经济管理·计算机·工科

应用模糊数学

(修订版)

韩立岩 汪培庄/著

首都经济贸易大学出版社

应用模糊数学

（修订版）

韩立岩　汪培庄　著

首都经济贸易大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

应用模糊数学/韩立岩,汪培庄著. —2版(修订版),1998.1
ISBN 7-5638-0129-4

Ⅰ.应… Ⅱ.①韩… ②汪… Ⅲ.模糊数学:应用数学 Ⅳ.O159

中国版本图书馆 CIP 数据核字(97)第 29516 号

应用模糊数学(修订版)
韩立岩　汪培庄　著
首都经济贸易大学出版社出版
(北京市朝阳区红庙)
河北三河腾飞印刷厂印刷
全国新华书店发行
850×1168 毫米　32 开本　11 印张　284 千字
1989 年 8 月第 1 版　1993 年 1 月第 2 版第 2 次印刷
印数:7 000—10 000
ISBN 7-5638-0129-4/O·3
定价:16.40 元

序

模糊系统理论和模糊技术在自动控制、计算机与信息处理等众多领域的应用研究与开发已经越来越深入，从实验室走向产业化的过程正在稳步发展.它在决策科学、管理科学和社会科学等领域的成功应用，也日益为人们所关注.许多探索性甚至是突破性的研究与应用成果已使之逐渐成为人们思考的重要的方法论.

韩立岩博士和他的导师汪培庄教授撰写的这部专著正是面向上述领域的读者群的.该书的第1版曾获得广泛的好评，不少院校选用为研究生和高年级本科生教材.此次修订，在听取同行专家与读者意见的基础上，进行了认真的勘误、修改与补充.其鲜明特点是，抓住模糊理论的思想实质，重点突出、言简意赅、深入浅出；在科学性与可读性、学术性与应用性、系统性与教学性权衡方面，进行了有益的尝试；对作者自己的学术思想和研究成果作了思路清晰的介绍.

一本好书应该经得起时间的考验、实践的考验和读者的考验.相信这本书会使读者开卷有益.本书的作者也期望得到广大读者的悉心指教.

中国工程院院士

郭桂蓉

1998年1月

修订版前言

自 1965 年以来，模糊数学（或称模糊集合与系统）已有 30 多年的发展历史了. 自诞生之日起，模糊数学就以计算机科学和软科学作为研究和应用的两大前沿. 本书侧重于后者，同时也涉及用于前者的方法和模型. 之所以取名《应用模糊数学》即为了兼顾数学概念、方法与应用技术、模型这两个方面. 本书力求使读者对模糊数学的原理和思想方法有一个完整的认识，同时又着眼于各种具有推广价值的实用方法、技术和模型.

本书是为经济、管理、贸易、财政和金融各专业，以及计算机和工科各专业的研究生和高年级本科生写作的；也适于从事经济管理和工程技术的研究人员和实际工作者参考阅读. 作为阅读本书的准备，读者应具有微积分、线性代数和概率论初步等方面的基础知识；如果学习过离散数学的基础知识，那么阅读起来就更为方便. 假若选作教材，大约需要 70 至 80 学时. 如果时数紧张，可以有针对性地选读部分章节. 对于数学要求不高的本科生和初学者可以略去第 8 章、第 9 章. 对于数学程度较好的工科学生、经济信息和数量经济专业的学生以及研究生可以阅读全书.

根据汪培庄提供的手稿、论文、资料及总体思想，由韩立岩执笔写作了本书的第 1 版，增加了一些自己的研究成果；并从教学出发，对部分内容重新编排，对部分概念和定理重新表述、解释和证明；还增加了经济管理方面的内容与例题. 此次修订由韩立岩负责，改正了已发现的第 1 版的错误，在模糊度、模糊预测和模糊决策等方面增加了一些内容，并对全书进行了内容修改与文字校订.

本书第 1 版及其之前的打印教材曾为北京经济学院（现名为

首都经济贸易大学)的研究生、经济信息管理系84级到91级本科生所采用,收到同学们的许多宝贵意见和建议,在此表示深深的感谢.另外,还得到使用过本书作教材的同行的悉心指教.感谢罗承忠教授,他的《模糊集引论》是本书的主要参考书之一.同时感谢经济信息管理系和基础课部有关同志的大力支持;感谢王学军、贾岚、李蔚等同学使用微机为本书的第1版排版.

此次再版,得到首都经济贸易大学出版基金的资助,责任编辑杨玲同志付出了认真的劳动,笔者表示深深的敬意.

任何一个科学概念、方法与思想不过是对于客观知识的探索,而不断的思考、修改、否定与扬弃是这一探索过程必不可少的环节.作者深知自己水平的局限,即使修订之后,书中也存在不少失误与不足.衷心感谢读者对第1版的关心与帮助,再次恳请读者新的批评与指教.

作者谨识
1998年1月修改于北京

目　录

1　模糊集合及其运算 …… 1

1.1　模糊集合 …… 2

1.2　模糊集的格运算 …… 4

1.3　模糊集的截集 …… 11

1.4　分解定理与表现定理 …… 15

1.5　模糊集的模糊度 …… 22

习题一 …… 26

2　模型识别与模糊集度量 …… 29

2.1　最大隶属原则 …… 29

2.2　内积与外积 …… 31

2.3　贴近度与择近原则 …… 37

2.4　模糊集的度量 …… 43

习题二 …… 50

3　扩展原理与模糊数 …… 55

3.1　一元扩展原理 …… 55

3.2　多元扩展原理 …… 63

3.3　模糊数及其运算 …… 66

3.4　模糊事件的概率 …… 80

3.5　模糊值函数的积分 …… 86

习题三 …… 94

4　模糊关系与聚类分析 …… 99

4.1　模糊关系的基本概念 …… 99

4.2　模糊关系的合成 …… 104

4.3 模糊关系的自反性、对称性与传递性 …… 109
4.4 模糊等价关系和相似关系 …… 116
4.5 模糊聚类分析 …… 120
习题四 …… 134
5 综合评判与模糊关系方程 …… 137
5.1 模糊关系与模糊值映射 …… 137
5.2 模糊线性变换 …… 142
5.3 综合评判 …… 148
5.4 模糊关系方程 …… 154
习题五 …… 160
6 隶属函数的计算及模糊统计 …… 164
6.1 确定隶属度的一般思想 …… 164
6.2 带信任度的德尔菲法 …… 167
6.3 随机集与集值统计 …… 170
6.4 模糊统计 …… 174
6.5 二元对比排序 …… 186
6.6 模糊集的加权综合 …… 191
习题六 …… 193
7 模糊预测和决策 …… 196
7.1 基于因果聚类的模糊预测 …… 196
7.2 模糊多项式时间序列 …… 202
7.3 变权综合 …… 209
7.4 模糊群体决策 …… 213
7.5 不完全信息中的模糊决策 …… 229
7.6 模糊与随机环境中的多阶段决策 …… 236
7.7 投资决策模型 …… 246
习题七 …… 256
8 模糊规划 …… 259
8.1 模糊限制下的条件极值 …… 259

8.2　非对称型模糊规划 …… 263
8.3　对称型模糊规划 …… 265
8.4　模糊线性规划 …… 269
8.5　多目标模糊规划 …… 280
习题八 …… 282
9　可能性测度与模糊积分 …… 284
9.1　备域和单调类 …… 285
9.2　可能性测度 …… 287
9.3　模糊积分 …… 291
9.4　基于模糊积分的综合评判 …… 298
习题九 …… 302
10　因素空间及模糊控制 …… 305
10.1　因素空间 …… 306
10.2　近似推理 …… 314
10.3　模糊控制 …… 322
习题十 …… 329
附录 A　**R** 上的常用模糊集 …… 333
附录 B　符号表 …… 336
参考文献 …… 339

1 模糊集合及其运算

概念是科学的细胞.一些概念在特定的场合有明确的外延.例如,"国家"、"男人"、"货币"、"经济法人"等等.对于这些明确的概念,在现代数学里常常用(经典)集合来表示.但是,还有相当一部分概念在一些场合不具有明确的外延.例如,"青年人".你能在年龄轴上划上两道线,表明在两道线内的就是青年人,在其外的就截然不是青年人吗?显然不能.人的生命是一个连续的过程,一个人从少年走向青年是一日一日积累的.同样,一个人从青年步入中年也是一个渐变的过程.在经济科学和管理科学中这样的概念也处处可见.比如,"通货膨胀".如果说物价上涨率超过10%就意味着通货膨胀,那么9.99%的情形呢?就绝对不是吗?而且物价上涨20%的情形与物价上涨200%的情形又如何在外延上加以区别呢?"好学生"、"高经济增长"、"大型企业"、"消费超前"、"市场占有"、"银根紧张"等等,读者可以随口举出许许多多具有外延不分明特点的概念.这样的概念相对于明确的概念,我们称之为不分明概念或者模糊概念.模糊概念在科学领域中处处可见,在社会科学中尤为突出.这是因为社会科学在以往是用人类的自然语言来叙述的,而人类的自然语言又是以模糊性为特征的.今天,人类社会已进入信息时代,进入计算机时代,进入社会科学与数理科学大交融的时代.随着计算机向智能化的发展,自然语言、知识表达、思维推理的形式化成为必不可少的前提.社会科学要求数学提供表达形式,这尤以经济科学为先锋.经济科学以其严格的定性描述和大量的定量分析而著称,这就为数学的大量引入提供了需要和可能.显然,在这个趋势中模糊概念的数学表达是必不可少的.但是传统

的集合论在模糊概念面前却显得软弱无力. 于是,1965 年美国计算机与控制论专家扎德(L. A. Zadeh)教授提出了"模糊集合论".

1.1　模糊集合

设 U 表示一些对象的集合,称之为论域. 对于 U 的一个子集 A,我们可以用它的特征函数来表示. 令

$$\chi_A(u) = \begin{cases} 1, & u \in A; \\ 0, & u \notin A. \end{cases}$$

χ_A 是定义于 U 上取值于{0,1}的函数,称为集合 A 的特征函数. χ_A 明确表示了集合 A. 对于 $u \in U$,若 $\chi_A(u)=1$,则说 u 是 A 中的元素;若 $\chi_A(u)=0$,则说 u 不是 A 中的元素. 由此出发,我们给出模糊集合的定义.

定义 1.1　设 U 是论域,U 上的一个模糊集合 A 由 U 上的一个实值函数

$$\mu_A : U \to [0,1]$$

表示. 对于 $u \in U$,$\mu_A(u)$称为 u 对于 A 的隶属度,而 μ_A 称为 A 的隶属函数.

对我们来说,模糊集合 A 是一个抽象的东西,而函数 μ_A 则是具体的,我们只能通过 μ_A 来认识和掌握 A.

过去,我们常用的集合的表达,是枚举所有元素,或者给出元素的代表及其属性(判定性质),前者是对于外延的表达,后者是对于内涵的刻画. 总之,我们称其为集合的元素表达. 而集合的另一种表达是隶属函数表达. 实际上,这是一种对于外延的表达. 我们已经看到,对于一个模糊集合来说,只有隶属函数的表达.

为简便计,常常用 $A(u)$来代替 $\mu_A(u)$. 这样,A 既表示抽象的模糊集合,又同时表示具体的隶属函数.

U 上的模糊集合的全体记为 $\mathscr{F}(U)$.

这样,对于论域 U 的一个元素 u 和 U 上的一个模糊子集 A,

我们不再是简单地问 u 是"绝对"属于还是不属于 A，而是问 u 在多大程度上属于 A. 隶属度 $A(u)$ 正是 u 属于 A 的程度的数量指标. 若 $A(u)=0$，则认为 u 完全不属于 A；若 $A(u)=1$，则认为 u 完全属于 A；若 $0<A(u)<1$，则说 u 在 $A(u)$ 的程度上属于 A. 这时在完全属于 A 和完全不属于 A 的元素之间，呈现出中间过渡状态，或叫连续变化状态. 这也正是我们所说的，A 的外延表现出不分明的变化层次，表现出模糊性.

例 1.1 以年龄为论域，取 $U=[0,200]$. 扎德给出"年轻"的模糊集 Y，其隶属函数是

$$Y(u)=\begin{cases}1, & 0\leqslant u\leqslant 25;\\ \left[1+\left(\dfrac{u-25}{5}\right)^2\right]^{-1}, & 25<u\leqslant 200.\end{cases} \tag{1.1}$$

Y 的图像如图 1.1 所示. 我们看到，年龄对"年轻"的隶属度呈现出连续的变化，Y 的外延是不分明的、模糊的，这样刻画更符合人的意识.

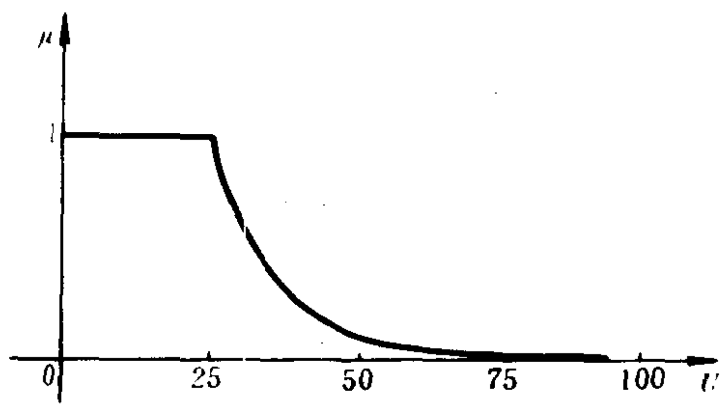

图 1.1 $Y(u)$ 曲线

当论域 U 为有限点集，即 $U=\{u_1,\cdots,u_n\}$ 时，U 上的模糊集可以用向量来表示

$$A=(\mu_1,\cdots,\mu_n),$$

这里 $\mu_i=A(u_i)$，$i=1,\cdots,n$.

一般地，若一个向量的每个坐标都在[0,1]之中，则称其为**模糊向量**. n 维模糊向量的全体记为 $\mathscr{F}_{1\times n}$.

例 1.2　考察几个企业 $a_1,a_2,\cdots,a_n$. 令 $U=\{a_1,\cdots,a_n\}$. 以 μ_i 记 a_i 的生产成本中劳动力所占比重，那么

$$A=(\mu_1,\cdots,\mu_n)$$

即可表示劳动密集型企业的模糊集.

如果将一个模糊集 A 的隶属函数限于取值 0 或 1，则 A 实际上是一个普通集合. 因此，普通集合是模糊集合的特例，或者说模糊集合是普通集合的拓广. 可用符号表示：

$$\mathscr{P}(U)\subseteq\mathscr{F}(U),$$

其中 $\mathscr{P}(U)\triangleq\{A:A\subseteq U\}$，称为 U 的幂集.

为符号上的简便，在本书里普通集与模糊集均以 A 表示，通过上下文读者可以分辨出 A 是普通集还是真模糊集.

实数域 $\mathbf{R}$ 上的模糊集在应用中常见，我们将一些隶属函数的具体形式收录于书后附录 A 中.

1.2　模糊集的格运算

在这一节里，我们将普通集合论中集合间的关系与运算推广到模糊集中去.

设 U 为论域，$\mathscr{P}(U)$为 U 上的幂集. 对于集合 $A,B\in\mathscr{P}(U)$，我们有

$$A\subseteq B:\forall\, u\in A\Rightarrow u\in B; \tag{1.2}$$

$$A\supseteq B:B\subseteq A; \tag{1.3}$$

$$A=B:A\subseteq B \text{ 且 } B\subseteq A; \tag{1.4}$$

$$A\cup B=\{u\in U:u\in A \text{ 或者 } u\in B\}; \tag{1.5}$$

$$A\cap B=\{u\in U:u\in A \text{ 且 } u\in B\}; \tag{1.6}$$

$$A^C=\{u\in U:u\notin A\}; \tag{1.7}$$

$$A-B=\{u\in U:u\in A \text{ 且 } u\notin B\}. \tag{1.8}$$

设 T 是任意指标集，则

$$\bigcap_{t\in T} A_t = \{u \in U: \forall\, t \in T, 有\ u \in A_t\}; \tag{1.9}$$

$$\bigcup_{t\in T} A_t = \{u \in U: \exists\, t \in T, 有\ u \in A_t\}. \tag{1.10}$$

下面，我们将上述关系与运算推广到模糊集之中.

定义 1.2 设 A,B 是 U 上的二模糊集.

(1) A 与 B 的并记为 $A\cup B$，其隶属函数为

$$(A \cup B)(u) = A(u) \vee B(u), \tag{1.11}$$

其中"$\vee$"表示二者比较后取大值.

(2) A 与 B 的交记为 $A\cap B$，其隶属函数为

$$(A \cap B)(u) = A(u) \wedge B(u), \tag{1.12}$$

其中"$\wedge$"表示二者比较后取小值.

(3) A 的余模糊集记为 A^C，其隶属函数为

$$A^C(u) = 1 - A(u). \tag{1.13}$$

(4) 如果 $A(u)\leqslant B(u)$，$\forall\, u\in U$，则说 A 被 B 包含，记为 $A\subseteq B$.

(5) 如果 $A\subseteq B$，则说 B 包含 A，记为 $B\supseteq A$.

(6) $A=B$ 当且仅当 $A\subseteq B$ 且 $A\supseteq B$.

设 T 是任意给定的指标集，$\forall\, t\in T$，A_t 是 U 上的模糊集.

(7) $\{A_t\}_{t\in T}$ 的并记作 $\bigcup_{t\in T} A_t$，其隶属函数为

$$\Big(\bigcup_{t\in T} A_t\Big)(u) = \bigvee_{t\in T} A_t(u), \tag{1.14}$$

其中"$\vee$"表示取上确界[①].

(8) $\{A_t\}_{t\in T}$ 的交记作 $\bigcap_{t\in T} A_t$，其隶属函数为

$$\Big(\bigcap_{t\in T} A_t\Big)(u) = \bigwedge_{t\in T} A_t(u), \tag{1.15}$$

其中"$\wedge$"表示取下确界[②].

如果我们把普通集合看作是模糊集合的特例，那么，立即可以看出普通集合按定义 1.2 的关系及运算与集合论中相应的关系及

① 一个数集的最小上界称为上确界.
② 一个数集的最大下界称为下确界.

运算是完全一致的. 因此,模糊集的上述关系与运算是对普通集合的关系及运算的推广.

例如,A,B 是 U 的二子集,χ_A 和 χ_B 为相应的特征函数. 那么,$u\in A\cup B\Rightarrow u\in A$ 或者 $u\in B$. 因而,若 $\chi_{A\cup B}(u)=1$,则有 $\chi_A(u)=1$ 或者 $\chi_B(u)=1$;若 $(A\cup B)(u)=0$,则有 $\chi_A(u)=0$ 且 $\chi_B(u)=0$. 这就证明了

$$\chi_{A\cup B}(u) = \chi_A(u) \vee \chi_B(u), u \in U.$$

这正是定义 1.2 中并的运算.

模糊集之间的关系与运算表明了它们之间的相互作用. 具体而言,模糊集的并、交、余和包含,依次表示了模糊概念的析取、合取、否定(排斥)和蕴含. 这对分析实际问题和理论研究是有重要意义的.

例 1.3 设某种商品有 8 个不同的商标,商标构成的论域为

$$U = \{u_1, u_2, \cdots, u_8\}.$$

$$A = (0.8, 0.6, 0.4, 0.7, 0.6, 0.5, 0.4, 0.3)$$

表示"商誉高",

$$B = (0.7, 0.4, 0.6, 0.8, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7)$$

表示"价格合理".

那么,"价格合理且商誉高"为

$$A \cap B = (0.7, 0.4, 0.4, 0.7, 0.4, 0.5, 0.4, 0.3),$$

而"价格合理或商誉高"为

$$A \cup B = (0.8, 0.6, 0.6, 0.8, 0.6, 0.5, 0.6, 0.7).$$

例 1.4 设 $U=[0,200]$,Y 如例 1.1 所给,令 O 表示"年老". 依照扎德的定义,其隶属函数为

$$O(u) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant u \leqslant 50; \\ \left[1 + \left(\dfrac{u-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1}, & 50 < u \leqslant 200. \end{cases} \tag{1.16}$$

于是"年轻或年老"——$Y\cup O$ 的隶属函数为

$$(Y\cup O)(u)=Y(u)\vee O(u)$$

$$=\begin{cases}1, & 0\leqslant u\leqslant 25;\\ \left[1+\left(\dfrac{u-25}{5}\right)^{2}\right]^{-1}, & 25<u\leqslant u^*;\\ \left[1+\left(\dfrac{u-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1}, & u^*<u\leqslant 200.\end{cases}$$

其中 $u^*=\frac{1}{2}(75+5\sqrt{29})=50.96291$. 若 u 取整数值,则 $u^*=51$.

"不年老"——O^C 的隶属函数为

$$O^C(u)=1-O(u)$$

$$=\begin{cases}1, & 0\leqslant u\leqslant 50;\\ 1-\left[1+\left(\dfrac{u-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1}, & 50<u\leqslant 200.\end{cases}$$

在集合论中,集合的格运算有许多良好的性质.

(1)幂等律:

$$A\cup A=A,\quad A\cap A=A. \tag{1.17}$$

(2)交换律:

$$A\cup B=B\cup A,\quad A\cap B=B\cap A. \tag{1.18}$$

(3)结合律:

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),$$
$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C). \tag{1.19}$$

(4)吸收律:

$$(A\cap B)\cup B=B,\quad (A\cup B)\cap B=B. \tag{1.20}$$

(5)分配律:

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C),$$
$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C). \tag{1.21}$$

(6)复原律:

$$(A^C)^C=A. \tag{1.22}$$

(7)两极律:

$$A\cup U=U,\quad A\cap U=A, \tag{1.23}$$

$$A\cup\varnothing=A,\quad A\cap\varnothing=\varnothing. \tag{1.24}$$

(8)对偶律(德·摩根(De Morgan)律)：

$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C, \quad (A \cap B)^C = A^C \cup B^C. \tag{1.25}$$

(9)补余律：

$$A \cup A^C = U, \quad A \cap A^C = \varnothing. \tag{1.26}$$

幂集 $\mathscr{P}(U)$加上并、交、余运算由于满足上述算律，称之为**布尔代数**.

以上 9 种算律究竟有哪些在 $\mathscr{F}(U)$中依然成立呢?

命题 1.1　在$(\mathscr{F}(U),\cup,\cap,c)$中，以上(1)～(8)的所有算律均成立，只有补余律(9)不再成立.

证明　在算律(1)～(8)中仅证对偶律(8)，其余留作习题.

$\forall\, u \in U$,

$$\begin{aligned}(A \cup B)^C(u) &= 1 - (A \cup B)(u) \\ &= 1 - (A(u) \vee B(u)) \\ &= (1 - A(u)) \wedge (1 - B(u)).\end{aligned}$$

最后一个等号成立，是因为，若设 $A(u) \leqslant B(u)$，则

$$1 - (A(u) \vee B(u)) = 1 - B(u),$$

同时

$$1 - A(u) \geqslant 1 - B(u),$$

因而

$$1 - B(u) = (1 - A(u)) \wedge (1 - B(u)),$$

于是

$$(A \cup B)^C(u) = A^C(u) \wedge B^C(u).$$

根据刚刚证明的等式，我们有

$$(A^C \cup B^C)^C = (A^C)^C \cap (B^C)^C = A \cap B,$$

进而

$$A^C \cup B^C = (A \cap B)^C.$$

这里两次使用了复原律(1.22).

最后通过反例说明补余律不成立.

取 $U=\{a,b\}$，$A=(0.5,0.7)$，$A^C=(0.5,0.3)$，