《动力气象学》习题解

刘余滨 刘式适

气象出版社

《动力气象学》习题解

刘余滨　刘式适

气　象　出　版　社

一九八三年

内 容 简 介

本书以杨大升等编著的《动力气象学》修订版中的习题为准，用明确的思路，简炼的方法和步骤，解答了第1—17章的215个习题。这对于学生，尤其是广大自学者理解基本概念、提高分析和解决问题的能力很有帮助。

本书可供大专院校师生及广大气象科技工作者学习参考。

《动力气象学》习题解

刘余滨　刘式适

气 象 出 版 社 出 版

（北京西郊白石桥路46号）

北 京 印 刷 一 厂 印 刷

新华书店北京发行所发行　全国各地新华书店经售

开本：787×1092 1/32　印张：11.5　字数：245千字

1983年11月第一版　1983年11月第一次印刷

印数：1—15,000

科技新书目：50—94　统一书号：13194·0116

定价：2.10 元

前　　言

本书系杨大升等编著的《动力气象学》一书的附篇，即习题解答部分。

解答动力气象学习题，是学好动力气象学的重要环节，对于复习和巩固基本概念、提高分析问题和解决问题的能力都有很大的帮助。为了帮助学生尤其是自学者进行自我检查，我们将过去的教学资料重新加以整理和演算，编写了这本题解，以供读者在学习中参考。

在编写过程中，我们力求解题思路明晰，步骤清楚，方法简炼。对较为复杂的问题，为使读者易于理解，作了适当的分析和说明。对有些题目，我们还给出了不同的解法。

本题解的选题是以《动力气象学》修订版为准的，全书除第 18 章没有习题外，其余各章共有 200 余题。其中第 1—9 章是由刘余滨同志编写，第 10—17 章是由刘式适同志编写。由于作者水平所限，其中一定有不少错误或不妥之处，敬盼读者予以指正。

作者

一九八二年六月于北京

目　　录

第一章　大气热力学的物理基础

1. 试用下表中干空气各成分的容积比，计算干空气比气体常数。

气体成分	容积比（百分数）	分子量
氮(N_2)	78.09	28.013
氧(O_2)	20.95	31.999
氩(Ar)	0.93	39.948
二氧化碳(CO_2)	0.03	44.010

【解】 取一干空气团，使其所含各成分的气压和温度均变成 p_d 和 T。这时对其中任一气体成分来说，均满足状态方程

$$p_d V_i = \frac{M_i}{\mu_i} R^* T \tag{1}$$

其中 i 是组成干空气的某一成分的标号。

将(1)式改写成

$$p_d V \frac{\mu_i V_i}{V} = M_i R^* T$$

然后求和，并注意

$$\sum_i M_i = M_d \tag{2}$$

则

$$p_d V \sum_i \mu_i \frac{V_i}{V} = M_d R^* T \tag{3}$$

将上式与

$$p_d V=\frac{M_d}{\mu_d}R^*T \tag{4}$$

对比，可知

$$\mu_d=\sum_i \mu_i\frac{V_i}{V} \tag{5}$$

利用给定的各成分容积比 V_i/V，算出 $\mu_i\frac{V_i}{V}$ 的结果如下：

i	1	2	3	4
$\mu_i\frac{V_i}{V}$	21.875	6.704	0.372	0.013

于是由(5)式得到

$$\mu_d=28.964$$

因而

$$R_d=\frac{R^*}{\mu_d}=\frac{8.314}{28.964}=2.870\times10^{-1}\text{焦尔·克}^{-1}\cdot\text{度}^{-1}$$

2．水银气压表水银柱上端真空部分混进了空气，因此它的读数比实际气压低。当标准气压表读数为 768 毫米，它的读数只有 748 毫米，这时水银柱顶端到管顶距离为 80 毫米，当时气温为10℃。问当气压表读数为 734 毫米，气温为 15℃ 时，实际的气压应为多少？

［解］ 已知气温 $t_1=10$℃时，标准气压表读数 $p_1=768$ 毫米，有空气的气压表读数 $p_1^*=748$ 毫米，当气温 $t_2=15$℃时，标准气压表读数为 p_2 时，有空气的气压表读数为 $p_2^*=734$ 毫米。则气压表水银柱顶端的空气，由状态方程，有以下关系

$$\frac{(p_1-p_1^*)(H-h_1^*)}{273+t_1}=\frac{(p_2-p_2^*)(H-h_2^*)}{273+t_2}$$

而

$$p_2=p_2^*+\frac{273+t_2}{273+t_1}\ \frac{(p_1-p_1^*)(H-h_1^*)}{H-h_2^*}$$

式中H为管中注满水银时的总长度，h_1^*、h_2^*分别为有空气的气压表在第一、二种情况下的水银柱高度，显然h_1^*、h_2^*即为p_1^*、p_2^*的毫米数。

由题设

$$H-h_1^*=80\text{ 毫米}$$

故

$$H=80+h_1^*=80+748=828\text{ 毫米}$$

将其它给定的数据代入，最后算出

$$p_2=751\text{ 毫米}$$

3. 气压为 960 毫巴，气温为 25°C，相对湿度为 35%，求绝对湿度、比湿和虚温。(利用马格纳斯经验公式计算饱和水汽压)

【解】 (1) 比湿

已知比湿

$$q=0.622\frac{e}{p}=0.622\frac{Er}{p}$$

将马格纳斯经验公式

$$E=E_0\times 10^{\frac{7.5t}{237+t}}$$

代入，则

$$q=0.622\frac{rE_0}{p}\times 10^{\frac{7.5t}{237+t}}$$

令 $r=0.35$, $p=960$ 毫巴，$t=25$°C，$E_0=6.11$ 毫巴，由

上式算出

$$q=7.2\times10^{-3}$$

(2) 虚温

利用虚温公式

$$T_v=T(1+0.608\,q)$$

将已知数据代入，算得

$$T_v=299\ K$$

(3) 绝对湿度

由比湿定义

$$q=\frac{\rho_v}{\rho}$$

和状态方程

$$p=\rho\,R_dT_v$$

可得绝对湿度

$$\rho_v=\rho\,q=\frac{pq}{R_dT_v}$$

于是将已知数据代入，算出

$$\rho_v=8.1\ 克\cdot米^{-3}$$

4. 如虚温为32°C，气温为29°C，求气压为1000毫巴时的比湿和绝对湿度。

[解] (1) 比湿

由虚温计算公式

$$T_v=T(1+0.608\,q)$$

解出

$$q=\frac{1}{0.608}\left(\frac{T_v}{T}-1\right)$$

将给定数据代入，得

$$q=16.3\times10^{-3}$$

(2) 绝对湿度

由比湿定义

$$q=\frac{\rho_v}{\rho}$$

解出 ρ_v 后，利用状态方程 $p=\rho R_d T_v$ 将空气密度 ρ 代换，则得

$$\rho_v=\rho q=\frac{pq}{R_d T_v}$$

于是将已知数据代入，算出

$$\rho_v=18.6\text{克}\cdot\text{米}^{-3}$$

5．1克分子气体准静力地由体积 V_1 等温地膨胀到 V_2，如其状态方程为

$$\left(p+\frac{a}{V^2}\right)(V-b)=R^*T \quad \text{（范德瓦尔斯方程）}$$

a、b 是常数，求膨胀作功。

【解】 气体对外界所作的元功为

$$\delta W=pdV$$

将

$$\left(p+\frac{a}{V^2}\right)(V-b)=R^*T$$

中 p 解出，然后代入前式并积分之（注意 T 为常数）

$$\int_0^W \delta W=\int_{V_1}^{V_2}\left(\frac{R^*T}{V-b}-\frac{a}{V^2}\right)dV$$

得由 V_1 到 V_2 等温膨胀气体对外所作的功

$$W=R^*T\ln\left(\frac{V_2-b}{V_1-b}\right)+a\left(\frac{1}{V_2}-\frac{1}{V_1}\right)$$

6．计算下列热力过程的干空气的比内能、比焓和比熵

的变化：

(1) 等温膨胀由 $\alpha_d=900$ 厘米^3·克$^{-1}$ 到 950 厘米^3·克$^{-1}$；

(2) 等压加热由 $t=-10$°C到 10°C；

(3) 等容冷却由 $t=10$°C到 -10°C；

(4) 绝热压缩由 $\alpha_d=900$ 厘米^3·克$^{-1}$ 到 850 厘米^3·克$^{-1}$。(设起始温度为 0°C)

[解] (1) 等温膨胀时的情形

因

$$du_d=c_{vd}dT=0$$

故比内能不变。

又

$$dh_d=c_{pd}dT=0$$

比焓亦不变。

比熵的微分

$$ds_d=\frac{\delta q}{T}=\frac{p_d d\alpha_d}{T}=\frac{R_d}{\alpha_d}d\alpha_d$$

积分之，得

$$s_{d2}-s_{d1}=R_d\ln\frac{\alpha_{d2}}{\alpha_{d1}}$$

故当 $\alpha_{d1}=900$ 厘米^3·克$^{-1}$和$\alpha_{d2}=950$ 厘米^3·克$^{-1}$时，比熵变化

$$\Delta s_d=s_{d2}-s_{d1}=15.5\times10^{-3}\text{焦尔·克}^{-1}\text{·度}^{-1}$$

(2) 等压加热时的情形

因

$$du_d=c_{vd}dT$$

积分之，得

$$u_{d2}-u_{d1}=c_{vd}(T_2-T_1)$$

故当 $T_1=263$ K和 $T_2=283$ K时，比内能变化

$$\Delta u_d=u_{d2}-u_{d1}=14.4\ 焦尔\cdot克^{-1}$$

又

$$dh_d=c_{pd}dT$$

积分之，得

$$h_{d2}-h_{d1}=c_{pd}(T_2-T_1)$$

则比焓变化

$$\Delta h_d=h_{d2}-h_{d1}=20.1\ 焦尔\cdot克^{-1}$$

比熵的变化，由

$$ds_d=\frac{\delta q}{T}=c_{pd}\frac{dT}{T}$$

得

$$s_{d2}-s_{d1}=c_{pd}\ln\frac{T_2}{T_1}$$

故

$$\Delta s_d=s_{d2}-s_{d1}=73.7\times10^{-3}\ 焦尔\cdot克^{-1}\cdot度^{-1}$$

(3) 等容冷却时的情形

由

$$du_d=c_{vd}dT$$

得

$$u_{d2}-u_{d1}=c_{vd}(T_2-T_1)$$

故当 $T_1=283$ K和 $T_2=263$ K时，比内能变化

$$\Delta u_d=u_{d2}-u_{d1}=-14.4\ 焦尔\cdot克^{-1}$$

又

$$dh_d=c_{pd}dT$$

故

$$h_{d2}-h_{d1}=c_{pd}(T_2-T_1)$$

则

$$\Delta h_d=h_{d2}-h_{d1}=-20.1\ \text{焦尔·克}^{-1}$$

比熵的变化为

$$ds_d=\frac{\delta q}{T}=c_{vd}\frac{dT}{T}$$

得

$$s_{d2}-s_{d1}=c_{vd}\ln\frac{T_2}{T_1}$$

则

$$\Delta s_d=s_{d2}-s_{d1}=-52.6\times10^{-3}\text{焦尔·克}^{-1}\cdot\text{度}^{-1}$$

(4) 绝热压缩时的情形

先计算绝热压缩后的温度。

由热力学第一定律和状态方程，有

$$c_{vd}dT-p_d d\alpha_d=c_{vd}dT+R_dT\frac{d\alpha_d}{\alpha_d}=0$$

则

$$\frac{dT}{T}=-\frac{R_d}{c_{vd}}\frac{d\alpha_d}{\alpha_d}$$

积分上式，得

$$\ln\frac{T_2}{T_1}=-\frac{R_d}{c_{vd}}\ln\frac{\alpha_{d2}}{\alpha_{d1}}$$

则

$$T_2=T_1\left(\frac{\alpha_{d1}}{\alpha_{d2}}\right)^{\frac{R_d}{c_{vd}}}=T_1\left(\frac{\alpha_{d1}}{\alpha_{d2}}\right)^{\kappa_d-1}$$

式中 $\kappa_d=\frac{c_{pd}}{c_{vd}}=1.400$。令 $\alpha_{d1}=900$ 厘米^3·克$^{-1}$，$\alpha_{d2}=850$ 厘米^3·克$^{-1}$，$T_1=273\text{K}$，则由上式算出

$$T_2=279\,\mathrm{K}$$

比内能的变化

$$\Delta u_d=u_{d2}-u_{d1}=c_{vd}(T_2-T_1)=43.1\times10^{-1}\text{焦尔·克}^{-1}$$

比焓的变化

$$\Delta h_d=h_{d2}-h_{d1}=c_{pd}(T_2-T_1)=60.3\times10^{-1}\text{焦尔·克}^{-1}$$

比熵，由

$$ds_d=\frac{\delta q}{T}=0$$

可知绝热压缩前后不变。

7. 质量为 M_1、M_2，分子量为 μ_1、μ_2，开始时它们各占体积 V，温度为 T，由于互相扩散，最后气体均匀混合，占体积 $2V$。求两种气体混合前后熵的变化。

[解] 将两种气体看作一个封闭的热力系统，其所进行的扩散混合过程显然为不可逆过程，故整个系统的熵变 dS 应大于零。从另一方面分析，由于过程是绝热的且整个系统不作功，故系统总内能不变，即系统过程的前后温度不变。为计算此不可逆过程熵的变化，可设计一可逆过程，由过程的初态变化到终态，这一可逆过程熵的变化即此不可逆过程熵的变化。

令两种气体各自独立地由初态等温膨胀到终态。则第一种气体熵的微分，由热力学第一定律和状态方程

$$dS_1=\frac{\delta Q_1}{T}=\frac{p_1}{T}dV=R^*\frac{M_1}{\mu_1}\frac{dV}{V}$$

第二种气体熵的微分

$$dS_2=\frac{\delta Q_2}{T}=R^*\frac{M_2}{\mu_2}\frac{dV}{V}$$

而整个系统熵的微分

$$dS = dS_1 + dS_2 = R^*\left(\frac{M_1}{\mu_1} + \frac{M_2}{\mu_2}\right)\frac{dV}{V}$$

将上式积分，体积由V增到$2V$，则两种气体混合前后熵的变化

$$\Delta S = \Delta S_2 - \Delta S_1 = R^*\left(\frac{M_1}{\mu_1} + \frac{M_2}{\mu_2}\right)\ln 2$$

8. 温度升高10%，气压下降20%，问干空气的比熵如何变化？

【解】 设过程为可逆的，由热力学第一定律，则

$$ds = c_{pd}\frac{dT}{T} - R_d\frac{dp}{p} \tag{1}$$

积分上式，得

$$s_{d2} - s_{d1} = c_{pd}\ln\frac{T_2}{T_1} - R_d\ln\frac{p_2}{p_1} \tag{2}$$

令

$$\begin{cases} T_2 = T_1 + \Delta T \\ p_2 = p_1 + \Delta p \end{cases} \tag{3}$$

将其代入(2)中，得

$$s_{d2} - s_{d1} = c_{pd}\ln\left(1 + \frac{\Delta T}{T_1}\right) - R_d\ln\left(1 + \frac{\Delta p}{p_1}\right) \tag{4}$$

令$\frac{\Delta T}{T_1} = 0.1$，$\frac{\Delta p}{p_1} = -0.2$，由上式算出干空气比熵变化

$$\Delta s_d = s_{d2} - s_{d1} = 1.6\times 10^{-1}\text{焦尔}\cdot\text{克}^{-1}\cdot\text{度}^{-1}$$

9. 证明M克温度为T_1和M克温度为T_2的水在等压和绝热情况下，混合过程是不可逆的。

【证】 将某一温度T_0作为计算熵的起点，即当$T = T_0$时，$S_0 = 0$。则通过设计一个可逆等压变态过程，两部分水

各自由 T_0 开始增到 T_1 和 T_2，可求出混合前这两部分水的总熵。

由热力学第一定律

$$dS=\frac{\delta Q}{T}=Mc_w\frac{dT}{T}$$

式中 c_w 是水的比热。积分上式由 T_0 到 T，得

$$S=Mc_w\ln\frac{T}{T_0}$$

于是温度为 T_1 的那部分水的熵

$$S_1=Mc_w\ln\frac{T_1}{T_0}$$

温度为 T_2 的那部分水的熵

$$S_2=Mc_w\ln\frac{T_2}{T_0}$$

两部分水在混合前，其总熵

$$S_{\mathrm{I}}=S_1+S_2=Mc_w\ln\frac{T_1T_2}{T_0^2} \tag{1}$$

因两部分水混合后的温度

$$T_{\mathrm{II}}=\frac{T_1+T_2}{2}$$

故两部分水混合后的总熵

$$S_{\mathrm{II}}=2Mc_w\ln\left(\frac{T_1+T_2}{2T_0}\right)=Mc_w\ln\left(\frac{T_1+T_2}{2T_0}\right)^2 \tag{2}$$

混合后，两部分水的总熵变化

$$\Delta S=S_{\mathrm{II}}-S_{\mathrm{I}}=Mc_w\ln\left(\frac{T_1+T_2}{2T_0}\right)^2-Mc_w\ln\frac{T_1T_2}{T_0^2}$$

$$=Mc_w\ln\left[\frac{(T_1+T_2)^2}{4T_1T_2}\right]=Mc_w\ln\left[\frac{(T_1+T_2)^2}{(T_1+T_2)^2-(T_1-T_2)^2}\right]$$

$$=Mc_w\ln\left[\frac{1}{1-\frac{(T_1-T_2)^2}{(T_1+T_2)^2}}\right]>Mc_w\ln 1=0$$

故两部分水的混合过程为增熵过程，即为不可逆过程。

10．10 克 0°C 固态水变成沸点温度的水汽，求其熵的变化。

[解] 质量为 $M=10$ 克 0°C 的固态水变成沸点温度的水汽，可分解为三个过程来考虑，即 0°C 固态水 ⟶ 0°C 液态水 ⟶ 100°C液态水 ⟶ 100°C水汽。先分别地计算每一过程熵的变化，然后将其相加，即得由 0°C固态水 ⟶ 100°C水汽时熵的变化。

0°C固态水 ⟶ 0°C液态水，熵的变化为

$$\Delta S_1=\frac{ML_{iw}}{T_0}$$

0°C液态水 ⟶ 100°C液态水，熵的变化为

$$\Delta S_2=\int_{T_0}^{T}\frac{Mc_w}{T}dT=Mc_w\ln\frac{T}{T_0}$$

100°C液态水 ⟶ 100°C水汽，熵的变化为

$$\Delta S_3=\frac{ML_{wv}}{T}$$

故 0°C固态水 ⟶ 100°C水汽，熵的变化

$$\Delta S=\Delta S_1+\Delta S_2+\Delta S_3=\frac{ML_{iw}}{T_0}+Mc_w\ln\frac{T}{T_0}+\frac{ML_{wv}}{T}$$

令 $M=10$ 克，$T_0=273\,\mathrm{K}$，$T=373\,\mathrm{K}$，$c_w=4.187$ 焦尔·克$^{-1}$·度$^{-1}$，$L_{iw}=333.6$焦尔·克$^{-1}$，$L_{wv}=2500.6-2.37t=2500.6-237=2263.6$ 焦尔·克$^{-1}$，则由上式算得 0°C固态水 ⟶ 100°C水汽时熵的变化

$$\Delta S=86.0\ \text{焦尔·度}^{-1}$$