一 般 拓 扑 学

[美] S·李普舒茨 著
陈昌平　汪礼礽　王学锋　译
陈 美 廉　校

华东师范大学出版社

Seymour Lipschutz

Theory and Problems of

GENERAL TOPOLOGY

一般拓朴学

〔美〕S·李普舒茨　著

陈昌平　汪礼礽　王学锋　译

陈美廉　校

华东师范大学出版社出版

（上海市中山北路 3663 号）

新华书店上海发行所发行　宜兴县南漕印刷厂印刷

1982 年12月第一版　1982 年12月第一次印刷

开本 787×1092　1/32　印张 14.625　字数：3[illegible]0 千字

印数：1——7000 册

统一书号：13135·010　定价：1.50 元

内 容 简 介

本书阐述一般拓朴学的基本概念和方法。为了便于初学者使用，前三章论述了点集论的最基本的内容，并在附录中对实数理论作了简要的介绍。全书包含有解答的习题共650道，其中带有详细解答的普通习题410道，这部分材料是本书的有机组成部分，许多定理的证明是用习题解答的形式给出的。除这部分材料外，书中另有“补充习题”393道（一部分提供了答案），供读者练习之用。

本书取材注意了精选，叙述方法注意了深入浅出，层次分明，富于启发。本书可作为高等师范院校及其他高等学校“一般拓补学”教材或参考书使用，也宜于作为自学的书籍使用。

书中的外文名字，除大家熟悉的那些如欧基里德、笛卡尔等外，一律不予翻译而将其英文原名写上。原书中的斜体字（表示重要名词、术语）在译文中以黑体字表之，并附上原文。

序

一般拓扑学，又名点集拓扑学，近年来已经成为研究生和大学生所必须具备的极其重要的数学基础的一部分。本书可用作正式拓扑学课程的教本，或作为任何流行的标准拓扑学教科书的补充读物。对于想对这门课程获得全面而严格的入门知识的读者，本书也是一本有价值的参考书。

每章开头都是结合直观的和描述性的材料清晰地叙述适当的定义、原理和定理。接着给出由浅入深的有解答的习题和补充习题。习题解答用来使理论具体化和作详细的论述，特别把注意力集中在一些细致的论点上。如果对这些论点不作阐述，就会使学生感到缺乏坚实的基础。同时，为了使学习更有成效，习题解答中还对基本原理作必要的重复。许多定理的证明包含在习题解答中。补充习题是用来对每章内容作一次总的复习。

本书所论及的课题包括拓扑空间、度量空间和赋范空间的基本性质，隔离性公理，紧致性，积拓扑以及连通性。被证明的定理包括 Urysohn 引理和度量化定理、Tychonoff 乘积定理和 Baire 纲定理。最后关于函数空间的一章研究了逐点收敛拓扑，一致收敛拓扑和紧致收敛拓扑。另外，最初三章介绍了必需的集合论概念，第四章叙述了直线和平面上的拓扑，附录列出了实数的一些基本原理。

包括在本书中的材料要比大多数初等教程所可能涉及的

多一些。这样做是为了使本书更为灵活，在作为参考书使用时更为有效和进一步启发读者对拓扑学的兴趣。

最后，我要感谢我的一些朋友和同事，特别是 Joam Landman 博士，他们提出过极宝贵的建议和对原稿作过审阅。我还要为 Schaum 出版公司的工作人员的热忱合作，特别对 Jeffrey Albert 和 Alan Hopenwasser 两位，表示我的谢意。

Seymour Lipschutz

Temple 大学
1965 年 5 月

目　录

第一章 集与关系

集、元素（Sets, elements）

集这个概念出现于数学的各个分支。直观地说，一个集就是确切地指定了的一堆事物。我们通常用大写字母 A, B, X, Y, …等表示集。构成一个集的那些事物称为这个集的**元素**(element)，并通常用小写字母 a, b, x, y, …等表示。命题“p 是 A 的一个元素”或它的同义语“p 属于 A”记为

$$p \in A。$$

这个命题的否定命题记为 $p \notin A$。

有两种方法可用于说明某一特定的集。一种方法是：若可能的话，一一列出它的所有元素。例如

$$A = \{a, e, i, o, u\}$$

表示集 A，它的元素是字母 a, e, i, o 和 u。注意：在这记法中，元素之间用逗号分开，全体元素用花括号｛ ｝括起来。第二种方法是指出性质，这性质正好表明该集的元素的特征。例如

$$B = \{x: x\text{是整数}, x > 0\},$$

这记号读作：“B 是这样一些 x 的集，x 是整数，并且 x 是大于零”，它表示以正整数为元素的集 B。在这种记法中，通常是用 x 表示集的任意元素，冒号“:”意为“这样”，逗号“,”意为“并且”。

例 1.1 上面的集 B 也可以记为

$$B=\{1, 2, 3, \cdots\},$$

注意：$-6\notin B$, $3\in B$, $\pi\notin B$。

例 1.2 以下所定义的实直线上的区间经常在数学中出现，其中 a 与 b 是实数，且 $a<b$。

a 至 b 的开区间 $=(a, b)=\{x: a<x<b\}$,

a 至 b 的闭区间 $=[a, b]=\{x: a\leqslant x\leqslant b\}$,

a 至 b 的左开右闭区间 $=(a, b]=\{x: a<x\leqslant b\}$,

a 至 b 的左闭右开区间 $=[a, b)=\{x: a\leqslant x<b\}$.

左开右闭区间和左闭右开区间也称为**“半开区间”**(half-open interval)。

两个集 A 与 B 若有相同的元素，即：A 的每个元素均属于 B，而 B 的每个元素也均属于 A，则称 A 与 B **相等**(equal)，并记为 $A=B$。$A=B$ 的否定命题记为 $A\neq B$。

例 1.3 设 $E=\{x: x^2-3x+2=0\}$, $F=\{2, 1\}$, $G=\{1, 2, 2, 1\}$, 则 $E=F=G$。注意：一个集不依赖于它的元素的表现形式，当它的元素被重复写出或它们的排列次序被改变时，集本身保持不变。

集有**“有限集”**(finite set)与**“无限集”**(infinite set)之分。一个集若由 n 个不同的元素组成，其中 n 为某一正整数，则此集称为有限集；反之称为无限集。特别地，若一个集只含一个元素，则称为**单元素集**(singleton set)。

子集，母集（Subsets, supersets）

若集 A 的每个元素都属于集 B，即若 $x\in A$ 就有 $x\in B$，则称 A 是 B 的一个子集 (subset)，称 B 是 A 的一个**母集**(superset)。这事实记为

$$A \subset B \quad 或 \quad B \supset A。$$

这时也说：A **含在**(is contained in) B 中，或说 B **含**(contains) A。

$A \subset B$ 的否定命题记为 $A \not\subset B$ 或 $B \not\supset A$，其意为：有这样的 $x \in A$ 使得这个 $x \notin B$。

例 2.1 考察以下诸集

$$\begin{aligned} A &= \{1, 3, 5, 7, \cdots\}, \\ B &= \{5, 10, 15, 20, \cdots\}, \\ C &= \{x: x \text{ 是素数}, x > 2\} \\ &= \{3, 5, 7, 11, \cdots\}, \end{aligned}$$

则 $C \subset A$，因大于 2 的素数必须是奇数。另一方面，$B \not\subset A$，因 $10 \in B$ 但 $10 \notin A$。

例 2.2 我们用 $\mathbf{N}$ 表示正整数集；$\mathbf{Z}$ 表示整数集；$\mathbf{Q}$ 表示有理数集；$\mathbf{R}$ 表示实数集。从而

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}。$$

注意：$A \subset B$ 并不排除 $A = B$ 的可能性。事实上，集相等的定义可复述如下：

定义 两个集 A 与 B 相等的充要条件是 $A \subset B$ 同时 $B \subset A$。

当 $A \subset B$ 而 $A \neq B$ 时，称 A 为 B 的一个**真子集**(proper subset)，或说 B 真含 A。注意：有些作者用符号 $\subseteq$ 来叙述子集，而符号 $\subset$ 只用于叙述真子集。

由上述诸定义得出下面第一个定理：

定理 1.1 设任给三个集 A, B, C, 则

(i) $A \subset A$;

(ii) 若 $A \subset B$ 同时 $B \subset A$，则 $A = B$;

(iii) 若 $A \subset B$ 同时 $B \subset C$，则 $A \subset C$。

宇宙集与空集（Universal and null sets）

在集论的任何应用中，所考察的集都是某一个确定的集的一些子集。这个确定的集称为**“宇宙集”**（universal set），在本章中我们用字母 U 来表示它。

为方便起见，也引入**“空集”**（empty set 或 null set）的概念。所谓空集是指这样的集，它不含有任何元素。空集被看作是一个有限集，并且是任何其他集的一个子集，它用符号 $\varnothing$ 来表示。这样，对于任何集 A 都有 $\varnothing\subset A\subset U$。

例 3.1 在平面几何中，宇宙集就是平面上一切点所构成的集。

例 3.2 设 $A=\{x:\ x^2=4,\ x$ 是奇数$\}$，则 A 是空集，即 $A=\varnothing$。

例 3.3 设 $B=\{\varnothing\}$，则 $B\neq\varnothing$，因为 B 含有一个元素。

组、簇、空间（Classes, collections, families and spaces）

时常会讨论以集作为元素的集。例如一个直线集中的每个元素是一条直线，而每条直线本身是一个点集。为便于区别起见，我们有时用**“组”**（class 或 collection）、**“簇”**（family）这样的同义字来代替“集”这个字，即：把集之集称为“集组”，把组之集称为“组簇”，用这种说法时，**子组**（subclass 或 subcollection）或**子簇**（subfamily）的含义就和子集类似。

例 4.1 组 $\{\{2,3\},\{2\},\{5,6\}\}$ 的元素是集 $\{2,3\}$，$\{2\}$ 与 $\{5,6\}$。

例 4.2 设已给一集 A，则所谓 A 的**“势集”**（power set）

是指 A 的一切子集所构成的组，它通常记为 $\mathscr{P}(A)$ 或 2^A。例如，若

$$A=\{a, b, c\},$$

则

$$\mathscr{P}(A)=\{A, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \varnothing\}。$$

一般说，当 A 是由 n 个元素构成的有限集时，$\mathscr{P}(A)$ 含 2^n 个元素。

空间(space) 这个词是用来表示具备某种形式的数学结构的非空集。例如：向量空间，度量空间，拓扑空间等等。在这种情况下，空间的元素称为**点**(point)。

集运算（Set operations）

两个集 A 和 B 的**并**(union)，记为 $A\cup B$，是指这样的集，它由 A 的一切元素和 B 的一切元素所构成。即

$$A\cup B=\{x: x\in A \text{ 或 } x\in B\},$$

其中"或"是表示"与/或"的意思。

两个集 A 和 B 的**交**(intersection)记为 $A\cap B$，是指这样的集，它由既属于 A 又属于 B 的那些元素所构成。即

$$A\cap B=\{x: x\in A \text{ 又 } x\in B\}。$$

若 $A\cap B=\varnothing$，即若 A 和 B 没有公共的元素，则称 A 和 B **互斥或不相交**(disjoint or non-intersecting)。若在一个集组 $\mathscr{A}$ 中，任何两个集都互斥，则 $\mathscr{A}$ 称为**互斥集组**(disjoint class of sets)。

B 的相对于 A 的**相对补集**(relative complement)，或简称为 A 与 B 之**差**(difference)，记为 $A\setminus B$，是指这样的集，它由

属于A而不属于B的那些元素所构成，即

$$A\setminus B=\{x:\ x\in A,\ x\notin B\}。$$

注意：$A\setminus B$和B是互斥的，即

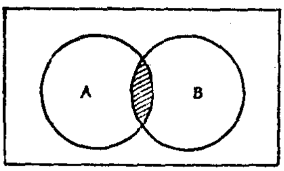
$$(A\setminus B)\cap B=\varnothing。$$

集A的**绝对补集**或简称为A的**补集**，记为A^c，是指这样的集，它由不属于A的那些元素所组成，即

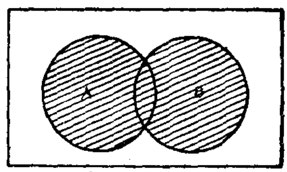
$$A^c=\{x:\ x\in U,\ x\notin A\}。$$

换句话说，A^c是宇宙集U与A之差。

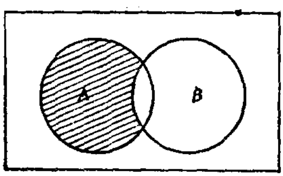
例 5.1 下列图形称为 Venn 图，用以表示上述的集的运算，其中宇宙集U由整个矩形的区域所表示，一般的集都用U内区域表示。



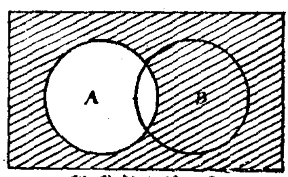
阴影部分是$A\cap B$



阴影部分是$A\cup B$



阴影部分是$A\setminus B$



阴影部分是A^c

上述集的运算满足下表中所列的一些规律。

定理 1.2 集运算满足下表中所列的规律：

集的代数规律	
幂等律(Idempotent laws)	
(1a) $A\cup A=A$	(1b) $A\cap A=A$
结合律(Assoiative laws)	
(2a) $(A\cup B)\cup C$ $=A\cup(B\cup C)$	(2b) $(A\cap B)\cap C$ $=A\cap(B\cap C)$
交换律(Commutative laws)	
(3a) $A\cup B=B\cup A$	(3b) $A\cap B=B\cap A$
分配律(Distributive laws)	
(4a) $A\cup(B\cap C)$ $=(A\cup B)\cap(A\cup C)$	(4b) $A\cap(B\cup C)$ $=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
恒等律(Identity laws)	
(5a) $A\cup\varnothing=A$	(5b) $A\cap U=A$
(6a) $A\cup U=U$	(6b) $A\cap\varnothing=\varnothing$
互补律(Complement laws)	
(7a) $A\cup A^c=U$	(7b) $A\cap A^c=\varnothing$
(8a) $(A^c)^c=A$	(8b) $U^c=\varnothing$, $\varnothing^c=U$
De Morgan **律**	
(9a) $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$	(9b) $(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$

注意 以上每一规律都是由和它相似的逻辑规律导出的。例如：

$$A \cap B = \{x: x \in A \text{ 又 } x \in B\}$$
$$= \{x: x \in B \text{ 又 } x \in A\}$$
$$= B \cap A。$$

这里我们利用了这样的事实，即命题"p 与 q"（记作($p \wedge q$) 逻辑等价于"q 与 p"（即 $q \wedge p$)。

关于集的包含关系和上列的集运算之间有以下定理：

定理 1.3 下列的每一条件都和 $A \subset B$ 等价：

(i) $A \cap B = A$; (ii) $A \cup B = B$; (iii) $B^c \subset A^c$;

(iv) $A \cap B^c = \varnothing$; (v) $B \cup A^c = U$。

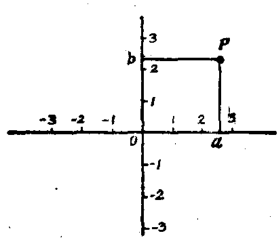
积集（Product sets）

设已知两个集 A 与 B，则 A 与 B 的**积集**（product set），$A \times B$，是由一切有序偶 $\langle a, b \rangle$ 所构成，其中 $a \in A$ 而 $b \in B$。即

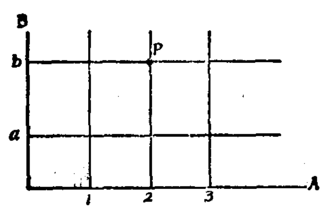
$$A \times B = \{\langle a, b \rangle: a \in A, b \in B\}。$$

一个集与它自己的积，例如 $A \times A$ 通常记为 A^2。

例 6.1 读者熟悉的笛卡儿平面就是 $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$（见图 a)。其中每一点 p 表示一个有序实数偶 $\langle a, b \rangle$，反之每个实数偶表示其中的一点。



(a)



(b)

例6.2 设$A=\{1,2,3\}$，$B=\{a,b\}$，则

$A\times B=\{\langle 1,a\rangle,\langle 1,b\rangle,\langle 2,a\rangle,\langle 2,b\rangle,\langle 3,a\rangle,\langle 3,b\rangle\}$（见图b）。

因为A和B不包含很多元素，$A\times B$可以象图a—b那样用坐标图表示。其中铅垂的直线通过A的点而水平的直线通过B的点，这样$A\times B$可表示为这些直线的六个交点。图中的点p表示有序偶$\langle 2,b\rangle$。一般说，若集A有s个元素而集B有t个元素，则$A\times B$含有$s\cdot t$个元素。

注意 概念"有序偶"$\langle a,b\rangle$的严格定义是

$$\langle a,b\rangle=\{\{a\},\{a,b\}\}。$$

由此定义，可证下面的序性质：

$$\langle a,b\rangle=\langle c,d\rangle \text{ 导致 } a=c \text{ 与 } b=d。$$

积集的概念可自然地推广到有限个集上去。集A_1，A_2，…，A_m的积集，记为

$$A_1\times A_2\times\cdots\times A_m \quad 或 \quad \prod_{i=1}^{m}A_i$$

是由一切m有序组$\langle a_1,a_2,\cdots,a_m\rangle$所构成，其中对每个$i$有$a_i\in A_i$。

关系（Relations）

由集A到集B的一个**二元关系**(binary relation)（或简称**关系**(relation)）R对于$A\times B$中的每个有序偶$\langle a,b\rangle$恰好赋于下列二命题之一：

（i）"a关联于b"，记为aRb。

（ii）"a不关联于b"，记为$a\not R b$。

由集 A 到此同一集 A 的一个关系称为 **A 中的一个关系**(a relation in A)。

例 7.1 对于任何一个集组而言，集的包含关系就是这个集组的一种关系。因为对其中的任意两个集 A 与 B 来说，或者是 $A \subset B$，或者是 $A \not\subset B$。

注意：由集 A 到集 B 的任何一种关系唯一地确定了 $A \times B$ 的一个子集 R^* 如下：

$$R^* = \{\langle a, b\rangle : aRb\}。$$

另一方面，$A \times B$ 的任何一个子集 R^* 都可以按以下方式规定一个由 A 到 B 的关系 R：

$$aRb \text{ 的充要条件是 } \langle a, b\rangle \in R^*。$$

鉴于由 A 到 B 的关系与 $A \times B$ 的子集有上述的对应关系，我们将关系重新定义如下：

定义 由 A 到 B 的一个关系 R 是 $A \times B$ 的一个子集。

设已给由 A 到 B 的一个关系 R，则由 R 中所有元素的第一个坐标所构成的集称为这个关系 R 的**定义域**(domain)，而所有元素的第二个坐标所构成的集称为 R 的**值域**(range)。即

$$R \text{ 的定义域} = \{a : \langle a, b\rangle \in R\},$$

$$R \text{ 的 值 域} = \{b : \langle a, b\rangle \in R\}。$$

R 的**逆**(inverse)，记为 R^{-1}，是由 B 到 A 的一个关系，其定义如下：

$$R^{-1} = \{\langle b, a\rangle : \langle a, b\rangle \in R\}。$$

注意 R^{-1} 可以由 R 中有序偶经过对换得到。

例 7.2 考察 $A = \{1, 2, 3\}$ 中的关系

$$R = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 2, 3\rangle\}$$