Hauschild(1961)的思路而加以改进，引入概念

$x\leqslant a\triangleq\forall z(z\in x\rightarrow\forall m(\text{trans }m\wedge a\in m\rightarrow z\in m))$，

其中 trans m 表示 m 是传递集。他并引入四条公理：

(一)强对偶集公理：$\exists y\forall x(x\in y\longleftrightarrow x\leqslant a\vee x\leqslant b)$；

(二)强替代公理：$Fcn\varphi\rightarrow\exists y\forall x(x\in y\longleftrightarrow\exists t((c\leqslant a\vee t\leqslant b)\wedge\varphi(t,x)))$，其中 $Fcn\varphi$ 表示 φ 是函数；

(三)第一强概括公理：$\exists y\forall x(x\in y\longleftrightarrow\psi(x))\longleftrightarrow\nabla(\psi)$，其中 $\nabla(\psi)$ 表示 $\forall\varphi(Fcn\varphi\rightarrow\exists u\overline{\exists}x(\psi(x)\wedge\varphi(x,u)))$；

(四)第二强概括公理：$\exists y\forall x(x\in y\longleftrightarrow\psi(x))\longleftrightarrow\nabla(\psi)\vee\nabla(\bar{\psi})$。

莫证明了下列定理：

定理 1　在一个替代公理与无穷公理成立的系统中，强对偶与对偶、联集、幂集三条公理可以互相推出，即 ZF 系统可以用外延、强对偶、替代、无穷、正规这五条公理来刻划；

定理 2　在具有无穷公理的系统中，强替代公理与对偶、联集、幂集、替代四条公理可以互相推出，即 ZF 系统可以用外延、强替代、无穷、正规这四条公理来刻划；

定理 3　ZFC 系统可以用外延、强对偶、第一强概括、无穷、正规这五条公理来刻划；

定理 4　ZFC系统可作如下的加强：外延、对偶、联集、幂集、第二强概括、无穷、正规，这个加强后的系统具有全集与补运算，因此具有较好的对称性。

(2)周浩旋[16,17]就 Martin 公理(MA)与力迫法的关系，MA 与 $V=L$ 的关系，MA 的解释等方面，提出一些看法，并介绍 MA 的若干等价形式及他关于 MA 的推论的一些工作，阐述 MA 在组合集论、拓扑学、描述集论、代数、模型论等众多方面的应用。

(3)罗里波[18]证明了当 K 是强不可接近基数时，K 上的命题演算 $P(K)$ 遵守插入定理。这个结果连同 H. Friedman 的两个结果：①当 K 是共尾数为 ω 的强极限基数的后继基数时，$P(K)$ 遵守插入定理，②当 K 是共尾数大于 ω 的基数的后继基数时，$P(K)$ 不遵守插入定理，在 ZF+GCH 中完全解决了 Freidman 在 JSL 40(75)-2上所提出的 102 个数理逻辑问题中的第24题：当 K 为无穷正规基数时，$P(K)$ 是否满足插入定理？

6．证明论与构造数学　利用一阶谓词演算作定理的机器证明时，许多重要问题都能化成求证一类特殊的合适公式，称为 Horn 子句集的不可满足性。Henschen-Wos (JACM

21(74)-4)得出了正单项消解对 Horn 子句集的完备性。陆汝钤[19,20]改进了他们的结果，证明对 Horn 子句集来说，正单项消解和有序消解联用是完备的；引入了强有序输入消解原理，讨论了强有序输入消解与正单有序消解的相互关系，为实现计算机证明提供较为切实可行的途径。在[21]中，陆在新的语义映射的基础上解决包含负子句的 Horn 集的谓词逻辑的操作语义、模型语义和不动点语义三者间的等价性，并给出最小不动点的构造方法。

7．非标准模型　(1)黄乘规[22]在 Robinson《非标准分析》第二章的逻辑基础上构成了两相微积分学。所谓两相，第一相为标准数，它的分析模型称为第一相分析模型，记为M。将M扩大为某个非标准的分析模型，扩大后，其内和外理论综合在一起所成的模型记为$M(2)$，称为第二相分析模型。将M的句子或公式形式化后，翻译到$M(2)$中所得的$M(2)$的子模型，记作$*M$，称为第二相的内分析模型。$*M$是M的形式语句的另一解释。将$*M$中的0型个体所组成的集记为$*R$，称为第二相实数集。同样，以$*N$、$*Q$表示第二相的自然数集与有理数集。在两相积分理论中可以十分简单地给出 Dirac 函数的定义，解决 Dirac 函数乘积等问题，还可以给出求解奇异积分的一般原则和扩张求解的方法。这种方法将为统一奇异积分的理论与解决量子力学中与奇异积分有关的发散困难提供一个新的出发点。

(2)杨守廉等[23,24]在 Robinson, Zakon 的基础上对ω正规扩张超实数的序结构作了进一步的探讨，证明了：①超自然的序型表示式$\omega+(\omega^*+\omega)\theta$，其中$\theta=\theta^*$；②超实数集$^*R$的序型$\lambda'$与$^*R$中任一单子的序型$\mu$相同；③按序特征基数分类，$^*R$中的戴氏分割有且仅有$\omega+\omega_1$，$\omega_1+\omega$，$\omega_1+\omega_1$，$\omega_1+1+\omega_1$四种类型。

杨在[9]中引入ω_1的链基超滤，证明链基超滤的存在性，并用以推广[8]中绝大部分的结果。

（应制夷）

[1] 徐利治，朱梧槚，袁相碗，郑毓信，《数学研究与评论》，1(1981)151

[2] 莫绍揆，《华中工学院学报》，3(1979)8

[3] 沈有鼎，《数学学报》，24(1981)650

[4] 罗铸楷，《数学学报》，23(1980)152

[5] 王世强，《北京师范大学学报》，3,4(1980)25

[6] 王世强，卢景波，《科学通报》，26(1981)71

[7] 王世强，同上，26(1981)129

[8] 王世强，《数学学报》，25(1982)202

[9] 张锦文，《华中工学院学报》，3(1979)1

[10] 张锦文，同上，4(1979)10

[11] 张锦文，同上，1(1980)17

[12] 张锦文，《模糊数学》，1(1981)73

[13] 莫绍揆，叶大兴，《华中工学院学报》，4(1979)1

[14] 沈百英，同上，24(1981)717

[15] 莫绍揆，《数学年刊》，1(1980)309

[16] 周浩旋，《华中工学院学报》，3(1979)15

[17] 周浩旋，同上，4(1979)33

[18] 罗里波，《数学学报》，23(1980)177

[19] 陆汝钤，《中国科学》，7(1981)896

[20] 陆汝钤，同上，8(1981)1035

[21] 陆汝钤，《科学通报》，27(1982)67

[22] 黄乘规，《华中工学院学报》，4(1979)17

[23] 杨守廉，王德谋，王景鹤，同上，23(1980)658

[24] 杨守廉，同上，25(1982)114

数　　论

代数数论　两年来，柯召、孙琦继续研究一系列丢番图方程，他们证明了：

1．方程$x^3\pm1=Dy^2$及$x^3\pm1=3Dy^2$除了$x=\pm1$，$y=0$以外无其他整数解。用初等方法证明上述四个方程当$D>2$，D无平方因子且不能被3或形为$6k+1$的素数整除时无整数解。

2．方程$x^4-Dy^2=1$当$D\equiv7\pmod 8$，$D=pq$（p，q是素数）时在$p\equiv1\pmod 8$，

$q\equiv 7 \pmod 8$，$\left(\frac{q}{p}\right)=-1$ 或 $p\equiv 13 \pmod{24}$，$q\equiv 3 \pmod 8$，$\left(\frac{q}{p}\right)=-1$ 的条件下无整数解。这里$\left(\frac{q}{p}\right)$是勒让德符号。

戴宗铎、于坤瑞、冯绪宁研究不定方程 $x^{\frac{1}{n}}+y^{\frac{1}{n}}=z^{\frac{1}{n}}$的广义整数解：设$Z$表示整数环，$Z^+$是正整数集合，$Z^*=Z\setminus\{0\}$。对于 $a\in Z^+$，$a^{\frac{1}{n}}$ 表示 a 的 n 次算术根。若 $a,b,c\in Z^*$，且 $a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}=c^{\frac{1}{n}}$，则称$(a,\ b,\ c)$是上述方程的解。若存在三个复数 θ_1，θ_2，θ_3 分别满足 $x^n-a=0$，$x^n-b=0$，$x^n-c=0$，而且$\theta_1+\theta_2=\theta_3$成立，则称$(a,\ b,\ c)$是上述方程的广义整数解。他们讨论了一类 Kummer扩域的次数，并用这些性质讨论了 $(a,\ b,\ c)$ 是方程广义解的充要条件。

朱尧辰讨论了正规数的一些性质，并给出一类正规数的构造方法。他证明可以由一个已知正规数构造出新的正规数，从而可以得到一个正规数集。他还给出一个代数无关的无穷数集：设$\{a_n\}$是自然数的无穷数列，且$\frac{a_{n+1}}{a_n}\to\infty$，则缺项级数$f_k(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_{kn}z^{a_{kn}}$ $(k=1,\ 2,\ \cdots)$的收敛半径为1，其中系数 c_{kn} 为正有理数。c_{k1}，c_{k2}，$\cdots$，c_{kn} 的最小公分母 d_{kn} 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} d_{kn}=o(a_{kn})$，$k=1,\ 2,\cdots$。若整数 $q>1$，则 $\xi_k=f_k(q^{-1})$ $(k=1,\ 2,\ \cdots)$必代数无关。这是施密特结果的一般化。

陆洪文研究实二次域的类数，给出实二次域类数等于1的一个充要条件：对于素数 $p=4n^2+1(n>1)$来说，域 $K=Q(\sqrt{p})$ 的类数等于1的充要条件为 $\zeta_k(-1)=\frac{1}{90}n\ (2n^2-7)$，其中 $\zeta_k(s)$是域K上的ζ函数。

裴定一、冯克勤研究了分圆单位系的独立性。对于大于5的整数 m，$\zeta_m=e^{2\pi i/m}$，R是有理数域，则由狄利克雷单位定理可知 $\varphi(m)$ 次分圆域 $R(\zeta_m)$ 的独立单位的最大个数是$r=\frac{\varphi(m)}{2}-1$。当 m 有多于1个不同的素因子时，$\{1-e^{2\pi ih/m}$，$(h,\ m)=1$，$2\leqslant h<m/2\}$ 都是 $R(\zeta_m)$ 的单位，称为分圆单位系，但不一定是独立的单位系。他们给出这个单位系是独立的充要条件，并由此推出对于几乎所有的m 来说，上面给出的单位系都不是独立的。

解析数论　我们将能表为两个素数之和的偶数称为哥德巴赫数。哥德巴赫猜想即每一个大于4的偶数都是哥德巴赫数。若以 $E(x)$表示小于或等于x且可能不是哥德巴赫数的偶数个数，我们称 $E(x)$为哥德巴赫数的例外集。Montgomery、Vaughan 曾经得到$E(x)=O(x^{1-\delta})$。陈景润、潘承洞证明了 $\delta\geqslant 0.01$。

王元研究了在零点密度假设下哥德巴赫数的上界估计：设以 $N(\alpha,\ T)$ 表示ζ函数在区域 $1>\mathrm{Re}\ s>\alpha$，$|\mathrm{Im}\ s|\leqslant T$ 时的零点个数。他证明了：如果 $N(\alpha,T)\ll T^{2(1-\alpha)}\log T$ $(\frac{1}{2}\leqslant\alpha\leqslant 1,\ T\geqslant 2)$ 成立，则当取$A=(\log x)^c$，$c=\frac{148}{13}+\varepsilon$，其中 ε是任意小的正数时，区间$[x,\ x+A]$中一定有哥德巴赫数。潘承洞应用 Selberg不等式给出一个简化证明，但是没有算出 c 的数值。曹惠中用潘承洞的方法算出的 c 比王元的结果略好。潘承洞还在假设

$N(\alpha,T)\ll T^{c_1(1-\alpha)}\log^{c_2}T$, $N(\alpha,T)\ll T^{(2-c_3)(1-\alpha)}\log^{c_4}T$($\alpha_0\leqslant\alpha<1$, $T>2$, $c_3>0$, $c_4>0$, $\frac{1}{2}<\alpha_0<1$)成立时证明了

$$A\ll x^{(1-1/c_1)(1-2/c_1)}\log^{c_5}x\quad(c_1>0,c_5>0)。$$

对于短区间中哥德巴赫数的例外集，楼世拓、姚琦得到：当$\alpha\geqslant3/4$，$Y=X^{\alpha}$时区间$[X, X+Y]$中哥德巴赫数的例外集可以估计为$O(Y^{1-\delta})$，这里δ是某个正常数。姚琦进一步证明了对于$\alpha>7/12$，上述结果也成立。

陈景润研究了等差级数$\{l+aq, a=1, 2,\cdots, (l, q)=1\}$中最小素数问题：当$q$充分大时，$c$取何值可以使该级数中不超过$q^c$的项中一定存在素数？陈景润得到$c\geqslant17$时结论成立。

用$d_3(n)$表示将n表为三个因子乘积的表法数，于是$\sum\limits_{n\leqslant x}d_3(n)=xP_3(\log x)+\Delta_3(x)$，其中$P_3(\log x)$表示$\log x$的一个二次多项式。研究$\Delta_3(x)$的估计式即为"三维除数问题"。尹文霖、李中夫得到$\Delta_3(x)=O(x^{127/282})$。这个结果改进了尹文霖在1964年得到的$\Delta_3(x)=O(x^{34/75})$。

邵品琮研究了一系列数论函数。他给出除数函数$d(n)$分布的一个性质：对于正整数K，n_0，m及$M>1$，一定存在自然数$n>n_0$，使

$$\log^{(m)}d(n)>M\prod_{\nu=1}^{K}d(n+\nu)d(n-\nu)$$

成立，式中$\log^{(r)}x=\log\log^{(r-1)}x$，$\log^{(0)}x=x$。若满足上述不等式的$n$个数为$N_1(x)$，则

$$N_1(x)>c_1\frac{x}{\log^{2k+1}x}.$$

他还指出，某些其他数论函数也有类似性质。

陆鸣皋、单墫研究了一个Waring-哥德巴赫问题，得到：1. 对任何正整数k，几乎所有的偶数n都能表成$n=p_1^2+p_2^3+p_3^5+p_4^k$，其中$p_i$ $(1\leqslant i\leqslant4)$是素数。2. 除了$k\equiv0$ (mod2)或$k\equiv0$ (mod3)的正整数k以外，几乎所有的偶数n都能表成$n=p_1^2+p_2^3+p_3^6+p_4^k$，其中$p_i(1\leqslant i\leqslant4)$是素数。单墫还证明了：若$s\geqslant6$，则对正整数$k$，几乎所有的正整数可以表成$x_1^2+x_2^4+\cdots+x_s^{2^s}+x_{s+1}^{2^s}+x_{s+2}^k$的形状，其中$x_1,\cdots,x_{s+2}$为非负整数。

陆鸣皋讨论了一个有关三角多项式的不等式：设N为正整数；$a_{M+1},\cdots,a_{M+N}$是任意N个复数；$S(x)=\sum\limits_{n=M+1}^{M+N}a_ne(nx)$，其中$e(t)=e^{2\pi it}$；$x_1,\cdots,x_R$是$R$个实数，对$r\neq s$，$\|x_r-x_s\|\geqslant\delta$。这里$\|\theta\|$表示$\theta$到最近整数的距离，$0<\delta<\frac{1}{2}$。他证明：如果$N_\delta\leqslant\frac{1}{4}$，则$\sum\limits_{r=1}^{R}|S(x_r)|^2<\delta^{-1}(1+22N^3\delta^3)\sum\limits_{n=M+1}^{M+N}|a_n|^2$。

戚鸣皋研究了等差级数中素数的差距。设l和R是互素的正整数，R是偶数。若以p_i记等差级数$l+\nu R$, $\nu=0, 1, 2,\cdots$中第i个素数，$E_r=\lim\limits_{j\to\infty}\inf\dfrac{p_{j+r}-p_j}{\varphi(R)\log p_j}$，这里$\varphi(R)$是欧拉函数，他得到：当$\theta_r$是方程$\theta_r+\sin\theta_r=\dfrac{\pi}{4r}$的解时，对于任意正整数$r$，有$E_r\leqslant\dfrac{2r-1}{16}$

$\cdot \left\{ 4r+(4r-1)\dfrac{\theta_r}{\sin\theta_r} \right\}$。

丢番图逼近 王元对于丢番图逼近理论的研究得到一系列的成果。他发表的《丢番图近似与近似分析》一文，给出在某些条件之下多重积分近似计算中误差的上界估计。

王元、于坤瑞还研究了丢番图逼近中的若干测度定理。对于 n 维欧氏空间的点集 A，若 $(x_1,\cdots,x_n)\in A$，必有 $(x_1',\cdots,x_n')\in A$ 满足 $0\leqslant x'_i\leqslant x_i(1\leqslant i\leqslant n)$，则称 A 为具有性质 $\mathscr{P}$。用 $|A|$ 表示 A 的测度，G_n 表示 n 维单位体，A_q 是 G_n 可测集列。若每一个 A_q 都具有性质 $\mathscr{P}$，且 $\psi(q)=|A_q|$ 是 q 的增加函数，用 $N(h,\ Q_1,\cdots,\ Q_n)$ 表示满足 $1\leqslant q\leqslant h$，$(\{qQ_1\},\cdots,\ \{qQ_n\})\in A_q$ 的整数集，并设 $\psi(h)=\sum\limits_{q=1}^{h}\psi(q)$，$\Omega(h)=\sum\limits_{q=1}^{h}\psi(q)q^{-1}$，则对几乎一切 $(Q_1,\cdots,\ Q_n)\in R_n$ 有

$$N(h,\ Q_1,\cdots,\ Q_n)=\psi(h)=O(\psi^{1/2}(h)\Omega^{1/2}(h)\ (\log\psi(h))^{2+\varepsilon})。$$

其他 王元、方开泰研究了数论的一些应用。他们将"一致分布"用于讨论试验设计。在 s 个因素、q 个水平的试验设计中，他们证明应用一致分布方法取 q 个点有时是比较方便的。

徐广善讨论一类 G 函数线性型的下界估计。他考虑 G 函数：$f(z)=\sum\limits_{i=0}^{\infty}a_iz^i$，$a_i\in K$，$|a_i|<c^i$，且存在 $q_n(n=1,\ 2,\cdots)$ 使得 $q_na_i\in K^*$。这里 K^* 是 K 上的代数整环，且有 $q_n<Q^n$，c，Q 都是实数。将这类 G 函数记为 $G(K,\ c,\ Q)$。设一组 G 函数适合某种准对角型微分方程，他建立这类 G 函数线性型的下界估计，并给出在超几何级数和椭圆积分中的一些应用。

潘承洞、潘承彪所著《哥德巴赫猜想》一书，把有关哥德巴赫猜想的最重要的研究成果，特别是研究这一问题的最重要的方法，作了系统的介绍，以供研究解析数论的数学工作者参考。

（楼世拓）

代 数 学

三十多年以来，抽象代数学的一些形成较久的分支(如群论、环论、域论、模论、格论等)和边缘学科(如代数数论、代数几何、李群等)继续蓬勃发展，得到了许多重要成果。同调代数、范畴论等新分支相继兴起。以代数学为主要基础之一的离散数学兴旺发达。抽象代数学的公理化方法和重要概念不但继续渗透到数学其他领域中，而且在现代科学和工程技术(特别是计算机科学)中的作用也日益明显。线性代数及其计算方法已成为科学技术人员的必备知识和工具。群论的应用更加广泛。近年出现了用计算机程序研究群论和数论的方法。也不断出现象自动机的代数理论、代数语言学、代数语义学、代数编码学、系统学的代数理论等新的应用学科。

全国第一届代数学学术交流会议于 1982 年 4 月 13 ～ 17 日在南京大学举行。与会的代数工作者有一百多人。会议上进行了大会综合报告 11 个，并在小组宣读论文一百多篇。共分六个小组：有限群与一般群，典型群、代数群、李群和李代数，代数数论与二次型，环论(一)，环论(二)，矩阵与应用。宣读的论文中约有三分之一出自 1978 年以后新培养的研究生。论文涉及范围，不但有我国原来基础较好的一些方向(如典型群)，而且有我国

过去薄弱或空白的一些方向和新的应用方向（如代数语言学）。至于有的方向（如代数几何），则目前尚在培养人才的阶段。

近年来国际数学界中最突出的成就之一，就是有限单群分类问题的解决。段学复在南京会议上作了这方面的综合报告。经过三十多年许多群论学家的努力，这个问题终于在1981年彻底解决了。得到的结果是，有限单群分为四大类：（1）素数 p 阶循环群 Z_p，（2）$n\geqslant 5$ 个文字的交错群 A_n，（3）李型单群，16个无穷族，（4）26个零散单群。单群完全分类问题的工作中使用了各种方法，如模指标方法（R. Brauer 等），p 局部分析法（J. Thompson 等），几何方法（B. Fischer 等），以及合并后两者而发展起来的方法（M. Aschbacher 等）。有关论文的篇幅多达数千页，检查、整理和化简的工作尚在进行中。有限单群分类问题的解决有很大影响：例如 Schreier 猜想"有限单群的外自同构群都是可解群"，O. Ore 猜想"非交换单群的元素都是换位子"等，现在都可一一验证。又可证明除 S_n 和 A_n 外不存在 $k\geqslant 6$ 重传递群，可确定所有的二重传递群、素数 p 个文字的置换群等。

下面我们以在南京会议上宣读的论文为基础，参考后来发表或投稿情况，加上其他一些近年发表的论文，就代数学中一些分支、方向概述国内的研究进展。

有限群　根据子群的性质来研究原群的性质的工作者，有陈重穆、李世荣等。设已给群论性质 Σ，简称具有 Σ 性质的群为 Σ 群，陈重穆把每一个真子群都是 Σ 群的非 Σ 群称为内 Σ 群，也就是一个极小非 Σ 群。当 Σ 为交换、幂零、p 可分解、p 幂零时，已有 Miller–Moreno, Шмидт, Чунихин 等人的经典工作。内超可解群的分类，亦已为 Нагребeцкий 得到。陈重穆较系统地讨论了内 Σ 群，先给出一些一般原理，然后研究了 Σ 为 π_Ω 序可解（即有 Sylow 塔）、交换、可解、超可解等情况。特别是，他得到有限内 π_Ω 序可解群就是内幂零群。进一步他又引进了外 Σ 群（即每真商群是 Σ 群的非 Σ 群），并应用内、外 Σ 群来研究超可解群的各种充分条件。

李世荣对满足后两条件之一的有限群进行了分类，即设每个非极大偶阶真子群是2闭的（指有正规 2 Sylow 子群），或 $2'$ 闭的（指有正规2补）。

关于（有限）超可解群，张远达和樊恽从 Baer 的一个引理出发，系统地整理超可解群理论。他们在重新证明 Baer 定理的过程中，介绍了 Baer 引理，继而引出 p 超可解群与 p 幂零群的重要联系，然后用来处理（p）超可解群的经典定理（如 Huppert 指数定理）。他们也用这方法重新证明了：两个正规超可解子群 A, B 之积 AB 为超可解的充要条件是 $[A, B]$ 为幂零群。陈重穆与李炯生对几个关于超可解群的定理给了新的证明或作了一些推广。

p 群方面，徐明曜和杨燕昌做了一系列的工作。为了研究较一般的 p 群的幂结构及其与换位子结构的联系，引进了比正则性更广泛的（强）半 p 交换性，也引进了由正则 p 群的上 Ω 下 $\mho$ 序列导出的正则幂结构，得到了正则性的又一个充要条件和（强）半 p 交换性或具有正则幂结构的条件，并给出了一些应用。徐明曜还证明了半2交换必为强半2交换，决定了具有正则幂结构的二元生成的2群。俞曙霞对交换 p 群的自同构群进行了研究。

利用 R. Brauer 以模指标研究阶含某素数 p 恰一次的群尤其单群问题的方法，刘力前证明了阶的形式为 $p(2+ap+bp^2)$ 的单群当 a, b 满足一些条件且 p 足够大时，只能是四种 $L_2(q)$ 型单群之一，从而推广了洪加威的工作。他还研究了阶为 $2^n\cdot p\cdot q\cdot r$ 的单群（其中 $p<q<r$ 均为奇素数），根据 J. Thompson 的 $3'$ 单群定理可取 p 为3，并证明了阶为 $2^n\cdot 3\cdot q\cdot r$ 的单群只可能是 $L_2(p)$ 或 $L_2(2^n)$ 的某些类型（q, r 满足某些条件），从而推广了 R. Brauer

和段学复的早期工作。对于 O. Ore 关于非交换单群的猜想，曾肯成、徐诚浩、李炯生过去已证明它对 A_n，$L_2(q)$，$S_z(q)$，Mathieu 群皆真，最近李炯生又证明对 J_1 亦真。

关于群的扩张理论，张远达曾对 Baer 早年的一个结果给予完全形式而得“群 N 是完全群当且仅当 N 的所有正规扩张都是直积扩张”，这与模论中内射模的概念相似。樊恽受此启发，在群论中引入一系列与内射模性质有关的概念和结论，进而在只考虑正规子群的情况下，引入群的内射性质和超完全群的概念，并证明了“超完全群就是非交换单群的直积的自同构群”。

关于群中的加法理论，吴英辅在 1980 年证明了(p,p)型初等交换群的一个加法定理，解决了 H. Mann和 J. Olson 的一个猜测，即 $c(Z_p\oplus Z_p)=2p-2$，$p>3$。

关于置换群方面的工作，王萼芳应用构造的方法，重新得到了 E. Betram 关于任一偶置换都可表成两个 l 轮换之积的条件和相应地任一奇置换都可表成一个 l 轮换与一个 $l+1$ 轮换之积的条件，并给出了当 l 满足条件时，具体表出的方法，然后进一步考虑把一个偶置换表成两个同型置换之积的问题，得到了这种表示存在的条件及表示的方法。

李慧陵证明了：$6q+1$（q 素数）次的二重传递群必为双本原的，或Sharply 双传递的，或是一个 $\lambda=1$ 的区组设计的自同构群。

唐守文在其研究生论文中，不使用电子计算机，确定了 21～27 次本原置换群。最近查得苏联数学家 B. A. Pogorelev 在 1980 年已确定了 21～50 次本原置换群。

利用电子计算机程序进行有限群尤其置换群的研究，已有王萼芳、姜豪、丘维声、刘声烈、杨秀国等的工作。

无限群　刘绍学对 L. Fuchs 在 *Partially Ordered Algebraic Systems* (1963) 中提出的两个问题，即给出群可为有向群的充要条件和群的每一个偏序都可延续成有向序的条件进行研究，修改对全序群已有的结果的条件，而得到一般的解答。

罗里波研究了三种自由群方程。对非蜕化的一元方程，证明它没有变数解，并对 $AxBx^{-1}=1$ 的短解的消去式作了详细的讨论。对方程 $PxQyPx^{-1}Qy^{-1}=1$，证明了它的有解性是有限可判定的，它的全部解可以归入有限个递归解集合。对以上方程有变数解的条件和变数解的形式，也给出较为完整的结果。他还进行了自由群中无限生成元直和项消去条件的探讨。

张英伯以环论为工具讨论了有最小型元素的二秩无扭群的结构和不变量及其成齐次与可分解的条件。

典型群、代数群、李群和李代数　典型群方面，万哲先和任宏硕证明了，当体 K的特征为零时，$PGL_2(K)$和 $PSL_2^{\pm}(K)$ 的自同构也是标准形状的，从而解决了 $PGL_2(K)$ 和 $PSL_2^{\pm}(K)$在所有情况下的自同构。任宏硕证明了，如果$K\ni i$ 或 $K\ni\sqrt{2}$和$\sqrt{3}$，体 K 上 $SL_2(K)$的自同构是标准形状的。李尊贤证明了正交群 $\Omega_3(V)$（其中 V 定向）的任一自同构皆具有标准形状；确定 $\Omega_3(V)$和$\Omega_4(V)$（V定向）的自同构是 1979 年代数群抽象同态会议上提出的公开问题之一。李福安证明了射影正交群 $P\Omega_6(V)$的自同构都是标准形状的，并给出 Aut $P\Omega_n(V)\simeq P\Gamma O_n(V)(n\geqslant 5,\ n\neq 8)$的统一证明。王仰贤研究了域 F 上由正则矩阵 G 定义的正交群 O_n（F, G）中各元素表成对称乘积的最短长度问题，并给出了完整的解答（除去 $F=\mathbb{F}_2$，$n=4$，G 的 Witt 指数 $\nu=2$ 这一例外情形）。

关于环上的典型群，张海权、王路群、王仁发、游宏、曹重光、张永正、周放、李莉

和唐向浦、林宗柱、安建培等研究了局部环、半局部环以及Φ满射环上线性群和辛群的生成元、正规子群、自同构和同构等问题。在R的一定条件下，王仁发和游宏解决了辛群$Sp_{2n}(R)$的正规子群问题，林宗柱将O'Meara的剩余空间方法推广到局部环上线性群上来，讨论了局部环上线性群的自同构，当维数$\geqslant 5$时，得到了完满的结果。他的论文中用到了周放、李莉在她们关于局部环上线性群的生成元的研究中引进的剩余数的概念。

万哲先和杨劲根，武小龙，吕庆祝，刘云英、张益敏和曹锡皞分别研究了四元整数环上、高斯整数环上、$Z[\sqrt{-3}]$和$Z[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}]$上二维线性群的自同构、生成元和定义关系，得到了完整的结果。

万哲先和武小龙证明了$PGL_2(Z)'/PGL_2(Z)''$是(3,3)型Abel群，而$PGL_2(Z)''$是4个元素生成的自由群。

王路群证明了，对任一强右Ore环R(即对任意$a, b\in R$，均有$c\in R$使$ab=bc$成立的环)上$GL_n(R)$ ($n\geqslant 3$) 的正规子群问题均有肯定回答，并给出了一般环R上$GL_n(R)$ ($n\geqslant 4$)的正规子群问题有肯定回答的充要条件，即R是强右Ore环。

李尚志与查建国系统地讨论了有限域上典型李型单群(即单典型群)的极大子群问题，先后定出了$PSU(n, q)$，$PS_p(2n, q)$，$PSL(n, q)$和$P\Omega(n, q)$中含根子群的所有极大子群(只有极个别遗留问题待扫尾)，这是针对O'Nan在有限群会议上提出的公开问题的工作。李尚志还证明了李型单群的结构由它的子群格唯一确定，从而导致了本世纪三十年代Baer猜想的获证。查建国通过李型单群得出了一大类可解完全群。

继续万哲先等过去应用典型群来构作区组设计的系统研究，王仰贤利用长方阵、交错矩阵和埃尔米特矩阵构作了几个多个结合类的结合方案，沈灏利用有限域上辛几何、酉几何和正交几何中的二维全迷向子空间，构作了多个结合类的结合方案和PBIB设计。魏宏增利用有限域上酉几何中的非迷向线，构作了多个结合类的结合方案和PBIB设计。他们均算出了它们的参数。

关于代数群的表示理论，王建磐利用G/B上的层上同调证明了在适当大的p下，对特征p的代数闭域K上的单连通半单代数群，任意两个Weyl模的张量积都有Weyl模滤过。他还用诱导模的工具，对内射$\underline{b}_n$模作了一个较完整的描述。叶家琛对$SL(3, p^n)$的嘉当不变量给出了一个计算方法，并且具体地算出了$SL(3, 9)$的嘉当矩阵。陈承东运用另一种方法也算出了$SL(3, 9)$的嘉当矩阵，他还利用Deligne-Lustzig的特征标公式计算了$SL(4, q)$的特征标。潘介正作出了$SL(2, p)$的所有绝对不可分解模表示。肖麟证明了，对于特征$p>0$的代数闭域K上的单连通半单代数群G，$\underline{u}_n$为它的超代数，$Q(n, \lambda)$是对应于$\lambda(\in X_n)$的主不可分解$\underline{u}_n$模，$I(\lambda)$是G的不可约模$M(\lambda)$的内射包，如果$Q(1, \lambda)$都有相容的G结构，则$I(\lambda)=\varinjlim(Q(n, \lambda))$。英国数学家S. Donkin也得到相同的结果。

陈志杰把概齐次空间的概念推广到特征p的代数闭域上的概齐次空间，计算了相关联的ζ函数的函数方程中的常数，对分类作出了贡献。

在李群李代数方面，严志达与张大干利用实半单李代数的Satake图，由表示的最高权直接得到一个对实半单李代数的实不可约表示进行分类的新方法，较已往的方法更为简便确切。张大干还计算了典型实李代数的容许素根系。

陈仲沪证明了，由复单李代数的对合内自同构和域的共轭也能构造出某些已知李型单群。

兰以中研究了特征 0 的代数闭域上的、仅具有一个非平凡的特征理想的李代数 R，并刻划了 R 的结构的三种类型。

沈光宇对特征 p 的单李代数的结构进行了系统的研究，给出新的一类单李代数。他又对非经典李代数 $K(m, \underline{n})$ 分别就 $p\geqslant 3$, $m+3\not\equiv 0 \pmod p$ 和 $m+3\equiv 0 \pmod p$ 两种情形进行讨论，得到它们的两个不变子代数滤过，并且分别证明 $K(m, \underline{n})\cong K(m, \underline{n}')$ 或 $K(m, \underline{n})'\simeq K(m, \underline{n}')'$的充要条件。费青云利用 $K(m, \underline{n})$的不变子代数滤过，给出了李代数 $K(m)$, $K(m, \underline{n})$, $H(m)$,$H(m-1,n')$的齐次自同构形式。

代数数论　代数数论方面的研究比较集中在类数和单位，它们是代数数论最基本但又非常困难的问题。冯克勤推广了关于二次域 $K=Q(\sqrt{p})$，素数 $p\equiv 1 \pmod 4$ 的类数 $h=h_K$ 的 Ankeny-Artin-Chowla 公式 $h\cdot\frac{v}{u}\equiv B_{\frac{p-1}{2}} \pmod p$，其中 $\varepsilon=u+v\sqrt{p}$ 为 K 的基本单位，$B_{\frac{p-1}{2}}$ 为伯努利数。冯考虑 $p\equiv 1 \pmod 3$的素数 p 和 $Q(\zeta_p)(\zeta_p=e^{2\pi i/p})$的三次子域 K，得到公式

$$h_K\cdot c\equiv B_{e'}\cdot B_{2e'} \pmod p,$$

其中 $e'=\frac{p-1}{3}$，$B_{e'}$，$B_{2e'}$为伯努利数，并得到 h_K 的一个上界

$$h_K<\frac{4}{21}p(\log(p+0.7)/\log\frac{p-3}{3})^2,$$

特别是

$$h_K<p。$$

应用这个不等式，只要算出 c，从上面公式即可决定类数 h_K。冯猜想 $c\not\equiv 0 \pmod p$。

冯还改进了分圆域类数第一因子 h^- 的上界。对分圆域 $Q(\zeta_p)$（p 素数）的类数第一因子 h^-，Kummer 猜想 $p\to\infty$时，$h_p^-\sim 2p(p/4\pi^2)^{\frac{p-1}{4}}$。冯得到目前最好的上界 $h_p^-\leqslant 2p\cdot\left(\frac{p-1}{32}\right)^{\frac{p-1}{4}}$。

冯还对有理数域上循环域类数的奇偶性给出一个初等判定，并利用它证明了在分圆域 $Q(\zeta_{pl})$ ($p<1000$, l 奇，$3\leqslant l\leqslant 19$)的循环子域中恰有17个具有偶类数。

赵春来给出了计算有理数域Q 上五次循环域的基本单位的一个方法。

张良成在他的研究生论文中把 Kubota 关于决定 $Q(\sqrt{m_1},\cdots,\sqrt{m_r})$的单位群的归纳原理推广到 $K=Q(\sqrt[3]{m_1},\cdots,\sqrt[3]{m_r})$。张还证明了纯三次域 $K=Q(\sqrt[3]{m})$的单位是均匀的，即 K 的基本单位 $\varepsilon=a_0+a_1\sqrt[3]{m}+a_2\sqrt[3]{m^2}$ 满足

$$\left|a_i\sqrt[3]{m^i}-\frac{\varepsilon}{3}\right|\leqslant\frac{2}{3}\varepsilon^{-\frac{1}{2}},$$

从而给出了计算基本单位的一个方法。

冯克勤和张贤科给出了 Q 上四次循环域的相对整基的存在条件。

陆洪文给出有理数域上实二次域的类数为 1 的一个必要条件。

丁石孙对数域K上有限扩张L/K是否为伽罗瓦扩张给出判定，即若 K 的素理想集合(其中素理想在 L 中有一个相对次数 1 的素因子)几乎全在 L 中分裂，则 L/K 为伽罗瓦扩张。其次，丁还得到：设 $L=K(\theta)$，θ 为代数整数，θ 的极小多项式为$f(x)$，则 L/K 为伽罗瓦扩

张的充要条件是对 K 的每个素理想 g，$f(x)$ 在剩余类域 O_K/g中或者完全分解或者没有根。特别是当 $K=Q$ 时，L/Q 为伽罗瓦扩张的充要条件是对所有素数 p 在素域 F_p 中 $(f(x), x^{p-1}-1)=1$ 或 $f(x)\mid x^{p-1}-1$。最后由不可约整系数多项式 $f(x)$ 所定义的 $L=K(\theta)$ 是否是伽罗瓦扩张，是可以判定的(根据 Ax 的一个结果)。

冯绪宁构造出一个权为$\frac{1}{2}$的希尔伯特模型式，它是 $\eta(z)$ 函数的一个类似。

域论　域的赋值理论的研究集中在 Hensel 赋值域。陈炳辉和漆芝南合作得到一系列结果。主要结果是：

设 L/K 正规且 $L\neq\tilde{L}$($\tilde{L}$表示L的代数闭包)或者 L/K 为代数扩张，$L\neq\tilde{L}$ 且$[L:K]_s<\infty$。若 L 的 Hensel 赋值环 B 为第一类的，则 $A=B\cap K$ 也是第一类 Hensel 赋值环。

其次，假设 L/K 如上。若 B 为有限阶离散 Hensel 赋值，则 $A=B\cap K$ 也是有限阶离散 Hensel 赋值。若 L 的第二类 Hensel 赋值环所成的集 H_2 非空，$B_2=\bigcup_{B\in H_2} B$，则 $B_2\cap K$ 是 K 的 Hensel 赋值环。

陈炳辉和漆芝南对域 K 的赋值环 A 的单位群 U_A 作了刻划。

他们在另两篇文章中讨论了完整子半群和 ε 子群。

陈炳辉对全 pre-hensel 赋值作了研究。如果域 K 的赋值环 A 在 K 的可分闭包中或只有唯一的拓展或只有相依的拓展，则 A 叫做全 pre-hensel 赋值环。陈将 Hensel 赋值环的若干结果推广到全 pre-hensel 赋值环。

陈炳辉还对拓扑 Hensel 赋值环作了研究。由域 K 的一个非平凡赋值环 A 确定的拓扑 T_A 叫做赋值拓扑。如果域 K 的一个赋值拓扑 T_A 在 K 的可分闭包 $\tilde{K}$ 内只存在一个唯一的赋值拓扑 T_B(并不意味着 B 唯一)，使得 T_B 限制在 K 上与 T_A 一致，则称(K, A)是一个拓扑 Hensel 赋值域。Hensel 赋值域和拓扑 Hensel 赋值域在一阶的情形一致，但在高阶的情形则不同。陈给出了一个域的赋值拓扑在 K 的代数扩张中拓展（这种拓展仅限于赋值拓扑拓展)的个数的刻划。最后给出 A 为 Hensel 赋值环或拓扑 Hensel 的或 pre-hensel 的充要条件以及 A 为半 Hensel 赋值环或半拓扑 Hensel 赋值环的条件。

戴执中、陈炳辉、漆芝南共同合作研究了半 Hensel 赋值环。

戴执中证明了有序域(K, P)成为实闭域的充要条件是(K, P)具有 Sturm 性质即Sturm 定理在 K 上成立。

戴执中还研究了一个域的序与赋值和位相容性的问题。

聂灵沼讨论了一阶非分歧完全离散赋值域在特征不相等时的情形。设 K 为这样一个域，$\bar{K}$为剩余类域，$\mathrm{Ch}(K)=0$, $\mathrm{Ch}(\bar{K})=p$。设 M 为 $\bar{K}$ 关于 $\bar{K}^p$ 的一个 p 基。已知 K 中存在 $\bar{K}$ 关于M 的一个正则代表系$\{\psi(a)\mid a\in\bar{K}\}$。聂得到的结果有：

K 的任一个一阶完全离散赋值域的环同态 ρ 是连续的。设 ρ 在 $\bar{K}$ 上的诱导同态为 $\bar{\rho}$，并规定 $\phi(\bar{\rho}(x))=\rho(\psi(x))$, $x\in\bar{K}$，则 $\{\phi(a')\mid a'\in\bar{\rho}(\bar{K})\}$是 $\bar{\rho}(\bar{K})$在 $\rho(K)$ 内关于 $\bar{\rho}(M)$ 的一个正则代表系。反之，$\bar{K}$ 的每个自同态 $\bar{\rho}$ 决定 K 的一组自同态，它们和 $\rho(M)$在 K 内的代表系的取法成一一对应。当 $\bar{K}=\bar{K}^p$ 时，$\mathrm{Aut}(K)\cong\mathrm{Aut}(\bar{K})$。

设 $\bar{\Omega}$ 为 $\bar{K}$ 的可分闭包，Ω 为以 $\bar{\Omega}$ 为剩余类域的非分歧完全离散赋值域。设 σ 为 K 的一个自同态，使得 σ 诱导出 $\bar{K}$ 的自同态 $\bar{\sigma}: a\longmapsto a^p, a\in\bar{K}$。令 $\psi'(\bar{\sigma}(a))=\sigma(\psi(a)), a\in\bar{K}$。于是 σ 可以唯一地开拓成 Ω 的一个自同态：

$$\Sigma\psi(x_i)p^i\longrightarrow\Sigma\psi'(x^p{}_i)p^i,\ x_i\in\bar{\Omega}。$$

这是推广了的 Frobenius 置换，仍记作 σ。

记 $\mathscr{P}(X)=\sigma(X)-X$，$\mathscr{O}_K$ 和 $\mathscr{O}_\Omega$ 分别表示 K 和 Ω 的赋值环。利用方程

$$\mathscr{P}(X)-c=0,\ c\in\mathscr{O}_K$$

和

$$\mathscr{P}(X)-c\equiv 0\pmod{p^e\mathscr{O}_\Omega},\ e\geqslant 1,$$

可以直接建立 Schreier-Artin-Witt 关于 p 循环扩张的理论而不必借助 $\bar{K}$ 的完全化 $\bar{L}$。

二次型　戴宗铎、林节玄和彭家贵合作研究了代数中和拓扑中的阶(level)。一个交换环 A 的阶 $s(A)$ 是指这样一个最小自然数 s，它使得在 A 中 -1 可以表成 s 个平方和。(如果在 A 中 -1 不能写成平方和，则说 $s(A)=\infty$。) 一个突出的结果是 Pfister 得到的，若 A 为一个域，则 $s(A)$(若有限)是 2 的方幂，而且 2 的所有方幂都是可能的。Kuebusch 和 Baeza 把它推广到半局部环。戴宗铎他们对任意整环得到如下的结果。

对每个整数 $n\geqslant 1$，存在一个 $s(A)=n$ 的整环 A，而且 A 还可以如此选择，使得 A 的商域有任意指定的阶 $2^r\leqslant n$。

上述定理是代数性质的，但它的证明却是纯拓扑的。

戴宗铎研究了特征 2 的域上亏数 $\neq 0$ 的二次型，给出了特征 2 的域上亏数 $\neq 0$ 的二次型的 Witt 消去定理及其等价形式可迁性定理和扩充定理。

朱福祖推广了 L. J. Gerstein 关于偶埃尔米特型的结果。设 D_m 表示 $Q(\sqrt{-m})$ $(m>0)$ 的整数环，$h_n(x)=\Sigma a_{\alpha\beta}x_\alpha\bar{x}_\beta$，$\bar{a}_{\alpha\beta}=a_{\beta\alpha}$，$a_{\alpha\beta}\in D_m$，$\alpha,\beta=1,\cdots,n$。朱得到的结果是：

1) 若 $m\equiv 2\pmod 4$，Δ_n 为奇有理整数 >0，则存在 D_m 上判别式为 Δ_n 的正定偶型 $h_n(x)$ 的充要条件是 $n\equiv 0\pmod 2$；

2) 若 $m\equiv 1\pmod 4$，$\Delta_n\equiv 1\pmod 4$，$\Delta_n>0$，则存在 D_m 上判别式为 Δ_n 的正定偶型 $h_n(x)$ 的充要条件是 $n\equiv 0\pmod 4$。

朱的结果的充分性部分和 Gerstein 的结果基本相同，只在必要性部分取消了 Gerstein 附加的条件即 D_m 为主理想环。

朱还得到了与不定偶埃尔米特型相类似的性质。

(段 学 复 等)
(中国数学会全国第一届代数学
学术交流会议筹备与领导小组)

函 数 逼 近 论

函数逼近论是近代数学的一个重要分支，它不仅与代数、泛函分析、计算数学、微分方程、概率统计等其他数学分支密切相关，而且也是解决许多应用科学所提出的问题的有效工具。倘若要追溯其发展史，那末可以说早在十八世纪就有了它的萌芽。当时在制图、测地、应用力学以及方程求解等方面的研究中，已经提出了一些具体函数的最佳逼近问题，不过那时尚未有一般的理论。十九世纪中叶，俄国的 П. Л. Чебышев 在当时的实际需要的推动下，继承前人的工作，创立了函数的最佳逼近的理论，从而产生了函数逼近论这个新的数学分支。在此后相当长的一个时期内，函数逼近论的主要研究课题是用代数多项式或

三角多项式对连续函数的最佳逼近，而用有理函数或其他函数类来实现最佳逼近，乃是后来由于实际需要才发展起来的。函数逼近论这个分支虽然已有一百多年的历史，然而其蓬勃发展还是本世纪中叶的事。原来研究的最佳逼近阶与函数的构造性之间的关系，即所谓Jackson型定理与Бернштейн型定理，已经发展为各种逼近工具所能实现的逼近阶与函数构造性之间的关系，而算子逼近及其饱和理论，抽象空间的逼近及其与最优化之间的关系，也已成为研究的重要方面。目前国际上从事函数逼近论研究的学者很多，几乎每年都有这方面的国际性会议，成果也很丰富。新问题、新方法不断出现，而且常常来自应用数学的启示。我国的函数逼近论研究是五十年代初由陈建功教授开始的，他在我国成果丰富的三角级数论研究的基础上，吸取了国际上的经验，组织了一批青年数学工作者进入逼近论的研究领域。到了六十年代，我国已经有一个相当大的研究队伍。1964年陈建功所作《两三年来三角级数论在国内的情况》的综合报告，系统地总结了我国学者的研究成果。近几年来，逼近论这个分支在程民德教授等老一辈数学家的带领下，发展甚快。每两年一次的全国学术会议已相继举行了三次，从各方面看，一次比一次有所发展。国际上的成果与研究问题在我国得到强烈的反响，而我国学者的一系列先进成果也为国外学者所重视这。里仅就函数逼近论的主要方面介绍一下我国学者近两年在主要数学杂志上公布的一些工作。应予申明，我国的函数逼近论的研究是与调和分析、样条函数以及数值计算分不大开的，然而这三方面都将有另文介绍，本文就不涉及了。

用三角多项式逼近周期函数的重要性不单是由于周期性本身的重要，还在于很多非周期的状态都需归结到周期的状态的研究。在我国这方面研究的深、广还在于我们有较强的Fourier级数论的基础。Fourier分析的工具在逼近论中得到广泛的应用。这方面首先考察的是用函数的Fourier级数的部分和 $S_n(f, x)$ 来逼近。虽然在空间 $L^p_{2\pi}$ $(1<p<\infty)$ 中 $S_n(f)$ 达到最佳逼近的阶，然而在 $C_{2\pi}$ 或 $L^1_{2\pi}$ 中(下记此两空间为 X)却与 n 阶三角多项式对 f 的最佳逼近 $E_n^*(f)_X$ 相差一个对数因子，亦即有 $\|f-S_n(f)\|_X=O\{E_n^*(f)_X\ln(n+2)\}$。Осколков将此估计改进为$O\left\{\sum\limits_{\nu=n}^{2n}\dfrac{E_\nu^*(f)_X}{\nu-n+1}\right\}$，并问对于 $\varepsilon_n\downarrow 0$，函数类 $\mathscr{M}_\varepsilon=\{f: E_n^*(f)_X\leqslant \varepsilon_n,\ n=0,1,\cdots\}$ 中是否有函数 f_ε 使得对一切 n 都有 $\|f_\varepsilon-S_n(f_\varepsilon)\|_X\geqslant C\sum\limits_{\nu=n}^{2n}\dfrac{\varepsilon_\nu}{\nu-n+1}$，此地 C 为某一常数。孙永生证实至少有一个函数 f_0 使得此不等式对无穷多个 n 成立。类似的问题对Vallée-Poussin平均是由Дамен提出的，谢庭藩给出相应的回答。关于用Fourier级数的部分和逼近函数类Lipα，Korevaar发问：使偏差达到上界阶$\dfrac{\ln n}{n^\alpha}$的 n 的稠密性如何？谢庭藩考虑了更一般的Weyl意义可微分的函数类 $W^{(r)}H_\omega$，证实有函数 $f\in W^{(r)}H_\omega$ 使得对一切 n 逼近偏差都达到上界阶 $\dfrac{\omega\left(\frac{1}{n}\right)\ln n}{n^r}$，这里 $r\geqslant 0$ 是给定的实数。

自然可以考虑更广泛的Fourier级数部分和的线性平均的逼近。这里首先为人们重视的是 α 阶Cesaro平均的逼近。孙永生对 $\alpha>0$ 的情况给出了某些函数类的逼近上界以及逼近常数。施咸亮、余祥明以及杨义群等对负阶Cesaro平均的逼近，给出了一些函数类的逼近偏差的渐近表示。另一受人关注的是典型平均的逼近，郭竹瑞、郑士明建立了

偏差的渐近公式，施咸亮还用高阶差分表达了这个偏差。对卷积算子，孙永生研究了非正核的情况。沙震在正核条件下推广了 Коровкин 定理，余祥明又扩充到高阶可微的情况，沙震与翁祖荫还用一种对正算子的修正来提高逼近性能。用 Fourier 和的子列作线性平均来逼近是 Newman 提出来的，施咸亮深化了他的研究。对具有正系数的 Fourier 级数的函数，Fourier 和可能有更好的逼近阶，陈天平研究了这类函数的构造性。在 L^1 尺度下，谢庭藩对具拟单调 Fourier 系数的函数的 Fourier 和逼近，求出实现最佳逼近阶的特征，改进了 Теляковский 的定理。杨义群讨论的一类与无线电计量有关的逼近问题，也是在 L^1 尺度下的。

Fourier 级数的强性求和启发人们去考虑强性逼近。六十年代初，G. Alexits 首先提了一个有强性 Cesaro 平均的逼近问题，引起人们的重视。施咸亮对这问题作出了肯定的回答。对于强性 Vallée-Poussin 平均的逼近阶与被逼近函数的亚光滑性之间的关系，谢庭藩作了较详细的讨论，从而改进了 Siddiqi 的定理。施咸亮在这方面建立了对某些函数类逼近偏差间的关系，他还对 1974 年 L. Leindler 所提出的强性逼近的一个逆命题，给出用部分和子列代替部分和序列的条件。

关于周期函数的逼近还有其他一些有趣的问题，例如 Favard 曾问在连续函数空间中，部分和及其 Fejér 平均都具有逼近阶 $O\left(\frac{\ln n}{n}\right)$的函数应有怎样的特征。曹家鼎给出了回答。Hermann 曾提出在 $L_{2\pi}{}^2$ 情况下用 Fourier 系数表示某种逼近偏差的问题，施咸亮建立了确切答案。

现在转向非周期的情况。在这方面，历史较久的正线性算子逼近有限区间上的连续函数的研究，近几年仍然在发展。对连续可微函数，陈文忠就某些子类建立了 Вороновская 型渐近公式，他还对 Бернштейн 算子给出了具高阶导数的渐近公式。我们知道对于全实轴上的连续函数或有限区间上的无界函数，用线性算子逼近常会发生困难。早在六十年代，徐利治等应用了扩展乘数法，使得一些正线性算子有可能实现对上述两类函数的逼近。最近，王仁宏扩充了这方面的工作，讨论了拟局部正线性算子借助扩展乘数法来实现对无界函数的逼近。关于 Бернштейн 及其有关的 Контрович 算子，曹家鼎早已做了一些工作。近几年他又作了扩充，求得二阶可微函数类的逼近偏差之渐近表示。他的另一工作是避免通过周期函数的变换，直接构造了非周期之奇异积分算子，并讨论了它的逼近偏差。

代数插值多项式的逼近已是一个重要的方面，近几年国内外对 Hermite 插值的研究十分活跃，而在以 Чебышев 多项式之零点为结点的 Hermite-Fejér 插值逼近方面，更引人注意。王仁宏证明，倘若连续函数在某一点有二阶导数，则在这点的逼近阶为 $O\left(\frac{1}{n}\right)$。王斯雷指出，若 Hermite-Fejér 插值在$[-1,1]$上的均匀逼近阶为 $o\left(\frac{1}{n}\right)$，则 f 是个常数，并给出阶为$O\left(\frac{\ln n}{n}\right)$的特征。谢庭藩建立了这类逼近偏差的点态表达，以及均匀逼近的正逆命题。蒋元林算出了对类 $\mathrm{Lip}_1 1$ 的逼近上界。关于 Hermite 插值多项式同时逼近函数及其导数的问题，Pottinger 首先对以 Чебышев 多项式之零点为结点的情况求得逼近阶。郁定国考虑了以$\sqrt{1-x^2}\sin(n+1)\arccos x$ 的零点为结点的情况，发现相应的逼近阶可以改善到与 n 次代数多项式所实现的最佳逼近阶仅相差一个对数因子。用 Lagrange 插值多项式逼近函数，其

余项之表达常要求函数任意次可微。王兴华与杨义群对低度光滑函数给出了余项的另一估计，这种估计对结点组部分密集或重合仍然有效，从而也可能用于 Hermite 插值。

用代数多项式逼近区间上的连续函数的逆命题常常会由于关于多项式导数的估计而发生困难。但是，如采用分段多项式逼近，则有可能建立类似于周期函数用三角多项式逼近的理论。Shisha 首先用阶梯函数逼近给出类 Lipα ($0<\alpha\leqslant 1$) 的特征。Newman 用折线逼近给出了亚光滑函数类的特征。谢庭藩则用逐段高次多项式函数来逼近，并用这类逼近度刻划了函数光滑性。他还借助于这类逼近建立了光滑函数与可微分之间的关系。但是为了简单，仅考虑了等分定义区间的情况。陈天平、杨义群、王建忠等则考虑了非等分的情形，而且要求在分点处这类分段多项式有一定的光滑，从而与样条函数的理论密切相关。

当然可以考虑用其他函数系的多项式来逼近。近几年 Walsh 函数的研究也是比较多的。郑维行定义了不同意义的几种 p-adic 导数，并将一类来自信号分辨的极值问题归结为 p-adic 微分-积分方程。他与苏维宜又给出 $L^q(1\leqslant q\leqslant 2)$ 意义下的逻辑导数与积分以及其互逆运算关系。苏维宜还求得 Walsh 系的 Abel-Poisson 型核，建立了这核所产生的奇异积分算子的逼近定理。关于 Haar 函数系的 Fourier 级数部分和逼近连续函数，陈天平建立了正逆命题。

多元逼近方面，1978 年我国第一次逼近论会议上，程民德指出用 Fourier 展式之有限和逼近函数，特别是用 Riesz 球形平均逼近，虽有些重要结果，但即使对 H^α 这种常见的函数类，逼近上界仍属未知。研究球形平均逼近阶的渐近估计以及与函数光滑性之间的关系是重要的。这些问题引起了人们的重视。陆善镇对多重 Fourier 级数的 Riesz 平均之收敛性做了工作，特别是在有界变差函数的情况下改进了 Голубов 的结果。他还研究了多重共轭 Fourier 积分的 Riesz 球形平均，建立了 Lebesgue 型收敛定理，改进了 Lippman 与 Голубов 的定理。关于 n 重 Fourier 积分的 Riesz 球形平均 $\sigma^\alpha{}_R(f)$，熟知，若 $\alpha\geqslant\frac{n-1}{2}$，则局部化定理成立，$\alpha<\frac{n-1}{2}$ 则不成立。$\frac{n-1}{2}$ 被称为临界指标。潘文杰讨论了 $\alpha\in\left(\frac{n-3}{2},\ \frac{n-1}{2}\right)$ 时局部化定理能成立的函数类，并进一步建立了 L^p 中的收敛性定理。关于二重 Fourier 级数的方形和以及 Marcinkiewicz 和，张阳春考虑了方形和强性逼近的饱和问题，王昆阳还考虑了 Marcinkiewicz 型和强性逼近，给出逼近阶的估计。与多元逼近有关的振荡函数积分之渐近展开是徐利治提出来的问题，他与周蕴时最近还给奇异振荡积分 $\int_0^1 x^{-\alpha}f(x,\ Nx)\,dx$ ($0\leqslant\alpha<1$) 以一般的渐近公式，其中 $f(x,\ y)$ 关于 y 有周期 1，N 为大参数。王兴华给出了余项的较简单的表达。在 $\alpha=0$ 的情况，施咸亮与卢志康讨论了对某些函数类的余项之上界表示，他们还研究 n 维的类似的问题。此外梁学章就圆、三角形以及矩形域讨论了二元与零偏差最小的多项式。余家荣在研究多元解析函数的唯一性的基础上，讨论了一类广义多项式对多元函数的逼近问题。

在复变数方面，沈燮昌近几年有较多的工作，他与娄元仁研究了具有给定极点在某个点集上的有理函数最佳逼近问题，先后就连续函数空间、H_p 以及 E_p 空间获得不少结果。后来，他对扩充的 Альпер 区域 $J_\lambda(0\leqslant\lambda\leqslant 1)$ 研究了 $E_p(1<p<+\infty)$ 中具有给定极点的有理函数最佳逼近，并且证实，尽管被逼近函数的高阶导数属于 E_p，然而在 $1<p<\infty$ 时，对有