

马在田 著

地震成像技术

有限差分法偏移

石油工业出版社

3

070258

P315.3
007

地震成像技术

有限差分法偏移

马在田著

SY24/10



社

石油工业出版社

内 容 提 要

本书在介绍了偏移成像基本原理及偏移技术发展方向的基础上，重点对有限差分法偏移最近十年中的发展状况进行了较为全面的概括，系统地叙述了它的基本理论和实践技术、精度分析。本书论述了高阶方程的分裂法，它突破了传统的 15° 、 45° 偏移的限制，可适用于较高的地层倾角，同时提出了实用的全倾角波动方程偏移的方法，这对提高有限差分法偏移精度有着重要贡献。

本书是物探数字处理人员、解释员及有关院校师生一本有益的参考书。



地 震 成 像 技 术

有限差分法偏移

马在田 著

*

石油工业出版社出版
(北京安定门外安华里二区一号楼)
北京地质印刷厂排版
北京顺义燕华印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行

*

787×1092毫米 16开本 13 $\frac{3}{4}$ 印张 341千字 印1—1,800

1989年8月北京第1版 1989年8月北京第1次印刷

ISBN 7-5021-0170-5/TE·168

定价：4.45元

序 言

地震成像作为地震勘探资料的一种处理与解释技术在地震勘探中已经使用多年了。地震成像的目的是使反射波或绕射波回返到产生它的地下位置上去。这包含着两种内容：一个内容是确定反射（散射）点的空间位置；另一个内容是恢复其波形和振幅特征。地震偏移是实现地震成像的主要步骤。对于迭加后偏移来说，水平迭加可看做是地震成像的第一个步骤。迭后偏移是地震成像的主要步骤。对于迭加前偏移来说，偏移过程就是成像过程。因此，地震偏移方法实质上就是一种成像技术。

地震成像的第一个内容，即确定反射（散射）点的空间位置，在出现地震反射法之后是用一种做图技术来实现的。一直到本世纪60年代初出现自动偏移技术以前，地震成像的方法一直是用手工操作的。用这种方法无法恢复反射波的波形与振幅。只有用计算机处理地震勘探资料才有可能研究偏移剖面的波形特征问题。但是，以射线理论为基础的偏移方法是无法真正解决这个问题的。只有在70年代初期以波动方程为基础的偏移新技术发展起来以后才得以较好地解决偏移剖面的振幅和波形复原问题。然而，时至今日也并未完全解决这一问题。不过，在最近十年间有了长足的进展则是不可否认的事实。

使用波动方程进行地震成像的方法有有限差分法偏移技术、Kirchhoff 积分法偏移技术、 F - K 域偏移技术和 σ - p 域偏移技术等。本书主要对广泛使用的有限差分法偏移技术进行讨论。其它的波动方程偏移技术，我们将在另一书中进行讨论。

有限差分法地震偏移技术做为波动方程数值解在一种新领域中的应用，把它用到地震数据处理中来的开创性工作是由J. Claerbout 教授在美国斯坦福大学完成的。由于这一成功的尝试，改变了现代地震勘探三大处理技术（反褶积、叠加和偏移）之一的偏移技术的面貌，从而使这位教授成为世界地球物理界的知名学者。后来有很多专家学者为发展这项新技术做出了有益的贡献。直到现在，有限差分法偏移技术仍然占有重要地位，并且仍在发展中。

本书将对有限差分法偏移技术在最近十年中的发展进行较为全面的概括，系统地叙述它的基本理论和实践技术。青年读者可以从中了解到当前对此课题的研究状况和水平，从而避免重复他人已经研究并解决了的课题，也可以从中探索尚未解决的问题。这就是我写这本书的目的。至于成败利钝，敬请广大读者批评指正。

本书共有九章。第一章简要地介绍有限差分法的计算技术，是为初学者准备的；第二章叙述偏移方法的发展，使读者了解偏移技术的全貌，第三章阐述有限差分法偏移技术的基本内容；第四章主要叙述有限差分法偏移技术的新发展；第五章是有限差分法偏移的精度分析；第六章讨论深度偏移问题；第七章是叙述在迭加前进行地震偏移的方法；第八章讨论三维偏移问题；第九章是将有限差分法偏移与其它波动方程偏移方法做一简要的对比，使读者对于它们之间的异同有一个全面的了解，同时对波动方程偏移技术的近期发展进行了预测。

目 录

第一章	有限差分法的基础知识	(1)
§ 1	差分方程的建立与求解	(1)
§ 2	收敛性、相容性和稳定性	(8)
§ 3	一些数理方程的有限差分解法	(18)
第二章	地震偏移成像的基本原理	(35)
§ 1	偏移成像的概念	(35)
§ 2	偏移技术的发展	(40)
§ 3	波场外推与地震成像原理	(48)
第三章	水平迭加地震剖面的偏移	(61)
§ 1	上行波和下行波的空间-时间域方程	(61)
§ 2	有限差分法地震偏移技术	(72)
§ 3	差分方程的稳定性	(75)
§ 4	吸收边界条件	(80)
§ 5	有限差分法偏移的效果	(84)
第四章	高阶方程和准确方程的偏移方法	(87)
§ 1	高阶方程分裂法	(87)
§ 2	有限差分解及其稳定性	(93)
§ 3	分裂法高阶方程偏移的效果	(100)
§ 4	其它高阶方程偏移方法	(107)
§ 5	全倾角波动方程偏移	(111)
第五章	偏移精度分析	(121)
§ 1	近似方程的误差	(121)
§ 2	差分方程的误差分析	(131)
§ 3	提高偏移剖面质量的措施	(138)
第六章	深度偏移	(144)
§ 1	常规偏移存在的问题	(144)
§ 2	射线理论的深度偏移	(145)
§ 3	波动理论的深度偏移	(151)
§ 4	高阶方程的深度偏移	(156)
第七章	迭加前地震记录的偏移	(161)
§ 1	迭前偏移的几何光学原理	(161)
§ 2	双平方根方程与迭前部分偏移	(166)
§ 3	地震剖面的横向外推与倾角时差校正	(173)
第八章	三维偏移	(177)

§ 1	三维偏移方法概述	(177)
§ 2	三维15°方程的有限差分法偏移	(179)
§ 3	用高阶方程进行三维偏移	(180)
§ 4	两步法三维偏移	(185)
§ 5	三维深度偏移	(191)
§ 6	三维迭前偏移	(196)
第九章	各种偏移成像方法评述	(200)
§ 1	各种波动方程偏移方法的原理相同	(200)
§ 2	三种波动方程偏移方法的差异	(204)
§ 3	波动方程偏移的发展前景	(206)
参考文献	(211)

第一章 有限差分法的基础知识

在计算机上进行数值运算，使用的是离散的和有限的数值，而不是连续的和无限的函数，为此要为离散数值的计算建立基本方法。最基本和广泛使用的方法就是有限差分法，借助这一方法可以研究连续物理系统的性质，近似地、但相当精确地解出各种数理方程问题。本章将概要地介绍有限差分法的基础知识，供以后各章解偏移方程使用。

§1 差分方程的建立与求解

1.1 有限差分的概念

我们感兴趣的是用有限差分法解各类微分方程，因此，要把导数用有限差分来近似，所以我们首先研究用有限差分近似导数的方法。

(1) 一元函数差分法

当一个函数 u 和它的各阶导数是变量 x 的单值的、有限的和连续的函数时，可以用泰勒原理展开为：

$$u(x + \Delta x) = u(x) + \Delta x \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \Delta x^2 \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{1}{6} \Delta x^3 \frac{d^3u}{dx^3} + \dots \quad (1.1.1)$$

和

$$u(x - \Delta x) = u(x) - \Delta x \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \Delta x^2 \frac{d^2u}{dx^2} - \frac{1}{6} \Delta x^3 \frac{d^3u}{dx^3} + \dots \quad (1.1.2)$$

以上二式相加，得：

$$u(x + \Delta x) + u(x - \Delta x) = 2u(x) + \Delta x^2 \frac{d^2u}{dx^2} + O(\Delta x^4) \quad (1.1.3)$$

式中 $O(\Delta x^4)$ —— 表示包含有 Δx 的四阶和高于四阶以上的项。

从(1.1.1)~(1.1.3)式我们可以导出 (图1-1)下列表示式。

一阶向前差分：

$$\begin{aligned} \delta_x^+ u &= \frac{1}{\Delta x} [u(x + \Delta x) - u(x)] \\ &= \frac{du}{dx} + O(\Delta x) \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

一阶向后差分：

$$\begin{aligned} \delta_x^- u &= \frac{1}{\Delta x} [u(x) - u(x - \Delta x)] \\ &= \frac{du}{dx} + O(\Delta x) \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

一阶中心差分：

$$\bar{\delta}_x u = \frac{1}{2\Delta x} [u(x + \Delta x) - u(x - \Delta x)] = \frac{du}{dx} + O(\Delta x^2) \quad (1.1.6)$$

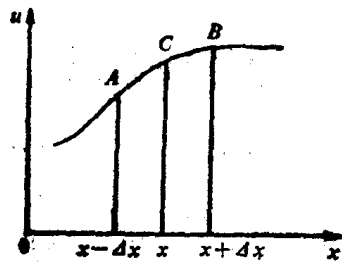


图 1-1 一元函数差分法

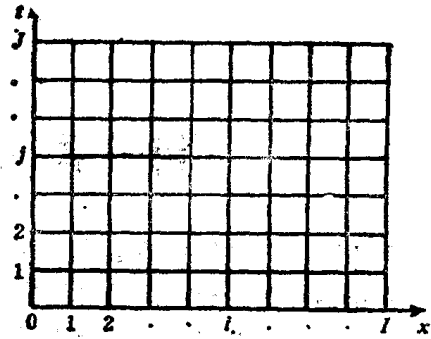


图 1-2 二元函数差分网格

二阶差分:

$$\begin{aligned} \delta_{xx}u &= \delta_x^2 u = \frac{1}{\Delta x^2} [u(x+\Delta x) - 2u(x) + u(x-\Delta x)] & (1.1.7) \\ &= \frac{d^2 u}{dx^2} + O(\Delta x^2) \end{aligned}$$

(2) 多元函数差分法

设有一个二元函数 $u(x, t)$, 我们用网格把它们离散 (图1-2), 令

$$x = i \Delta x, \quad t = j \Delta t$$

i 和 j 为整数。用

$$u_{i,j} = u(i \Delta x, j \Delta t)$$

表示各网格点上的函数值。现在我们用泰勒级数展开下面各点之值为:

$$\begin{aligned} u_{i+1,j} &= u[(i+1) \Delta x, j \Delta t] = u(x_i + \Delta x, t_j) \\ &= u_{i,j} + \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j} + \frac{1}{2} \Delta x^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{i,j} + \frac{1}{6} \Delta x^3 \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_{i,j} + \dots & (1.1.8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{i-1,j} &= u[(i-1) \Delta x, j \Delta t] = u(x_i - \Delta x, t_j) \\ &= u_{i,j} - \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j} + \frac{1}{2} \Delta x^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{i,j} - \frac{1}{6} \Delta x^3 \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_{i,j} + \dots & (1.1.9) \end{aligned}$$

由此可以求出对 x 的一阶和二阶差分为:

$$\begin{aligned} \delta_x^+ u &= \frac{1}{\Delta x} (u_{i+1,j} - u_{i,j}) & (1.1.10) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + O(\Delta x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_x^- u &= \frac{1}{\Delta x} (u_{i,j} - u_{i-1,j}) & (1.1.11) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + O(\Delta x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_x u &= \frac{1}{2\Delta x} (u_{i+1,j} - u_{i-1,j}) & (1.1.12) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + O(\Delta x^2) \end{aligned}$$

$$\delta_{xx} = \delta_x^2 u = \frac{1}{\Delta x^2} (u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) \quad (1.1.13)$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(\Delta x^2)$$

同理可求出对 t 的一阶和二阶差分为:

$$\delta_i^+ u = \frac{1}{\Delta t} (u_{i,j+1} - u_{i,j}) \quad (1.1.14)$$

$$= \frac{\partial u}{\partial t} + O(\Delta t)$$

$$\delta_i^- u = \frac{1}{\Delta t} (u_{i,j} - u_{i,j-1}) \quad (1.1.15)$$

$$= \frac{\partial u}{\partial t} + O(\Delta t)$$

$$\overline{\delta}_i u = \frac{1}{2\Delta t} (u_{i,j+1} - u_{i,j-1}) \quad (1.1.16)$$

$$= \frac{\partial u}{\partial t} + O(\Delta t^2)$$

$$\delta_{ii} = \delta_i^2 u = \frac{1}{\Delta t^2} (u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}) \quad (1.1.17)$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + O(\Delta t^2)$$

1.2 建立差分方程

建立差分方程的方法很多, 有积分法, 物理量守恒法, 变分法和最小平方法等。对于常系数的微分方程来说, 积分法是最简便的。下面我们用积分法来构造差分方程。

(1) 常微分方程

设有如下的常微分方程:

$$\frac{du}{dt} + f(u, t) = 0 \quad (1.1.18)$$

式中 $u = u(t)$, 并已知初始条件为:

$$u(t_0) = u_0 \quad (1.1.19)$$

在 $\Delta t = t_{j+1} - t_j$ 的时间间隔上积分(1.1.18)式, 则得:

$$u_{j+1} = u_j - \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(u, t) dt \quad (1.1.20)$$

我们把(1.1.20)式中的 $f(u, t)$ 函数表示为有限项的泰勒级数, 则有:

$$u_{j+1} = u_j - \int_{t_j}^{t_{j+1}} \left\{ \sum_{k=0}^{r-1} \left[\frac{d^k}{dt^k} f(u, t) \right]_{t_j} \frac{t^k}{k!} + O(t^r) \right\} dt \quad (1.1.21)$$

(1.1.21) 式的积分结果为:

$$u_{j+1} = u_j - \sum_{k=1}^r \left[\frac{d^{k-1} f(u, t)}{dt^{k-1}} \right]_{t_j} \frac{(\Delta t)^k}{k!} + O(\Delta t^{r+1}) \quad (1.1.22)$$

如果把求和式展开, 则有:

$$u_{j+1} = u_j - f(u_j, t_j) \Delta t + \left[\frac{d}{dt} f(u, t) \right]_{t_j} \frac{(\Delta t)^2}{2} + \dots \quad (1.1.23)$$

如果只取一项，则有：

$$u_{j+1} = u_j - f(u_j, t_j) \Delta t \quad (1.1.24)$$

这就是一阶精度的欧拉方法的差分方程。 $f(u, t)$ 在 Δt 间隔上的积分近似值表示在图1-3上。

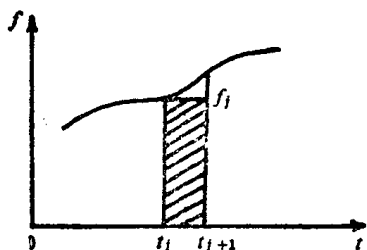


图 1-3 欧拉方法中积分近似值

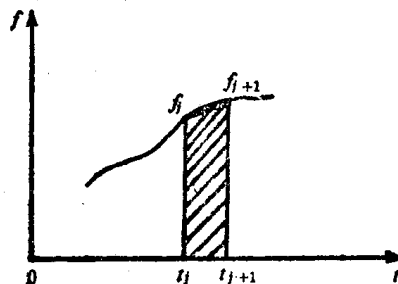


图 1-4 隐式差分法积分近似值

如果我们把(1.1.24)式写为：

$$u_{j+1} = u_j - [(1-\theta)f(u_j, t_j) + \theta f(u_{j+1}, t_{j+1})] \Delta t \quad (1.1.25)$$

式中内插系数 θ 值范围为 $0 \leq \theta \leq 1$ 。当取 $\theta = \frac{1}{2}$ 时可得到二阶精度的隐式差分方程：

$$u_{j+1} = u_j - \{f(u_j, t_j) + f(u_{j+1}, t_{j+1})\} \frac{\Delta t}{2} \quad (1.1.26)$$

在此情况下积分近似值如图 1-4 中斜线表示的面积。

当取 $\theta = 0$ 时，即得(1.1.24)式。

很明显，要得到更高阶精度的差分式，需要更多的网格点来近似 $f(u, t)$ 的各阶导数。在一定的精度要求之内微分方程可以用差分方程来解。

(2) 偏微分方程

设有下列偏微分方程

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - Lu(x, t) = 0 \quad (1.1.27a)$$

$$u(x, t=0) = u_0(x) \quad (1.1.27b)$$

其中算子 L 为：

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad (1.1.28)$$

我们对一个时间步长 $\Delta t = t_{j+1} - t_j$ 积分(1.1.27) 式，得到：

$$u_{j+1} = u_j + \int_{t_j}^{t_{j+1}} Lu dt \quad (1.1.29)$$

其中 $u_{j+1} = u(x, t_{j+1})$ ， $u_j = u(x, t_j)$ ， $u = u(x, t)$ 。

常常因 $u(x, t)$ 不能用解析式表示，所以要用有限差分来近似。和常微分方程的情况相似，我们把(1.1.29)式的被积函数表示为泰勒级数：

$$u_{j+1} = u_j + \int_{t_j}^{t_{j+1}} \left\{ \sum_{k=0}^{r-1} \left[\frac{d^k}{dt^k} (Lu) \right]_{t_j} \frac{t'^k}{k!} + O(t'^r) \right\} dt \quad (1.1.30)$$

对(1.1.30)式右边第二项求积分, 则得:

$$u_{j+1} = u_j + \sum_{k=1}^r \left[\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} (Lu) \right]_{t_j} \frac{(\Delta t)^k}{k!} + O(\Delta t^{r+1}) \quad (1.1.31)$$

我们在做差分近似时可取(1.1.31)式的任意多个有限项。当然, 取的项数越多, 计算量越大。为了简便易行, 只取级数的第一项, 则有:

$$u_{j+1} = u_j + Lu \Delta t \quad (1.1.32)$$

当把微分算子用差分算子 δ_{xx} 代替后, 则得:

$$u_{j+1} = u_j + \delta_{xx} u_j \Delta t \quad (1.1.33)$$

此即显式差分方程。

如果在计算中还取未知的 u_{j+1} 值进行内插并做差分逼近, 则得:

$$u_{j+1} = u_j + [(1-\theta)\delta_{xx}u_j + \theta\delta_{xx}u_{j+1}]\Delta t \quad (1.1.34)$$

由此式推导出:

$$u_{j+1} = [I - \theta\Delta t\delta_{xx}]^{-1} [I + (1-\theta)\Delta t\delta_{xx}]u_j = Tu_j \quad (1.1.35)$$

式中

$$T = \frac{I + (1-\theta)\Delta t\delta_{xx}}{I - \theta\delta_{xx}} \quad (1.1.36)$$

为差分算子。

当 $\theta = \frac{1}{2}$ 时(1.1.35)式为:

$$u_{j+1} = \frac{I + \frac{\Delta t}{2}\delta_{xx}}{I - \frac{\Delta t}{2}\delta_{xx}}u_j \quad (1.1.37)$$

此即隐式差分方程, 具有二阶误差。

1.3 差分方程的格式

差分方程的格式基本可分两大类, 即显式格式和隐式格式。上面已经导出了这两类差分格式。在实际工作中又可以衍生出很多种格式, 甚至可以用显式与隐式联合形式的差分格式。在这里我们仅以抛物型偏微分方程为例说明常用的显式格式和Crank-Nicolson格式。

(1) 显式格式

设有抛物型偏微分方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (1.1.38)$$

根据(1.1.33)式可具体写出差分方程为:

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} + \frac{\sigma \Delta t}{\Delta x^2} (u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) \quad (1.1.39)$$

所用的差分网格如图 1-5 所示。令 $\frac{\sigma \Delta t}{\Delta x^2} = r$, 则(1.1.39)式可写为:

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} + r(u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}) \quad (1.1.40)$$

其中 $u_{i,j}$, $u_{i-1,j}$ 和 $u_{i+1,j}$ 为已知值。

从第 j 时间层上的已知值, 可用(1.1.40)式直接计算出第 $j+1$ 时间层的值。依此类

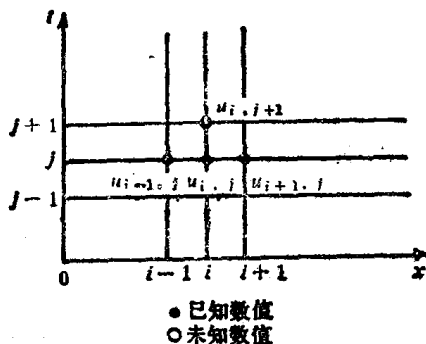


图 1-5 显式差分格式

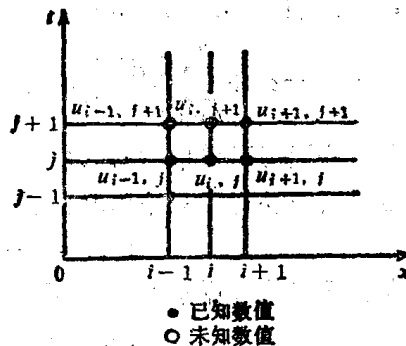


图 1-6 Crank-Nicolson 差分格式图

推，可解出全时间上的物理量值。

(2) Crank-Nicolson 隐式格式

虽然显式法计算上很简单，但它有一个严重的缺点，即时间步长 Δt 一定要很小，必须满足 $0 < \frac{\sigma \Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}$ ，才能保持计算上稳定并达到必要的精度。Crank-Nicolson 在 1947 年提出了一个使所有的有限 r 值都满足计算要求（收敛性与稳定性）的方法。他们把 $\partial^2 u / \partial x^2$ 项用第 j 和第 $j+1$ 时间行上的平均差分式来逼近。求出下列的差分方程（图 1-6）：

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta t} = \frac{\sigma}{2} \left\{ \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2} \right\} \quad (1.1.41)$$

由此得出下列等式：

$$-r u_{i-1,j+1} + 2(1+r) u_{i,j+1} - r u_{i+1,j+1} = r u_{i-1,j} + 2(1-r) u_{i,j} + r u_{i+1,j} \quad (1.1.42)$$

其中 $r = \frac{\sigma \Delta t}{\Delta x^2}$ 。

(1.1.42) 式的左边包含有 3 个未知数值，右边 3 个值是已知的。

如果在每个时间层上有 I 个格点，则方程 (1.1.42) 根据零时间层 ($j=0$) 计算第一时间层 ($j=1$) 的网格点上的函数值 u_i 时可列出 I 个联立方程组。由于 $j=0$ 时间层上的初值和边值是给出的，因此方程组表现为三对角线阵。对于这样的方程组，可用代数的追赶法求解，也可以用矩阵方程来分析。

1.4 差分方程的解法

(1) 追赶法

(1.1.42) 方程组可用下式表示：

$$a_i u_{i+1} + b_i u_i + \gamma_i u_{i-1} = \omega_i \quad (1.1.43)$$

其中 $0 \leq i \leq I$ 。补充的边界条件为：

$$\begin{aligned} a_0 u_1 + \beta_0 u_0 &= \omega_0 \\ \gamma_I u_{I-1} + \beta_I u_I &= \omega_I \end{aligned} \quad (1.1.44)$$

我们要求出未知值 u_i 。用递推法求解，即已知 i 点上的 u_i 值可推出 $i+1$ 点上的 u_{i+1} 值。这就要先求出中间助算未知数 x_i 和 y_i ，其关系式为：

$$u_{i+1} = x_i u_i + y_i \quad (1.1.45)$$

为此要求出 x_i, y_i 。(1.1.45) 式对任何 i 点都是成立的。我们把它代入 (1.1.43) 式，得：

$$a_i (x_i u_i + y_i) + b_i u_i + \gamma_i u_{i-1} = \omega_i$$

或者写为:

$$u_i = \frac{-\gamma_i}{\alpha_i x_i + \beta_i} u_{i-1} + \frac{\omega_i - \alpha_i y_i}{\alpha_i x_i + \beta_i} \quad (1.1.46)$$

这个公式与(1.1.45)式相同, 它把*i*点和*i*-1点用下式:

$$u_i = x_{i-1} u_{i-1} + y_{i-1} \quad (1.1.47)$$

连结起来。

由此求出下列等式:

$$x_{i-1} = \frac{-\gamma_i}{\alpha_i x_i + \beta_i}, \quad y_{i-1} = \frac{\omega_i - \alpha_i y_i}{\alpha_i x_i + \beta_i} \quad (1.1.48)$$

用这个关系式可以求出所有的*x_i*和*y_i*的值。这样, (1.1.45)和(1.1.48)式就给出解三对角线方程组的两个递推过程。利用(1.1.48)式我们在网络上从*i*=*I*到*i*=0求出所有的*x_i*和*y_i*值。在求出所有的*x_i*和*y_i*之后, 从*i*=0向*i*=*I*用(1.1.45)式求出所有的*u_i*值。在*i*=*I*点确定初始值*x_{I-1}*和*y_{I-1}*。在*i*=0点从边界条件确定*u_{0I}*值。把第*I*点的边界条件(1.1.44)与递推关系式(1.1.45)比较, 则得:

$$x_{I-1} = \frac{-\gamma_I}{\beta_I} \quad (1.1.49)$$

$$y_{I-1} = \frac{\omega_I}{\beta_I}$$

在用递推关系求出所有的*x_i*和*y_i*, 一直到*x₀*和*y₀*之后, 则用(1.1.45)式可求出未知函数值*u_{0I}*为:

$$u_{0I} = \frac{\omega_0 - \alpha_0 y_0}{\beta_0 + \alpha_0 x_0} \quad (1.1.50)$$

从*u_{0I}*出发用(1.1.45)式可求出所有的*u_{iI}*值。

根据上述递推原理可求出所有时间层上的*u_{i,j}*值。

(2) 矩阵法

现在从矩阵观点来分析三对角线方程组的求解问题。令 **w** 为已知向量, 需要求出的向量为 **u**, 它们满足矩阵方程:

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{w} \quad (1.1.51)$$

其中 **A** 是三对角矩阵。我们引入平移的矩阵算子 **L₊** 和 **L₋**, 它们对向量 **u** 的分量有下列关系:

$$\mathbf{L}_+ \{u_i\} = \{u_{i+1}\} \quad (1.1.52)$$

$$\mathbf{L}_- \{u_i\} = \{u_{i-1}\} \quad (1.1.53)$$

由于 **A** 是三对角矩阵, 故(1.1.51)可写为:

$$(\mathbf{P}\mathbf{L}_+ + \mathbf{Q} + \mathbf{R}\mathbf{L}_-) \mathbf{u} = \mathbf{w} \quad (1.1.54)$$

其中 **P**, **Q** 和 **R** 是对角矩阵。(1.1.54)式给出双向递推过程, 可分为两步。首先用下列关系式:

$$\mathbf{L}_+ \mathbf{u} = \mathbf{X}\mathbf{u} + \mathbf{y} \quad (1.1.55)$$

求对角矩阵 **X** 和向量 **y**。把(1.1.55)式与对角阵 **P** 相乘, 写为下列形式:

$$(\mathbf{P}\mathbf{L}_+ - \mathbf{P}\mathbf{X} + \mathbf{O}) \mathbf{u} = \mathbf{P}\mathbf{y} \quad (1.1.56)$$

式中 **O** 为零阵。从(1.1.54)式减去(1.1.56)式, 得

$$(\mathbf{Q} + \mathbf{P}\mathbf{X}) \mathbf{u} = -\mathbf{R}\mathbf{L}_- \mathbf{u} + \mathbf{w} - \mathbf{P}\mathbf{y} \quad (1.1.57)$$

或者写为:

$$\mathbf{u} = -(\mathbf{Q} + \mathbf{P}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}\mathbf{L}\mathbf{u} + (\mathbf{Q} + \mathbf{P}\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{w} - \mathbf{P}\mathbf{y}) \quad (1.1.58)$$

(1.1.58)式与(1.1.55)式在形式上是一致的。为了使它与所讨论的问题相联系,必须使它们等价。因此,得出下列等式:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}\mathbf{X} &= -(\mathbf{Q} + \mathbf{P}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R} \\ \mathbf{L}\mathbf{y} &= (\mathbf{Q} + \mathbf{P}\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{w} - \mathbf{P}\mathbf{y}) \end{aligned} \quad (1.1.59)$$

方程(1.1.55)和(1.1.59)组成两步递推过程。这些结果与标量方法所得结果一致。因为 \mathbf{P} , \mathbf{Q} , \mathbf{R} 和 \mathbf{X} 是对角矩阵,所以它们每列的对角线上的元素相应地是 α_i , β_i , γ_i 和 x_i 。显然,矩阵结果与代数方程是一致的。

§ 2 收敛性、相容性和稳定性

为了使差分方程的解能够相当精确地逼近于相应的微分方程的解,我们必须讨论它所需要的条件。这是不同的,但又互相有关联的两个条件。第一个是近似的差分方程的精确解向微分方程的解收敛的条件,第二个是在解差分方程过程中任何误差不可无界地增长的条件。

2.1 收敛性

令 u 是变量为 x 和 t 的偏微分方程的精确解, \hat{u} 是用来近似偏微分方程的差分方程的精确解。当 Δt 和 Δx 趋近于零时, \hat{u} 趋近于某个固定点上的 u ,就说有限差分方程是收敛的。 $e = u - \hat{u}$ 之差称为离散误差。考虑下面的方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 0 < x < 1 \quad (1.2.1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u(0, t) = u_0(t), \quad u(1, t) = u_1(t)$$

(1.2.1)式的最简单的显式差分方程为:

$$\frac{\hat{u}_{i,j+1} - \hat{u}_{i,j}}{\Delta t} = \frac{\hat{u}_{i-1,j} - 2\hat{u}_{i,j} + \hat{u}_{i+1,j}}{\Delta x^2} \quad (1.2.2)$$

在网格点上有 $\hat{u}_{i,j} = u_{i,j} - e_{i,j}$, $\hat{u}_{i,j+1} = u_{i,j+1} - e_{i,j+1}$ 等等。其中 $e_{i,j}$ 为网格点上的离散误差。把它们代入(1.2.2)式中,导出:

$$\begin{aligned} e_{i,j+1} &= r e_{i-1,j} + (1-2r) e_{i,j} + r e_{i+1,j} + u_{i,j+1} - u_{i,j} \\ &\quad + r(2u_{i,j} - u_{i-1,j} - u_{i+1,j}) \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

其中 $r = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$ 。

利用泰勒级数展开,得

$$\begin{aligned} u_{i+1,j} &= u(x_i + \Delta x, t_j) = u_{i,j} + \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 u(x_i + \theta_1 \Delta x, t_j)}{\partial x^2} \\ u_{i-1,j} &= u(x_i - \Delta x, t_j) = u_{i,j} - \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 u(x_i - \theta_2 \Delta x, t_j)}{\partial x^2} \\ u_{i,j+1} &= u(x_i, t_j + \Delta t) = u_{i,j} + \Delta t \frac{\partial u(x_i, t + \theta_3 \Delta t)}{\partial t} \end{aligned}$$

其中 $0 < \theta_1 < 1$, $0 < \theta_2 < 1$ 和 $0 < \theta_3 < 1$ 。把上面的公式代入到(1.2.3)式中,得

$$e_{i,j+1} = re_{i-1,j} + (1-2r)e_{i,j} + re_{i+1,j} + \Delta t \left\{ \frac{\partial u(x_i, t_j + \theta_3 \Delta t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(x_i + \theta_4 \Delta t, t_j)}{\partial x^2} \right\} \quad (1.2.4)$$

其中 $-1 < \theta_4 < 1$ 。这是 $e_{i,j}$ 的差分方程。

令 E_j 表示沿第 j 时间行的 $|e_{i,j}|$ 的最大值和 M 是括号 $\{\cdot\}$ 的最大模 (对所有的 i 和 j)。当 $r \leq \frac{1}{2}$ 时 e 的所有系数是正数或零, 所以有:

$$\begin{aligned} |e_{i,j+1}| &\leq r |e_{i-1,j}| + (1-2r) |e_{i,j}| + r |e_{i+1,j}| + \Delta t M \leq r E_j + (1-2r) E_j \\ &\quad + r E_j + \Delta t M = E_j + \Delta t M \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

这个条件对 $\max |e_{i,j+1}|$ 也是成立的, 所以有:

$$E_{j+1} \leq E_j + \Delta t M \leq (E_{j-1} + kM) + kM = E_{j-1} + 2kM$$

由此推出:

$$E_j \leq E_0 + j \Delta t M = tM$$

由于 u 和 \hat{u} 的初值相同, 故上式中 $E_0 = 0$ 。当 Δx 趋于零时 $\Delta t = r \Delta x^2$ 也趋于零, 而 M 趋于:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{i,j}$$

由于 u 是 (1.2.1) 方程的解, 所以 M 和 E_j 为零。只要 $|u_{i,j} - \hat{u}_{i,j}| \leq E_j$, 当 $r \leq 1/2$ 和 t 是有限值时, Δx 趋于零时就会使 \hat{u} 收敛到 u 。所以有限差分方程是收敛的。

在 $r > \frac{1}{2}$ 条件下, 可以证明当 Δx 趋于零时, 差分方程不收敛。

上面举出的是一个简单的例子。一般来说收敛性问题常常是难以研究的。因为离散误差的最终表达式经常含有未知导数项, 无法估计其边界值。但是, 对于线性偏微分方程中的抛物型与双曲型方程来说可以用稳定性和相容性来研究收敛性。对此存在 Lax 等价原理。

Lax 等价定理 该定理说, 当给出了一个适定的初值问题和它的有限差分方程时, 如果该差分方程满足相容性条件, 则稳定性是收敛性的充分而且必要的条件。

关于这个定理的证明请参看有关文献 [8]。下面我们来研究相容性和稳定性问题。

2.2 相容性

设 $F_{i,j}(\hat{u}) = 0$ 代表在 (i,j) 点上的差分方程。如果把 \hat{u} 用 u 来代替, 则 $F_{i,j}(u)$ 就称为在网格点 (i,j) 上的局部截断误差。如果在网格步长趋于零时这个误差亦趋于零, 则称差分方程与偏微分方程相容。我们举例来说明这个问题。

设有偏微分方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

我们用下面的差分方程来近似它。

$$\begin{aligned} F_{i,j}(\hat{u}) &= \frac{\hat{u}_{i,j+1} - \hat{u}_{i,j-1}}{2\Delta t} - \frac{\hat{u}_{i+1,j} - 2\{\theta \hat{u}_{i,j+1} + (1-\theta) \hat{u}_{i,j-1}\} + \hat{u}_{i-1,j}}{\Delta x^2} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

现在我们用 $u_{i,j}$ 代替 $\hat{u}_{i,j}$, 则有

$$F_{i,j}(u) = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta t} - \frac{u_{i+1,j} - 2\{\theta u_{i,j+1} + (1-\theta) u_{i,j-1}\} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2} = 0 \quad (1.2.7)$$

用泰勒级数把 $u_{i+1,j}$, $u_{i-1,j}$, $u_{i,j+1}$ 和 $u_{i,j-1}$ 等项展开并把它们代入 (1.2.7) 式中, 则得:

$$F_{i,j}(u) = \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{i,j} + \left\{ \frac{\Delta t^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} - \frac{\Delta x^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + (2\theta - 1) \frac{2\Delta t}{\Delta x^2} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right\} + O\left(\frac{\Delta t^3}{\Delta x^2}, \Delta x^4, \Delta t^4\right)$$

现在我们讨论几种情况:

① $\Delta t = r \Delta x$, $\theta \neq \frac{1}{2}$

当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时

$$F_{i,j}(u) \rightarrow \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (2\theta - 1) \frac{2r}{\Delta x} \frac{\partial u}{\partial t} + r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right\}_{i,j} \rightarrow \infty$$

因为上式第三项趋于无限大。差分方程不成立。

② $\Delta t = r \Delta x$, $\theta = \frac{1}{2}$

$$F_{i,j}(u) \rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

如果

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (1.2.8)$$

则 $F(u_{i,j}) = 0$, 因此差分方程与(1.2.8)方程相容, 而与原方程不相容。

③ $\Delta t = r \Delta x^2$, $\theta \neq \frac{1}{2}$

当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时

$$F(u_{i,j}) \rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2(2\theta - 1)r \frac{\partial u}{\partial t}$$

因此与原方程不相容。

④ $\Delta t = r \Delta x^2$, $\theta = \frac{1}{2}$

当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时

$$F(u_{i,j}) \rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

因此差分方程与原微分方程相容。

2.3 稳定性

在解差分方程过程中, 除了离散误差之外, 还有舍入误差。这就是差分方程的理论精确解 $u_{i,j}$ 与计算机输出的实际值 $N_{i,j}$ 之差。全部误差由离散误差和总舍入误差组成。

$$\epsilon_{i,j} = u_{i,j} - N_{i,j} = (u_{i,j} - \hat{u}_{i,j}) + (\hat{u}_{i,j} - N_{i,j}) \quad (1.2.9)$$

离散误差在一定的差分格式和差分网格步长下是可以控制的。而总的舍入误差不仅与差分方程有关, 而且与计算机舍入误差有关, 也与算法有关。差分解法是以步进方式工作的。在逐步推进过程中这种误差也会逐渐积累。这种误差积累是保持有界还是恶性增长以致把解淹没在积累的误差中, 这就是数值解的稳定性问题。数值稳定性是差分格式的必须条件。也是差分方程收敛性的必要条件。因此, 在确定一个差分格式做为计算手段之前, 一定要研究该差分格式的稳定性。

常用的有两种研究稳定性的方法。一个是傅立叶分析法, 这是一种比较简单的, 但不考虑边界条件的方法。另一种方法是矩阵法。它把方程组表示为矩阵, 并考查与矩阵有关

的本征值。此外还有能量法。

(1) 傅里叶分析法

设有微分方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu \quad (1.2.10)$$

其中 L 是空间微分算子。写出时间层的差分方程式为:

$$u_{j+1} = T(\Delta t, \Delta x) u_j \quad (1.2.11)$$

其中 T 是相邻时间层的传递算子。

根据Parseval定理:

$$\int dx |u(x)|^2 = \int dk |\tilde{u}(k)|^2$$

以及傅氏变换的一一对应关系, 我们可以在傅氏域研究收敛性问题。上式中 $\tilde{u}(k)$ 是 $u(x)$ 的傅氏变换。

为了分析稳定性我们取一个傅里叶振型:

$$u_j = \tilde{u}_j e^{ikx} \quad (1.2.12)$$

做为(1.2.11)的解。其中 \tilde{u}_j 为傅里叶系数:

$$\tilde{u}_j = \sum_x u_j e^{-ikx} \quad (1.2.13)$$

把(1.2.12)式代入(1.2.11)式中, 得

$$\tilde{u}_{j+1} = G(\Delta t, \Delta x, k) \tilde{u}_j \quad (1.2.14)$$

其中 G 是差分方程的传递矩阵, 或称增长矩阵。我们从 $j=0$ 开始用(1.2.14)式递推, 求出一般式为:

$$\tilde{u}_j = (G(\Delta t, \Delta x, k))^j \tilde{u}_0 \quad (1.2.15)$$

稳定性要求增长矩阵在 $t=0$ 时傅里叶振型有界, 它的有限次乘积:

$$(G(\Delta t, \Delta x, k))^j \quad (1.2.16)$$

在

$$0 < \Delta t < \tau, \quad 0 \leq n \Delta t \leq T$$

条件下对所有的 k 来说是一致有界的。

我们设 $\lambda_i (i=1, 2, \dots, p)$ 是增长矩阵的特征值, 则其谱半径为:

$$R(\Delta t, k) = \max_i |\lambda_i| \quad (1.2.17)$$

一般有以下关系式:

$$R^j(\Delta t, k) \leq \|G^j(\Delta t, k)\| \leq \|G(\Delta t, k)\|^j \quad (1.2.18)$$

其中 $\|\cdot\|$ 表示范数。由此我们可以导出稳定性的Von Neumann条件如下。

Von Neumann 稳定性条件 稳定性的必要条件是, 存在常数 C_1 , 使得

$$R^j(\Delta t, k) \leq C_1 \quad (1.2.19)$$

$$0 < \Delta t < \tau, \quad 0 \leq n \Delta t \leq T, \quad \text{对所有的 } k$$

C_1 可以大于等于1。因此有:

$$R(\Delta t, k) \leq C_1^{1/j} = C_1^{\Delta t/T}, \quad 0 \leq j \leq \frac{T}{\Delta t}$$

由此得出:

$$|\lambda_i| \leq 1 + O(\Delta t) \quad (1.2.20)$$