普通高等教育地质矿产类规划教材

工程地质数值法

潘别桐 黄润秋 主编

地质出版社

普通高等教育地质矿产类规划教材

工程地质数值法

潘别桐　黄润秋　主编

地质出版社

图书在版编目(CIP)数据

工程地质数值法/潘别桐,黄润秋主编—北京:地质出版社,1994.5

普通高等教育地质矿产类规划教材

ISBN 7-116-01494-2

Ⅰ.Ⅰ… Ⅱ.①潘… ②黄…Ⅲ.工程地质—数学方法—高等教学—教材 Ⅳ.P642

中国版本图书馆 CIP 数据核字(94)第 02487 号

普通高等教育地质矿产类规划教材

工程地质数值法

地质矿产部教材编辑室编辑

潘别桐 黄润秋 主编

*

责任编辑:居涌泉

地质出版社出版发行

(北京和平里)

康利胶印厂印刷

新华书店总店科技发行所经销

*

开本:787×1092 1/16 印张:14.6 字数:328.5 千字

1994 年 4 月北京第一版 * 1994 年 4 月北京第一次印刷

印数:1500 册 定价:6.50 元

ISBN7-116-01494-2/P·1212

(京)新登字 085 号

内 容 简 介

本书系统介绍了以有限单元法为主体的数值分析方法及其在工程地质领域的应用。全书共分九章,前五章作为工程地质数值分析的基础,系统介绍了线弹性和弹塑性有限单元法的基本原理,程序设计技巧及工程地质应用;后四章是本书的提高部分,系统介绍了流变问题的有限单元法、边界单元法、离散单元法的工程地质应用和工程地质问题分析中的可能遇到的一些特殊问题的数值分析方法。

本书取材新颖、实用,突出工程地质特色、强调工程地质应用,适应工程地质专业学生的数学、力学基础。可作为高等院校本、专科生及研究生教材,亦可供从事工程地质工作的科技人员参考。

* * *

本书由陈明佑主审,经地质矿产部工程地质课程教学指导委员会会议于 1992 年 5 月讨论通过,同意作为高等学校教材出版。

* * *

前言

70年代以来，随着数学、力学理论及计算机技术的发展，以有限单元法等为主的数值分析方法在工程地质领域得到应用，并作为解决复杂介质、复杂边界条件下工程地质问题的重要理论工具而逐渐得以推广。80年代中、后期，各院校工程地质专业根据各自的办学特点，先后以高年级本科生选修课和研究生必修(学位)课的形式开设了有关这方面课程。但遗憾的是，多年来一直还没有一本针对性强、系统性好的，适合于工程地质专业教学需要的这方面教材，这与教学改革及学科的发展都是很不相适应的。为此，1990年11月在桂林召开的地矿部工程地质课程教学指导委员会会议上，委员们一致认为应在总结已有教学经验的基础上，尽早编写并出版这本教材，并建议由中国地质大学(武汉)和成都理工学院(原成都地质学院)联合主编，教材定名为《工程地质数值法》，这便是这本书的由来。

在完整性、系统性的基础上，本书突出工程地质特色、强调工程地质应用，适应工程地质专业学生的数学、力学基础，兼顾本科生和研究生教学需要，这是课指会确定的本教材的编写原则。编者们根据以上精神，在认真总结以往教学经验和本专业特点的基础上，精心取材、系统组织，于1991年3月提出了编写大纲，并开始分工编写。至1992年5月在历时一年多的编写过程中，编写组又两次开会，相互审阅、共同磋商，根据数值分析方法本身发展较快的特点，不断吸收新成果，从而保证了取材的新颖性、实用性。这里必须指出的是，本书第一主编潘别桐教授一直带病坚持本书的编写工作，即便是在重病住院治疗期间，也亲自审阅、修改初稿，直至生命的最后一刻，这本教材的完成，与他呕心沥血的工作是分不开的，特此向他表示崇高的敬意和深切的悼念。

1992年5月地矿部工程地质课程教学指导委员会在湖南长沙召开会议，会上由肖树芳、王士天、杨英华、李铁汉、陈明佑等同志组成的评审组对送审的该教材原稿进行了逐章的详细审查。在肯定原稿已圆满实现课指会编写意图的基础上，又提出了进一步的修改意见。会后，由黄润秋同志负责，根据审查意见进行全书的修改和统稿。修改稿由陈明佑教授负责审查。编者对参加本教材审查的全体同志致以衷心的感谢。

本教材共分九章：其中一、二、七、八章由中国地质大学(武汉)潘别桐、唐辉明编写；四、五、六、九章由成都理工学院黄润秋编写；第三章由佴磊(长春地质学院)和黄润秋共同编写，最后全书由黄润秋校订统编。教材的前五章作为工程地质数值分析的基础，系统介绍了线弹性和弹塑性有限单元法的基本原理，程序设计技巧及工程地质应用等，是解决一般数值分析问题的必备知识，适合于本科生教学需要；后四章是本书的提高部分，系统介绍了流变问题的有限单元法、边界单元法、离散单元法和工程地质问题分析中可能遇到的一些特殊问题的数值分析方法，适合于研究生教学需要。

限于编者的水平，书中缺点和错误在所难免，敬请读者批评指正。

编　者

1993年1月

目　录

第一章　绪论

§1.1　工程地质与工程地质数值方法

近十年来，随着电子计算机的广泛使用，解决工程地质问题的数值分析方法有了突飞猛进的发展，工程地质数值方法的不断成熟和完善，使得以解决的工程地质问题更加广泛，研究的课题更加深入。一方面，飞速发展的工程地质学不断地提出新的难题，用现成的数学力学理论对其无法作出确切的描述，工程地质数值方法为解决这类问题提供了可能的手段；另一方面，各种数值方法的不断成功应用，深化了人们对许多工程地质现象的理解，并有力地推动了工程地质学科的定量化进程。

长期以来，工程地质学被看成为经验的学科，对大多数复杂工程地质问题只能作出定性的分析。现代工程建设的规模越来越大，场地条件也越来越复杂，因而产生的工程地质问题也越来越复杂。对这些问题进行分析评价时，采用传统的解析法求解偏微分方程是不可能的，因而数值分析方法得到广泛的应用。

数值方法的突出优点是能够较好地考虑诸如介质的各向异性、非均质特性及其随时间的变化、复杂边界条件和介质不连续性等复杂地质条件。高速电子计算机的广泛使用，解决了冗繁的数值运算问题，因而数值方法日益广泛地应用在工程地质问题分析的各个方面。

在工程地质问题分析中，最常用的数值方法包括有限单元法、离散单元法和边界单元法，此外，除较早的有限差分法外，新近还发展了半解析元法和无界元法。这些数值方法都有各自的长处和短处及适用条件，不能笼统地说哪种方法更好，应当根据具体工程地质问题的特点及其边界条件加以选用。

有限差分法是最早出现的数值解法，在计算机出现以前就有了，它至今在解决一些工程地质问题中仍然有效。有限单元法从 50 年代开始盛行，现已蔚为大观。边界单元法是 70 年代兴起的一种数值方法，由于它有降维作用，且计算精度高，对于解决无限域或半无限域问题尤为理想，所以也很适用于岩(土)体工程地质问题分析。半解析元法的基本思想是 Y. K. Cheung 在 1968 年提出来的，即有限条法，它是数理方程的解析方法与数值方法相结合的求解方法，借用部分解析解以减少纯数值方法的计算工作量，适用于解决高维、无限域及动力场问题。离散单元法最早是 Cundall 在 1971 年提出来的，以后发展极快，是一种很有发展前途的数值方法。无界元法是为了解决有限元所遇到的“计算范围和边界条件不易确定”而提出来的，是解决岩石力学问题的另一类有效方法。

为了解决复杂的工程地质问题，对各种数值分析方法要扬长避短，集中各种数值方法的优点，近年来数值方法的耦合分析有了长足的进步。如有限单元法与边界元单法耦合，有限单元法与离散单元法耦合及边界单元法与离散单元法耦合等都有了不少应用，解决了不少复杂条件的数值模拟问题。

一般而言，数值方法可分为区域型和边界型两大类：区域型数值方法主要包括有限单元

法、有限差分法和离散单元法等;边界型数值方法主要是边界单元法。

采用差分法时,将所考虑的区域分割成网格,用差分近似代替微分,把微分方程变换成差分方程。也就是通过数学上的近似,把求解微分方程的问题变换成求解关于节点未知量的代数方程组的问题。

采用有限单元法时,将所考虑的区域分割成有限大小的小区域(单元),这些单元仅在有限个节点上相连接。根据变分原理把微分方程变换成变分方程。它是通过物理上的近似,把求解微分方程问题变换成求解关于节点未知量的代数方程组的问题。

离散单元法与有限单元法类似,它假定单元块体是刚体,块体单元通过角和边相接触,其力学行为由物理方程和运动方程控制。与有限单元法不同的是,它可以允许单元间相互脱离,单元可以产生较大的非弹性变形。因此,离散单元法更适用于断裂控制的岩体稳定问题。

采用边界单元法时,根据积分定理,将区域内的微分方程变换成边界上的积分方程。然后将边界分割成有限大小的边界单元,把边界积分方程离散成代数方程。同样把求解微分方程变换成求解边界节点未知量的代数方程组,然后由边界节点上的值求出区域内任一点的函数值。

§1.2 工程地质数值方法的应用与实施步骤

一、工程地质数值方法的应用范围

(一) 工程地质现象机制的研究

工程地质数值模拟对于分析工程动力地质现象的机制具有特殊的意义。过去通过工程地质定性研究,揭示了工程岩(土)体的许多机制问题,但对于一些特殊问题的机制问题爱莫能助。数值方法可以从新的角度对许多以前一直不能很好解释的问题作出分析,并揭示出许多新的规律,从而为工程地质问题的分析提供了一种新的手段。近年来,工程地质实践已经在这方面积累了越来越多的经验。

数值方法对工程地质现象与过程的模拟,主要是根据岩(土)体现有的变形破坏特征或发展阶段,在建立工程地质或岩体力学模型的基础上,再现工程岩(土)体过去的变形破坏发展演化历史,从而从整体上分析岩(土)体变形破坏内部作用过程及其全过程演化机制。一般讲,这种数值模拟的意义并不在于具体数值的“准确性”,而在于对规律的探索。

(二) 工程区岩体应力边界条件或区域构造应力的反演

通过实测获得某些点的应力值资料,推测一定范围内应力场的状况是工程地质研究中的一个很重要的内容,是工程岩体稳定性分析必不可少的资料。通过应力的反演,不仅可得到工程区地应力场的总体认识,而且可以获得工程岩体应力边界条件。

(三) 工程岩(土)体位移场和应力场的模拟

在已知工程区岩土体边界条件和外荷载的情况下,通过数值分析方法可以得到位移场和应力场分布的细节及其与外界条件的关系,这是数值方法的基本功能。此外,还可以计算应力场间接参数(如应力强度因子、断裂扩展力等)的空间分布特征。

(四) 岩(土)体稳定性模拟

通过对岩(土)体变形破坏规律的模拟,可以分析其变形破坏的过程,评价其稳定性性

状，并预测其未来变化。具体而言，可以解决两类问题：一是在已知边界条件和地质模型条件下的模拟再现，即通过模拟再现过去的发展历史，从而评价工程岩(土)体的稳定性现状；并在此基础上，通过对模型的时间延拓，预测其稳定性未来发展变化的趋势或失稳破坏方式；二是在边界条件及主导因素尚不甚清楚的条件下的模拟验证，即以不同的边界条件和主导因素建立力学模型，进行数值模拟，确定出对地质体变形破坏现状特征或演化阶段拟合得最好的模型，从而确定岩体变形破坏的边界条件和主导因素，进而评价其稳定性。

工程地质数值模拟不是一个简单的"运算"过程，而是包含着从野外工程地质调查到室内试验研究、地质力学模型抽取、计算模拟和野外验证的全过程，它的可靠性和准确性在很大程度上取决于对地质原型认识的正确性。

二、工程地质数值模拟的工作步骤和研究内容

(一) 工程地质条件的调研

工程地质条件的查明是工程地质工作也是数值分析的基础和前提。对于工程地质条件的调研，不仅限于地面测绘，野外坑槽探、钻探、物探、试验和长期观测也是常用的手段。各具体的工程地质问题所侧重的调研内容不尽相同，如对区域稳定性问题，着重研究的是地壳现代应力场特征、断裂的现代活动与地震以及与此相关的水文地质条件等。值得注意的是，岩土体物理力学参数的测试，与地质体本构关系相关的地质条件的查明是本阶段不可忽视的工作。

(二) 地质模型的抽取

地质模型是在工程地质条件综合分析的基础上，对工程地质体的概括或简化，也就是通常所说的定性研究结论的归纳，故也可称为"概念模型"。如对水库诱发地震控制性断裂的认识、地质边界条件、水文地质条件的组合特征、断层危险性分区分带及可能震中的判断等，即可看作为水库诱发地震的地质模型。应当看到，这种对地质体的认识必须是全面的、总体的，否则只能看作为模型的某一片断。可以认为，工程地质工作的主要任务就是在查明工程地质条件的基础上，论证地质模型，解决工程地质问题。

(三) 力学模型的建立

在地质模型的基础上，通过合理的抽象、简化和概括，便可建立工程地质数值分析的力学模型。力学模型是直接用作数值计算的，因此它必须突出控制工程地质问题的主导因素，既能准确地反映地质体的客观实际，同时又具有力学分析的可能性和计算机条件保障的可行性。与力学模型建立直接相关的几个问题包括：(1)具相对独立的力学结构范围的选取；(2)地质体条件(包括诸如断裂的选取)的确定；(3)计算边界条件(位移边界条件、应力边界条件和混合边界条件)的选用等。

(四) 数值计算结果的检验

数值计算应当满足一定的精度和可靠度。除通过适当的数学手段可进行检验外，最根本的方法是将计算结果与实际工程地质条件对比。有时需要进行必要的理论分析和模型试验。检验时如果只挑选少数的数据核对，可能由于机会上的巧合，结论仍是错误的。只有针对具体的问题，采用整套的数据，才能取得真正符合实际的检验效果。如果数值计算结果存在较大的误差，应当着手改善输入数据，修改力学模型和数值计算方法，有时需要对计算模型进行调整。

§1.3 工程地质数值方法的局限性

工程地质数值方法只是解决工程地质问题的一种手段，它的正确与否在很大程度上取决于对工程地质条件的研究，而且必须通过工程地质实践加以检验。

首先，地质体是在漫长地质历史时期形成的复杂体系，它不仅表现在岩性的复杂多变，还表现在地质结构面的千差万别，而且这些因素随着时间和空间都在不断变化着。因此，通过理论的本构关系和计算模型来模拟这种复杂的过程与现象就不可避免地存在着偏差。

同时，还应当看到，人们对地质体的认识仍在不断深化和发展着，有一些问题目前仍不能很好地认识和解决。如对与时间有关的变形和断裂现象仍在不断的探索之中，如果对之相关的数值模拟期望过高是不切合实际的。

再者，计算参数的选取在很大程度上决定了计算结果的精确程度。由于计算参数的随机性和不确定性，它们的选取就成为工程地质数值分析中的关键问题之一。因此，对输入参数必须进行适当的统计处理，从概率分析和可靠性分析的角度提供计算参数。

可见，工程地质数值方法并不是绝对的定量化方法，它正处在不断的完善和发展之中。

在工程地质研究中，数值模拟是为了正确描述研究对象，预测和解决工程实际问题；同时，在分析过程中深化对研究对象及其模型的认识。数值分析结果的合理性在很大程度上取决于模型建立的正确性和输入参数的可靠性。

模型乃是实体简化而不失真的摹体。研究对象不加以简化，难以用数学语言描述，无法模拟；然而，模型如果失真，也就不是实体的摹体。判断是否失真的准则是"等效性"，即模型对于激励的响应与实体是否一致或近似，简言之，等效性是处理特定问题时，在功能上模型对于实体的一致性或相似性。一般认为，当模拟结果以一定的精度再现，并与观测数据系列或现象类似时，便认为模型结果良好，但一定要注意问题的多解性，不注意问题的多解性常常是数值计算失误的重要原因。

由于对地质体缺乏充分正确的认识，受主观直觉的引导，或对模型本身缺乏实质性的认识，对实际资料的处理、边界条件、初始条件的确定等方面往往就会偏离实际，这将会导致建立一个歪曲问题本质的地质或力学数学模型。因此，在工程地质数值分析中，模型的正确建立是至关重要的一步。

近十年来，计算机被广泛应用于工程地质定量研究，加快了工程地质问题定量研究的步伐。与此同时，也出现了一种倾向，即认为先进的计算方法与计算手段必然获得可靠的计算结果。其实，无论计算方法与计算手段多么先进，计算结果的可靠性最终仍然取决于计算的人，取决于对工程地质条件的正确理解与概化。因此，基础地质调查，工程地质条件研究，工程地质问题的定性分析，并不因为先进计算方法与手段的出现而失去其重要性，相反，这种重要性更值得再三强调。

§1.4 工程地质数值法的学习要求

本教材在回顾必要的基础知识的基础上，主要介绍有限单元法、离散单元法和边界单元法的基本原理、工程地质分析应用过程与步骤及常用计算机程序片断。

学习本课程除应具备必要的数理基础外，还必须具备较好的工程地质基础。因为本课程

的目的并不是着重“纯计算”本身，而是在掌握数值计算基本原理的基础上，了解和掌握工程地质数值分析的前提条件、工程地质问题模型的提取方法与原则、数值方法的作用与局限性，以及成果的正确性分析与检验、成果的应用等。显然，如果对工程地质分析原理和方法一知半解，或者对工程地质研究不予重视，“偏爱”计算，以上目的是不可能达到的。这就要求在学习过程中将工程地质、岩土力学的知识加以回顾，以求融会贯通，并结合野外工程地质实践，了解工程地质数值方法在工程地质分析和研究中的地位。

在学习本课程的过程中，应注意各种数值计算方法模型的组成部分与边界条件(应力边界条件、位移边界条件或混合边界条件)的确定。这就要求对各数值方法的基本原理有较深刻的理解，并具备一定的弹塑性力学和计算数学方面的知识。

了解数值分析计算方法的实现过程是本课程的重要内容之一，应了解各部分之间的内在联系与各自的重要性，如计算参数的选择对计算结果的影响及参数确定的原则等。

通过课程的学习，还要熟悉有关程序，了解程序的结构，并能进行应用。研究生应能根据数值方法的基本原理，根据工程地质问题的要求适当地选取数值计算方法，并能根据工程地质问题的要求对程序进行修改与扩充，以解决特殊问题。

工程地质数值方法是一门实践性很强的课程，要想较好地掌握课程的内容，就必须勤于实践。课程中应辅以适当的例题，要进行模型的确定、参数选择、数据输入、计算机操作、计算结果的整理和分析的全部过程训练，否则只能是纸上谈兵而效果不好。

本书第一章介绍工程地质数值方法的基本概念及其在工程地质研究中的意义，简介工程地质数值分析的步骤、局限性和学习本课程的基本要求；第二章回顾了与本课程有关的弹塑性力学和线性代数等基本知识，以便为后续内容的学习提供必要的预备知识；第三章介绍平面线弹性问题有限单元法的基本思路、具体分析过程，并结合简例说明解题的具体步骤与成果整理；第四章简介常用高次单元的形成与构成规律及程序设计技巧；第五章介绍弹塑性非线性问题的有限单元法及实例分析；第六章简介流变问题的有限单元法分析；第七章介绍离散单元法的基本原理、分析过程和具体步骤，并分析离散单元法与其它数值方法的差异与应用范围；第八章简介边界单元法及数值计算耦合分析方法；第九章介绍不连续面模拟、卸荷及支护过程模拟、反分析问题及固-液两相介质的耦合分析等特殊问题。全书第一至四章以本科生教学为主，第五至九章以研究生教学为主，但不是截然的分界。

第二章　基础知识

工程地质数值方法建立在地质体本构关系描述的基础上，各种数值方法均可按不同的本构关系形成各自的体系。因此，弹塑性力学知识是学习工程地质数值方法的基础。

在工程地质数值计算中，最后常常归结为求解一个大型线性代数方程组，该方程组的求解是实现数值分析的必不可少的一步。

高斯求积方法是数值积分的常用方法，其具有精度高、运算量少的特点，在有限元等计算中常用。

本章首先对弹塑性力学的基本知识作一回顾，然后介绍一些较成熟的岩土本构关系，最后对大型线性代数方程组的解法及高斯求积公式作一简单的介绍。

§2.1　应力与应变

2.1.1　应力理论

2.1.1.1　应力

物体在载荷作用下，体内任意一点的应力分量共有九个，其中三个正应力分量、六个剪应力分量(图 2—1)。从而可用二阶应力张量$[\sigma_{ij}]$确定某点的应力状态为

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \tag{2-1}$$

图 2—1 中的应力符号在地质学中以压应力为正。

2.1.1.2　平衡微分方程

在外力作用下的弹塑性体处于平衡状态的必要条件是在物体内任取一微分体都必须是平衡的。物体处于平衡状态时，作用于一点的应力及体力之间必须满足平衡微分方程

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z} + F_x = 0 \\ \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z} + F_y = 0 \\ \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} + F_z = 0 \end{aligned}\right\} \tag{2-2}$$

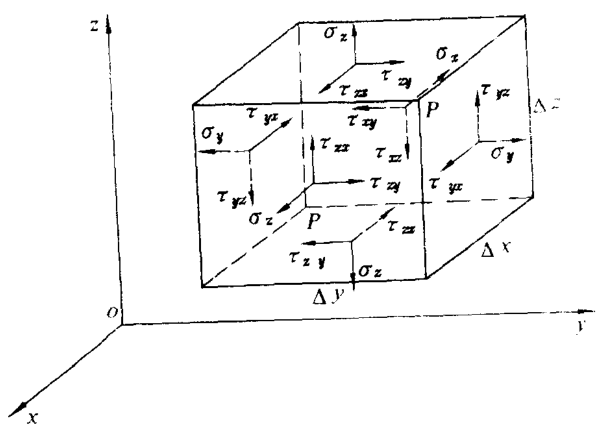

图 2—1　一点的应力状态

并有 $\tau_{xy}=\tau_{yx}$，$\tau_{yz}=\tau_{zy}$ 及 $\tau_{xz}=\tau_{zx}$。其中 F_x,F_y,F_z 是单位体力分量。由此

可知应力张量为一对称张量，其中只有六个独立元素

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ & \sigma_y & \tau_{yz} \\ & & \sigma_z \end{bmatrix}$$

2.1.1.3 静力边界条件

当物体处于平衡状态时，其内部各点的应力状态必须满足平衡微分方程(2—2)，而同时也必须满足物体表面周界的平衡条件，即静力边界条件，如已知边界面上的面力 T，其在 x，y 和 z 方向的分量为 T_x、T_y 和 T_z，则相应的应力(即静力)边界条件为

$$\left.\begin{aligned} T_x &= \sigma_x l_x + \tau_{xy} l_y + \tau_{xz} l_z \\ T_y &= \tau_{xy} l_x + \sigma_y l_y + \tau_{zy} l_z \\ T_z &= \tau_{xz} l_x + \tau_{yz} l_y + \sigma_z l_z \end{aligned}\right\} \tag{2-3}$$

其中 $l_j=\cos(j,n)$ $(j=x,y,z)$ 为物体边界的方向余弦，n 为边界的法向量。

2.1.1.4 主应力与应力主轴

由方程

$$\sigma_n^3 - I_1\sigma_n^2 - I_2\sigma_n - I_3 = 0 \tag{2-4}$$

所解出的三个根即为三个主应力，它们的方向就是主方向。

其中 $$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \tag{2-5a}$$

$$I_2 = -\ (\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zz}^2) \tag{2-5b}$$

$$[I_3] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \sigma_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \tag{2-5c}$$

如果坐标轴与主方向重合，则用主应力表示为

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \tag{2-6a}$$

$$I_2 = -\ (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 \tag{2-6b}$$

$$I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \tag{2-6c}$$

I_1、I_2、I_3 分别称为第一、第二、第三应力不变量。

2.1.1.5 应力张量的分解

应力状态可分解为球应力状态与偏应力状态，即

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_m & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_m & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_m \end{bmatrix} \tag{2-7}$$

其中：$\sigma_m = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \dfrac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$。

(2—7)式右边第一个张量称为球应力张量；第二个张量称为偏应力张量，以 $[S_{ij}]$ 表示。

$$[S_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_m & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_m & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_x & S_{xy} & S_{xz} \\ S_{yx} & S_y & S_{yz} \\ S_{zx} & S_{zy} & S_z \end{bmatrix} \tag{2-8}$$

例如，对孔隙水压力原理可表示为

$$[\bar{\sigma}] = [\sigma] - [p]$$

2.1.1.6　主偏应力、应力偏量不变量

偏应力张量$[S_{ij}]$仍组成一种应力状态，它也有主值和不变量，其主值称为主偏应力

$$[S_i]=\begin{bmatrix}\frac{2\sigma_1-\sigma_2-\sigma_3}{3} & 0 & 0\\ 0 & \frac{2\sigma_2-\sigma_3-\sigma_1}{3} & \\ 0 & 0 & \frac{2\sigma_3-\sigma_1-\sigma_2}{3}\end{bmatrix} \tag{2-9}$$

其中：$S_1=\sigma_1-\sigma_m=\sigma_1-\frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{3}=\frac{2\sigma_1-\sigma_2-\sigma_3}{3}$；

$S_2=\sigma_2-\sigma_m=\frac{2\sigma_2-\sigma_1-\sigma_3}{3}$；　　$S_3=\sigma_3-\sigma_m=\frac{2\sigma_3-\sigma_1-\sigma_2}{3}$。

类似地可得到方程

$$S^3-J_2S-J_3=0 \tag{2-10}$$

其三个解即为主偏应力，其中

$$\left.\begin{aligned}J_1&=S_1+S_2+S_3=0\\ J_2&=\frac{1}{6}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2]=-S_1S_2-S_2S_3-S_3S_1\\ J_3&=S_1S_2S_3\end{aligned}\right\} \tag{2-11}$$

分别称为第一、第二、第三偏应力不变量。

2.1.1.7　八面体应力

当以三个主应力方向作为坐标，容易确定这样的平面，该面的外法线与三个坐标轴成等夹角，且使八面体正应力和剪应力作用于平面上。图2—2示出这样的平面共有八个，故命名为八面体应力。八面体正应力和剪应力别为

$$\sigma_8=\frac{1}{3}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)=\sigma_m \tag{2-12}$$

$$\tau_8=\frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}=\sqrt{\frac{2}{3}J_2} \tag{2-13}$$

2.1.2　应变理论

2.1.2.1　应变-位移关系式

物体的变形可用应变描述。若在x,y和z方向上的位移分别为u,v,w,则应变分量为

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x&=\frac{\partial u}{\partial x},\varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y},\varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z}\\ \gamma_{xy}&=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x},\\ \gamma_{xz}&=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\\ \gamma_{yz}&=\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\\ \gamma_{ij}&=2\varepsilon_{ij}\end{aligned}\right\} \tag{2-14}$$

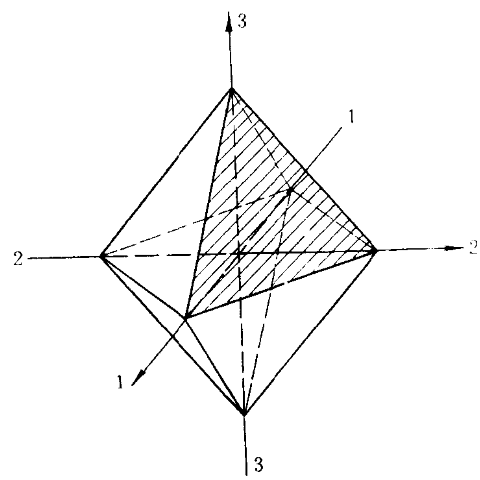

图2—2　八面体应力

如将应变用二阶张量表示，则

$$[\varepsilon_{ij}]=\begin{bmatrix}\varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz}\\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz}\\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz}\\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz}\\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z\end{bmatrix} \tag{2-15}$$

2.1.2.2 位移边界条件

如受力物体边界处于约束条件下，也即在边界上给定位移 $\bar{u}_i$ 即 $\bar{u},\bar{v},\bar{w}$，它们是边界坐标的已知函数，如令给定位移的边界为 S_u，则在 S_u 上应建立物体的点的位移与给定位移相等的边界条件——位移(几何)边界条件：

$$u_i=\bar{u}_i \quad (i=1,2,3) \quad (\text{在 } S_u \text{ 上}) \tag{2-16}$$

或

$$u=\bar{u},v=\bar{v},\quad w=\bar{w}(\text{在 } S_u \text{ 上}) \tag{2-16'}$$

2.1.2.3 主应变与应变主轴

主应变可由下列方程的三个根得出

$$\varepsilon_n^2-I'_1\varepsilon_n-I'_2\varepsilon_n-I'_3=0 \tag{2-17}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}&I'_1=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z=\varepsilon_{ii}\\ &I'_2=-\varepsilon_x\varepsilon_y-\varepsilon_y\varepsilon_z-\varepsilon_z\varepsilon_x+\varepsilon_{xy}^2+\varepsilon_{yz}^2+\varepsilon_{zx}^2=\frac{1}{2}(\varepsilon_{ii}\varepsilon_{jj}-\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij})\\ &[I]'_3=\begin{vmatrix}\varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz}\\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz}\\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z\end{vmatrix}\end{aligned}\right\} \tag{2-18}$$

分别称为第一、第二和第三应变不变量。

2.1.2.4 变形连续条件(应变协调方程)

应变分量 ε_{ij} 应当满足一定的变形连续条件或称应变协调方程。即有

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y}\\ &\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2\gamma_{yz}}{\partial y\partial z}\\ &\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial z^2}=\frac{\partial^2\gamma_{zx}}{\partial y\partial z}\\ &\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}+\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}-\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}\right)=2\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y\partial z}\\ &\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}+\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}-\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}\right)=2\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial z\partial x}\\ &\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}-\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}\right)=2\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial x\partial y}\end{aligned}\right\} \tag{2-19}$$

2.1.3 平面中的应力与应变

很多重要的问题，可以按平面应力或平面应变问题考虑，于是前述三向应力和三向应变就可得以简化。此时，主应力为($\sigma_2=0$)

$$\left.\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) + \tau_{xy}^2} \\ \sigma_3 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) + \tau_{xy}^2}\end{aligned}\right\} \tag{2-20}$$

最大剪应力为

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \tag{2-21}$$

对二维的应力状态,莫尔图是一种简便的表示方法。读者可对此作一回顾。

主应变为

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \gamma_{xy}^2} \\ \varepsilon_2 &= 0 \\ \varepsilon_3 &= \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \gamma_{xy}^2}\end{aligned}\right\} \tag{2-22}$$

最大剪应变为

$$\gamma_{\max} = 2\varepsilon_{\max} = \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2} \tag{2-23}$$

2.1.4 弹塑性力学问题的基本解法

求解弹塑性力学问题的目的,在于求出物体内各点的应力和位移,即应力场和位移场。具体地说,对物体内每一点,应满足平衡方程、几何方程、本构方程,对塑性状态还要满足屈服条件。同样,在边界上要满足全部边界条件。

弹性力学的 15 个基本方程(泛定方程)含有 15 个未知函数,是一个封闭的方程组,在所有满足泛定方程的应力、应变和位移分布的函数中,只有与边界条件相符合的解,才是所需要的解答。

在求解以上边值问题时,有三种不同的处理方法,即

(1) 位移法,用位移作为基本未知量来求解边值问题,此时将一切未知量和基本方程都转换为用位移表示。通常对于位移边界条件,宜用位移法。

(2) 应力法,用应力作为基本未知量来求解边值问题,此时将一切未知量和基本方程都转换成用应力表示。显然,当给定应力边界条件时,宜用应力法。

(3) 混合法,对混合边界条件采用各点的一部分位移分量和一部分应力分量作为基本未知量求解。

可见,对于弹性力学问题需要在严格边界条件下解复杂的微分方程组。在一般情况下,这是一件很不容易的事,因为往往难以克服数学上的困难。

2.1.5 虚功及虚功方程

设图 2－3 所示弹性体作用下处于平衡状态。i 点所受的外力沿坐标轴的分量为 F_{xi}、F_{yi} 及 F_{zi},在点 j 所受的外力沿坐标轴的分量为 F_{xj}、F_{yj} 及 F_{zj},等等,合起来用列向量$\{F\}$表示,由于外力$\{F\}$作用而在弹性体内产生的应力用列向量$\{\sigma\}$表示,即