

实用结构力学教程

杜正国 编

西南交通大学出版社

序

这本《实用结构力学教程》是作者从多年来为大学生讲授结构力学课程所积累的教学资料中精选并悉心加工而成的。选材的深度和广度顾及到大学土建类专科学生和正在接受同类专业成人教育的广大学员的实际水平及需要。全书篇幅尽量予以控制,估计90学时可以基本讲完本书全部内容。各章辅以比较丰富的示例,目的是方便读者自学和增强解题能力。

作者确信,本书对大学土建类本科学生和有关工程设计人员亦具有参考价值。

全书共十章。第一章绪论介绍结构力学的部分名词和基本概念。第二至第四章,是本书的基础,阐明各类静定结构在固定荷载作用下的内力分析方法。第五章专门介绍影响线的理论及其应用,从而基本解决移动荷载作用下的计算问题。第六章结构的位移计算是全书的关键,它不仅综合运用了二至五章的知识,而且论述了结构力学中的若干重要原理(诸如弹性体系的虚功原理、互等定理等),并根据它们解决弹性体系在各种外因作用下的位移计算问题,从而为分析超静定结构作好知识准备。第七至第九章,重点介绍分析超静定结构的两种基本方法——力法与位移法;在这部分,保留了工程界中至今仍采用的力矩分配法。第十章矩阵位移法,是目前利用计算机作结构分析的基本方法。在本章编写过程中,作者力图设法使阐述深入浅出、通俗易懂,以便读者能在具备一般矩阵代数知识的情况下,不觉困难地学会这种方法。

本书编写过程中,承西南交通大学唐昌荣教授提供了不少珍贵的教学资料,并对编写重点作了指导;本书脱稿后,又承麦调曾教授对书稿作了审阅。作者借此谨表衷心的感谢。

在书稿的文字誊清、底图绘制和习题校核工作中,得到彭俊生、赵雷和罗永坤等同志的帮助以及西南交通大学教务处、出版社对本书面世的支持,作者在此一并致谢。

作者诚挚地欢迎各方面读者对本书不足之处提出批评和建议。

杜正国

1991年4月于成都

(川)新登字 018 号

实用结构力学教程

杜正国 编

*

西南交通大学出版社出版发行

(四川 成都九里堤)

西南交通大学出版社印刷厂印刷

*

开本: 787×1092 1/16 印张: 15.75

字数: 200 千字 印数: 1—3000 册

1992 年 1 月第 1 版 1992 年 1 月第 1 次印刷

ISBN 7—81022—318—6/T·078

定价: 5.20 元

目 录

第一章 绪 论.....	1
§ 1—1 结构的计算简图.....	1
§ 1—2 杆件结构及其分类.....	1
§ 1—3 平面结构的支座.....	3
§ 1—4 荷 载.....	5
§ 1—5 线性弹性和叠加原理.....	5
第二章 静定梁与静定平面刚架.....	7
§ 2—1 梁的内力.....	7
§ 2—2 荷载、剪力和弯矩之间的微分关系.....	9
§ 2—3 叠加法作梁的 M 、 Q 图.....	11
§ 2—4 斜梁的内力图.....	14
§ 2—5 多跨静定梁的内力图.....	16
§ 2—6 静定刚架的内力分析.....	19
习 题.....	26
第三章 静定平面桁架.....	29
§ 3—1 平面桁架的计算假定.....	29
§ 3—2 静定平面桁架的组成方式.....	29
§ 3—3 静定平面桁架的内力计算.....	30
§ 3—4 K 式桁架.....	37
§ 3—5 桁梁组合结构.....	39
习 题.....	40
第四章 静定拱式结构.....	42
§ 4—1 概 述.....	42
§ 4—2 三铰拱的数解法.....	43
§ 4—3 三铰拱的图解法.....	47
§ 4—4 三铰拱的合理拱轴.....	50
§ 4—5 三铰拱式桁架.....	53
习 题.....	55
第五章 影响线的一般理论及应用.....	57
§ 5—1 概 述.....	57

§ 5—2	用静力法作单跨静定梁的影响线	60
§ 5—3	间接荷载作用下的影响线	63
§ 5—4	机动法作单跨静定梁的影响线	65
§ 5—5	多跨静定梁的影响线	67
§ 5—6	最不利荷载位置	69
§ 5—7	换算均布荷载	79
§ 5—8	简支梁的包络图	82
§ 5—9	简支梁的绝对最大弯矩	85
§ 5—10	桁架内力影响线	87
习 题		92
第六章	结构的位移计算	95
§ 6—1	概 述	95
§ 6—2	实功原理	95
§ 6—3	虚功原理	99
§ 6—4	单位荷载法	103
§ 6—5	剪力与轴力对位移的影响	111
§ 6—6	图乘法	112
§ 6—7	温度变化及支座下沉情况下的位移计算	117
§ 6—8	互等定理	121
§ 6—9	简支梁的位移影响线	124
习 题		125
第七章	超静定结构的一般概念	128
§ 7—1	超静定结构的型式	128
§ 7—2	超静定次数的确定	130
§ 7—3	超静定结构的特性	131
§ 7—4	超静定结构的分析方法	132
习 题		132
第八章	力 法	133
§ 8—1	力法的基本原理及其正则方程	133
§ 8—2	超静定平面刚架计算的简化	141
§ 8—3	荷载作用下超静定结构的位移计算	155
§ 8—4	力法的计算校核	160
§ 8—5	其它计算问题	161
§ 8—6	连续梁的影响线及包络图	167

习 题	170
第九章 位移法	172
§ 9—1 位移法的一般概念	172
§ 9—2 未知数数目与基本结构	174
§ 9—3 正则方程式的组成	176
§ 9—4 系数和自由项的计算	177
§ 9—5 位移法计算示例	179
§ 9—6 按转角位移公式求解刚架结构	185
§ 9—7 对称性的利用	194
§ 9—8 力矩分配法	196
§ 9—9 借助力矩分配法解有侧移的刚架	207
习 题	210
第十章 矩阵位移法	213
§ 10—1 概 述	213
§ 10—2 矩阵位移法基本概念	213
§ 10—3 矩阵位移法的一般情形和计算步骤	219
§ 10—4 单元刚度矩阵	220
§ 10—5 单元刚度矩阵坐标变换	223
§ 10—6 结构刚度矩阵的组集方法	224
§ 10—7 关于等效结点荷载	230
§ 10—8 支座约束条件的两种处理方法	230
§ 10—9 矩阵位移法算例	232
习 题	242

第一章 绪 论

§ 1—1 结构的计算简图

为了对所设计的结构物进行计算（或对实际结构进行验算），通常必须先拟定一个能代替它的结构计算简图，然后才能着手各种计算。结构计算简图的选定，是结构设计中的一项很重要的工作。一般来说，结构计算简图应满足两个要求：第一，虽然引入某些假定，但计算简图基本上能正确反映结构实际工作情况。第二，所取计算简图能便于进行计算。

以图 1—1 a 所示单跨梁式桥为例，说明实际结构的简化过程。图中作用在纵梁上的荷载，先通过各横梁传至主梁，然后由主梁传至桥台。实际上，由横梁支承的纵梁往往是连续的，每一横梁与纵梁、横梁与主梁以及主梁与支座之间，都有一定大小的接触面，且接触面上的压力分布是不均匀的，为了选定主梁的计算简图，可作如下假定：假定纵梁是分段简支在横梁上的；所有接触面上的压力分布都认为是均匀的；主梁可用其轴线代表；主梁与桥台之间的支承按简支考虑。在这些假定下，得到主梁的计算简图及其所受荷载，如图 1—1 b 所示。这个计算简图不仅基本上反映了主梁的实际工作情况，而且为主梁的计算提供了简便的图式。

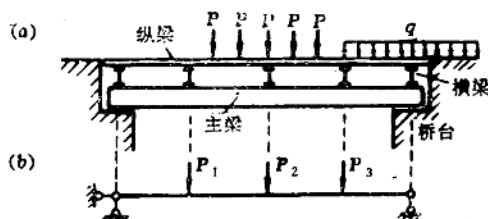


图 1—1

诚然，上例是一个极为简单的例子。对比较复杂的结构，确定其合理的计算简图需要有结构计算的较丰富的经验，以及对结构各部受力情况的正确判断能力。

有时，对于计算同一结构，可以采用几种不同的计算简图。例如，初步设计阶段可以采用较为粗略但计算简便的图式，而在最后设计阶段则采用另一个较为精确但计算比较复杂的图式。另外，计算简图的选取尚与手边可使用的计算工具有关；显然，在具备电子计算机的条件下，就可以采用相当接近结构实际情况的计算图式，从而使所设计的结构更加经济合理。

本书以后所介绍的各种计算原理和方法，都是直接针对结构计算简图而言的，为方便起见，一律把结构计算简图统称为结构。

§ 1—2 杆件结构及其分类

所谓杆件结构是指：这种结构由若干个杆件组成，其中每根杆件的长度远大于其截面的尺度。如果各杆件的轴线与荷载位于同一平面内，则称为平面杆件结构；而空间杆件结构则不符合此条件。

图 1—2 示出几种平面杆件结构的例子。

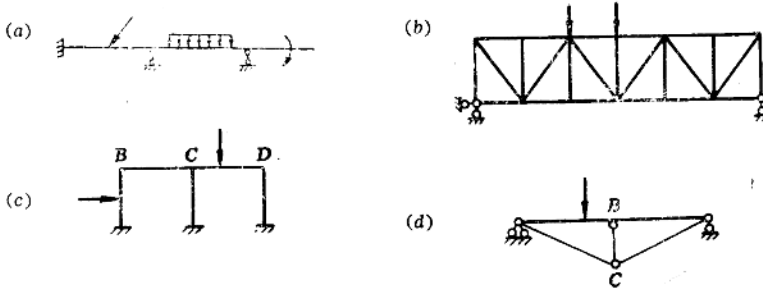


图 1—2

本书主要讨论平面杆件结构，很多空间杆件结构常可简化为平面杆件结构来计算。以下就平面杆件结构的分类作一说明。

(一) 按杆件的联接方式分类

1. 桁架 如图 1—2 b 所示，各杆均为直杆，各杆件的汇交处（简称结点）可假定为由光滑铰联结。因此，桁架在结点荷载作用下，各杆件只产生轴向力（拉或压），而无剪力和弯矩。另外，桁架受荷载作用后，汇交于结点的各杆件可以产生相对转动，即各杆件之间的夹角可以改变。

2. 刚架 如图 1—2 c 所示。它是由梁和柱组成的，其特点是具有刚性结点（如图中 B、C、D 结点）。刚架受荷载作用后，汇交于刚结点的各杆件，在结点处既不产生相对移动，也不产生相对转动。因此，同一结点上的各杆件之间的夹角保持不变。一般说来，刚架杆件的截面上，不仅有轴向力，而且有弯矩和剪力。就杆件的联接方式来说，梁（图 1—2 a），可以看作刚架的一种特殊情形。

3. 组合结构 如图 1—2 d 所示。它的特点是既有刚结点（如图中 B 点），又有铰结点（如 C 点）。因此，组合结构的一部分杆件将只有轴向力，而另外一些杆件除轴力外，还有弯矩和剪力。

(二) 按支座反力的方向分类

1. 梁式结构 在竖直荷载作用下，只产生竖直反力的结构，如图 1—3 a 所示。

2. 推力结构 在竖直荷载作用下，除产生竖直反力外，还产生水平反力的结构，如图 1—3 b 所示。

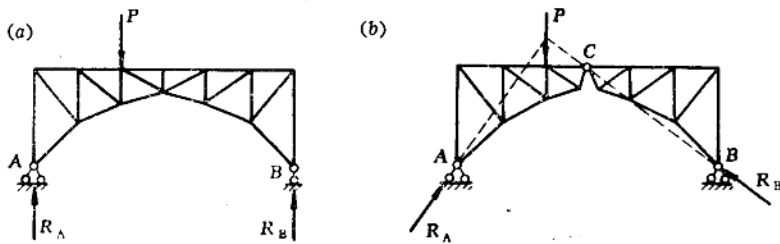


图 1—3

(三) 按计算方法的特点分类

1. 静定结构 结构的全部反力和任一截面上的内力可由静力平衡方程完全确定的结构, 称静定结构。如图 1—4 a 所示。

2. 超静定结构 结构的全部反力和内力不能由静力平衡方程完全确定, 必须同时考虑结构的变形条件才能求得确定解的, 称超静定结构。如图 1—4 b 所示。



图 1—4

§ 1—3 平面结构的支座

把结构与基础或其它支承物联系起来, 以固定结构的位置并通过它将荷载传递给基础的装置称为支座。平面结构支座一般有以下四种形式:

(一) 活动铰支座 (滚轴支座)

图 1—5 a 表示活动铰支座的构造简图。上部结构 (如桥跨) 与上摆 A 一起, 可绕柱形铰 C 转动; 下摆 B 与支承面 $m-n$ 之间装有滚轴, 所以它又可沿支承面移动, 但 C 点的竖直移动被阻止。当不考虑支承面上的摩擦力时, 这种支座的反力将通过铰 C 的中心, 并与支承面 $m-n$ 互相垂直。因此, 反力的方向和作用点是确定的, 反力的大小 R , 是一个未知数。根据上述特征, 活动铰支座在计算简图中可以用一根支座链杆 DE 表示 (图 1—5 b), 链杆 DE 的内力即等于该支座反力 R 的大小, 因此这种支座的反力如图 1—5 c 所示。

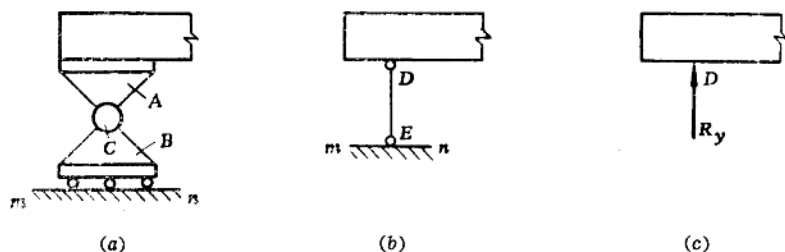


图 1—5

(二) 固定铰支座

图 1—6 a 表示这种支座的构造简图。它同样能让结构绕 C 点转动, 但由于这种支座的下摆 B 与基础固定在一起, 故结构在支座处的水平移动和竖直移动都被阻止。固定铰支座的反力显然通过铰 C 的中心, 但其方向和大小均为未知。我们可用通过 C 点的两根不平行链杆 CE 和 CF 来代表这种支座 (图 1—6 b)。一般情况下, 用一个水平反力 R_x 和一个竖直反力 R_y 代表这种支座的反力。

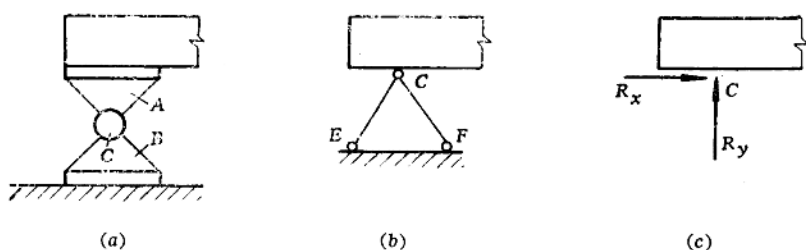


图 1-6

(三) 固定支座

当结构的一端按一定深度插入基础或地基，同时在构造上保证二者结合成一个整体，即不允许结构在支座处发生任何转动和移动，这种支座称为固定支座(或称嵌固)，如图 1-7 a 所示，显然这种支座的反力的大小、方向和作用点均为未知。我们可用三根既不平行又不相交于一点的链杆 DE 、 DF 和 KH 来表示这种支座(图 1-7 b)。相应的支座反力以水平反力 R_x ，竖直反力 R_y 和反力矩 M 表示(图 1-7 c)。

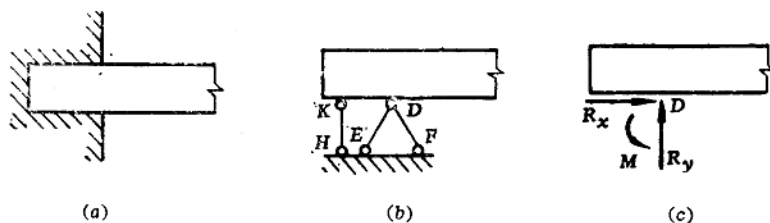


图 1-7

(四) 定位支座

如图 1-8 a 所示。这种支座允许结构沿滚轴滚动方向作少量移动，而不允许产生任何垂直于滚轴的移动和转动。在计算简图中，通常用两根平行链杆 DE 及 FG 来代表定位支座(图 1-8 b)。相应的支座反力以 R_y 和 M 表示(图 1-8 c)。

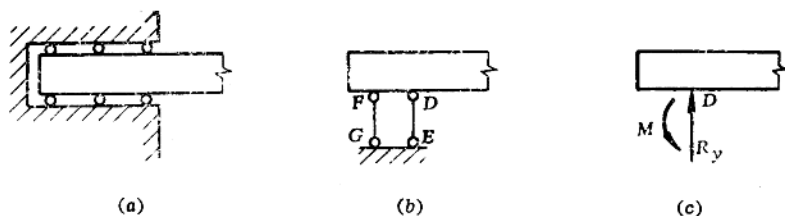


图 1-8

应该注意，上述四种支座都假定支座本身是不变形的，这类支座总称刚性支座。如果在结构计算中，需要考虑支座本身的变形，那样的支座则称为弹性支座。除非特别说明，本书涉及的支座均为刚性支座。

§ 1—4 荷 载

任何一个工程结构在其施工过程或其使用期间都必须是安全的。结构设计者一定要能够估计到全部过程中结构可能遇到的荷载。作用在结构上的荷载，通常分为两类：恒载和活载。

(一) 恒 载

恒载是指永久作用在结构上的荷载，如结构的自重和永久停留在结构上的设备重量等。铁路桥梁上轨道重量，房屋建筑中的墙体、梁、柱等重量都属于此种荷载，它们的大小、方向和作用位置都是固定不变的。

(二) 活 载

活载是指那些非永久性的、由多种来源的暂时性作用荷载。例如，桥梁上的车辆荷载，由于车辆制动或加速产生的惯性力；由于风引起的压力和吸力；水压力及地震力等等。在有关设计规范中，尚把活载分为经常性作用和临时性作用两类。

当结构发生温度变化或者材性的变化（如混凝土收缩和徐变的影响）或支座发生不均匀沉降等外部因素的作用时，这些作用可以看作结构受到的广义荷载。

关于恒载和各种活载的具体计算方法，在有关荷载规范中有明确规定。

在进行结构设计时，设计者必须对恒载与活载的各种组合情况进行比较，以确定对结构说来的最不利荷载。

当然，如果从荷载是否显著引起结构冲击或振动来分类的话，荷载尚可分为静力荷载和动力荷载两类。前者可以略去结构的惯性力，而后者则不容忽视惯性力。本书只涉及静力荷载。有关动力荷载下的结构计算，属于结构动力学的范畴。

§ 1—5 线性弹性和叠加原理

结构工程中采用的大部分材料，如钢、建筑木材和混凝土等具有这样一种特性，即在应力—应变($\sigma-\epsilon$)图的初始阶段，材料呈现为线性（即反映在 $\sigma-\epsilon$ 图上 σ 与 ϵ 成线性关系）和弹性（即经加载材料发生变形，卸载后该变形完全消失，材料恢复原形）。图 1—9 a 和

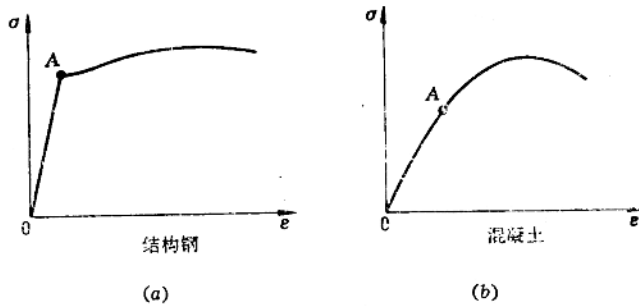


图 1—9

图 1—9 b 分别为结构钢和混凝土的 $\sigma-\varepsilon$ 曲线示意图。图中显示在 OA 区段内，材料表现为线性弹性，这就是通常在材料力学中所说的“材料在 OA 段服从虎克定律”。

本书讨论各种计算方法时，都假定材料服从虎克定律，研究对象是线性弹性结构。

在线性弹性结构的计算中，叠加原理的应用是重要的。它叙述为：结构中由一组荷载产生之效果等于每一荷载所产生效果之和。这个原理使计算得到简化，并且在许多情况下，计算结果是足够正确的。

应该注意，应用叠加原理是有条件的。其一，结构必须由线性弹性材料构成（服从虎克定律）；其二，结构的变形与结构的尺寸比较小得非常多，即讨论对象属于小变形问题。

但是，即使在上述两条件均能满足时，还有两种情况叠加原理是不适用的：

1. 荷载与其所产生的内力不成线性关系；
2. 荷载与其所产生的变形不成线性关系。

常见的工程结构，在大多数情况下，都能应用叠加原理进行分析。

第二章 静定梁与静定平面刚架

本章讨论各种静定梁和静定平面刚架在固定荷载作用下的内力计算方法。

§ 2—1 梁 的 内 力

静定梁是工程结构中广泛采用的一种结构形式。由于它设计简单,施工方便,目前在一般土建工程中,梁多用于短跨结构,如楼板、门窗、过梁、吊车梁、短跨桥等。

静定梁一般可分为单跨的(图 2—1)和多跨的(图 2—2 a)两种。后者可视为由若干个单跨静定梁,彼此用铰连接,且能跨越几个跨度的静定梁,如图 2—2 a 所示多跨静定梁,是由两个伸臂梁 AB 和 EF 加上一个悬挂简支梁 CD 组成的。图中伸臂梁 AB 及 EF 称为该多跨静定梁的基本部分,悬挂梁 CD 称为附属部分。

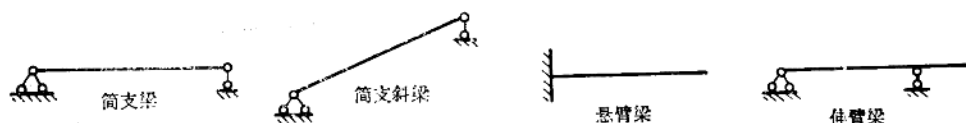


图 2—1

在分清多跨静定梁的基本部分和附属部分之后,多跨静定梁的计算可以按各单跨静定梁来进行。具体计算方法将在 § 2—5 中说明。

在荷载作用下,梁的任一截面上的应力的合力一般可表示为轴向力 N , 剪力 Q 和弯矩 M 三个分量, N 、 Q 和 M 称为该截面上的内力。

静定梁任意截面上的内力可以由静力平衡方程完全确定。如图 2—3 a 所示悬臂梁,欲求 $m-n$ 截面上的内力,可采用人们熟悉的截取隔离体的方法,取 $m-n$ 左边为隔离体,由静力平衡方程 $\Sigma X = 0$, 得

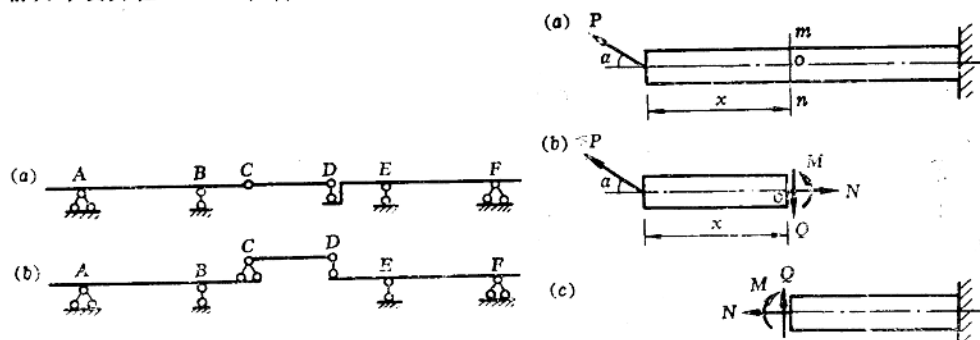


图 2—3

图 2—2

$$N = P \cos \alpha$$

由 $\Sigma Y = 0$, 得

$$Q = P \sin \alpha$$

由 $\Sigma M_0 = 0$, 得

$$M = Px \sin \alpha$$

以上三项内力 N 、 Q 和 M 的实际方向如图 2-3 b 所示。

由此可见, 欲求某一截面的内力, 首先是截取隔离体, 这样就把原来在梁内看不见的内力暴露出来 (其方向可按假设的画出, 如图 2-3 b), 然后, 以所取隔离体为研究对象并建立静力平衡方程, 最后解出所求截面上的各未知内力。

为了便于建立平衡方程, 通常要事先对内力的正负号作一规定。根据习惯, 规定轴向力 N 以拉力为正 (压力为负), 见图 2-4 a; 剪力 Q 以对邻近截面产生的力矩为顺时针方向时为正 (反时针方向为负), 见图 2-4 b。弯矩 M 以使梁的下部纤维受拉时为正 (上部纤维受拉时为负), 见图 2-4 c。按照这个规定, 图 2-3 b 所示 N 、 Q 和 M 都为正。由力的作用与反作用原理, 反映在右部隔离体的该截面内力的方向恰与左部隔离体上该截面内力的方向相反, 但仍都为正值, 如图 2-3 c 所示。

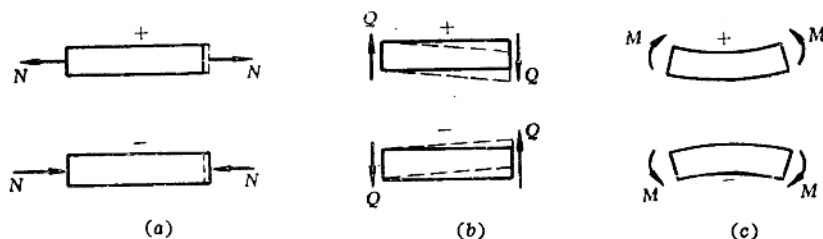


图 2-4

此外, 我们还看到:

梁内任一截面的轴向力 N 在数值上等于该截面任一侧所有外力沿轴线方向投影的代数和。

梁内任一截面的剪力 Q 在数值上等于该截面任一侧所有外力在该截面上投影的代数和。

梁内任一截面的弯矩 M 在数值上等于该截面任一侧所有外力对该截面形心取矩的力矩代数和。

例 2-1 图 2-5 a 所示简支梁 AB , 受半跨均布荷载 q 和集中力 P 作用, 试求跨度中点截面 m 及距离右支座 $l/4$ 处截面 n 的内力。

解

1. 计算支座反力 R_A 及 R_B : 由 $\Sigma M_B = 0$, 得

$$\begin{aligned} R_A &= \frac{1}{l} \left(\frac{ql}{2} \times \frac{3l}{4} + P \times \frac{l}{4} \right) \\ &= \frac{3}{8}ql + \frac{P}{4} \end{aligned}$$

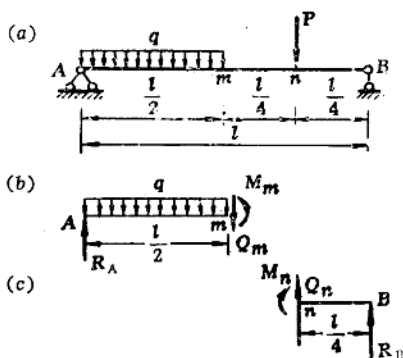


图 2-5

由 $\Sigma M_A = 0$, 得

$$R_B = \frac{1}{l} \left(-\frac{ql}{2} \times \frac{l}{4} + P \times \frac{3l}{4} \right) = \frac{1}{8}ql + \frac{3}{4}P$$

2. 通过 m 点作截面, 取 Am 为隔离体, 并假设该截面上的未知剪力和弯矩为正号方向, 如图 2—5 b 所示。由 $\Sigma Y = 0$, 得

$$Q_m = R_A - \frac{1}{2}ql = \frac{3}{8}ql + \frac{P}{4} - \frac{1}{2}ql = \frac{P}{4} - \frac{1}{8}ql$$

根据此式中 P 与 q 的相对大小, 最后确定 Q_m 为正或为负。由 $\Sigma M_m = 0$, 得

$$\begin{aligned} M_m &= R_A \cdot \frac{l}{2} - \frac{1}{2}ql \cdot \frac{l}{4} = \frac{3}{16}ql^2 + \frac{1}{8}Pl - \frac{1}{8}ql^2 \\ &= \frac{1}{16}ql^2 + \frac{1}{8}Pl \end{aligned}$$

上式结果二项均为正, 故 M_m 肯定为正值, M_m 的实际方向与图 2—5 b 中假设的弯矩方向一致。

为了求得截面 n (在 P 之右) 的内力值, 可截开 n 处, 取 nB 为隔离体计算较为方便, 由 $\Sigma Y = 0$, 得

$$Q_n = -R_B = -\frac{1}{8}ql - \frac{3}{4}P$$

上式结果二项均为负, 故 Q_n 肯定为负值, 其实际方向应与图 2—5 c 中假设方向相反。由 $\Sigma M_n = 0$, 得

$$M_n = R_B \times \frac{l}{4} = \left(\frac{1}{8}ql + \frac{3}{4}P \right) \times \frac{l}{4} = \frac{1}{32}ql^2 + \frac{3}{16}Pl$$

M_n 结果为正值, 其实际方向与图 2—5 c 中假设的弯矩方向一致。

如果本题的截面 n 位于集中力 P 左边一点, 那么该截面的剪力和弯矩有何变化? 读者可作思考。

本题所受荷载都沿竖直方向, 故梁内各截面上均无轴向力。

§ 2—2 荷载、剪力和弯矩之间的微分关系

图 2—6 表示由直梁中截出的一个长度为 dx 的微段平衡体, 荷载 $q(x)$ 在该微段上可假定为常量。作用在微段 dx 上的各力如图 2—6 所示。

取向下的力为正, 由该微段竖直方向的平衡, 得

$$q(x)dx + (Q + dQ) - Q = 0$$

整理后为

$$\frac{dQ}{dx} = -q(x) \quad (2-1)$$

由该微段上各力对 3—4 截面的形心取弯矩总和为零的平衡条件, 得

$$M + Qdx - (M + dM) - q(x)dx \cdot \frac{dx}{2} = 0$$

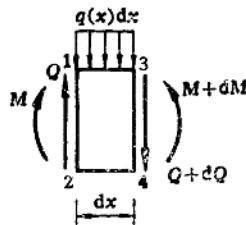


图 2—6

略去上式中微量的乘积项，便得到

$$\frac{dM}{dx} = Q \quad (2-2)$$

式 (2-2) 两边对 x 微分，则建立下式

$$\frac{d}{dx} \cdot \left(\frac{dM}{dx} \right) = \frac{dQ}{dx} = -q(x)$$

即

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -q(x) \quad (2-3)$$

式 (2-1) 至 (2-3) 反映直杆上的荷载 q 、剪力 Q 和弯矩 M 三者之间的微分关系，它们具有重要的几何意义。

式 (2-1) 表明：剪力图上某点的切线斜率等于该点处的荷载集度，但两者正负号相反。

式 (2-2) 表明：弯矩图上某点的切线斜率等于该点处的剪力值。

式 (2-3) 表明：弯矩图上某点的曲率与该点处的荷载集度成正比。

上述三个关系式，在以后绘制直杆的内力图和对它们的校核中，都有重要的用处。

当微段上作用有集中力 P 时 (图 2-7 a)，根据微段在竖直方向的平衡，可得右侧面 3-4 上剪力的增量

$$Q_1 = -P \quad (2-4a)$$

因此，在集中力作用点的两边，剪力不相等；从集中力的左边移动到右边时，截面剪力值发生一个突减，突减量的大小恰等于集中力 P 之值。应该注意，在集中力作用点弯矩值仍保持连续，但由于该处两边的剪力不同，因此反映在弯矩图上两边的斜率不同，故集中力作用点处对应应在弯矩图上是一个尖点。

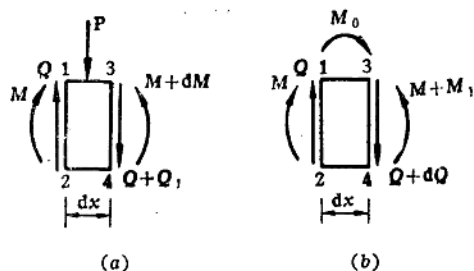


图 2-7

当微段上作用有集中力偶时 (图 2-7 b)，根据微段的力矩平衡方程，有

$$M + M_0 + Qdx - (M + M_1) = 0$$

于是得到右侧面 3-4 上弯矩的增量

$$M_1 = M_0 + Qdx$$

Qdx 与 M_0 比较为一微量，因此可略，故

$$M_1 = M_0 \quad (2-4b)$$

上式表明：从集中力偶左边移动到右边时，截面的弯矩值发生一个突增，突增量的大小恰等于集中力偶 M_0 之值。同时，由该微段的竖向平衡条件，得 $dQ = 0$ ，它表明集中力偶的左右两边，剪力保持相同。

另外，当直杆上某段的弯矩可表示为 x 的连续函数时，该段弯矩的极值点发生在满足条件 $dM/dx = 0$ 处，联系式 (2-2)： $dM/dx = Q$ ，便可得到如下结论：在弯矩为连续曲线的区段内，弯矩的极值点必定发生在剪力等于零处。

§ 2—3 叠加法作梁的 M 、 Q 图

梁内各个截面上的弯矩和剪力，一般说来都是各不相同的。进行梁的设计时，要求知道梁的所有截面上的弯矩和剪力的大小分布情况，以便确定它们可能出现的危险量值。如果我们取横坐标为截面位置，纵坐标为对应的弯矩或剪力值，由此作出在固定荷载作用下，反映梁的各截面的弯矩或剪力大小变化情况的图形称为弯矩 (M) 图，或剪力 (Q) 图。

本节介绍采用叠加法绘制梁的 M 与 Q 图的方法。

图 2—8 a 示一简支梁 ab ，除全跨受均布荷载外，两端分别受集中力偶 M_a 和 M_b 作用。欲绘此梁 M 图可利用叠加原理，首先将该梁的受载情形分解成图 2—8 b 和图 2—8 c 两种情形，这两种情形对应的简支梁弯矩图是我们所熟悉的，如图 2—8 d 、 e 所示。然后把这两个弯矩图的对应截面上的纵距分别叠加，便得到两种荷载情形共同作用时的弯矩图，如图 2—8 f 所示。我们规定弯矩图一律画在梁的受拉纤维一侧。

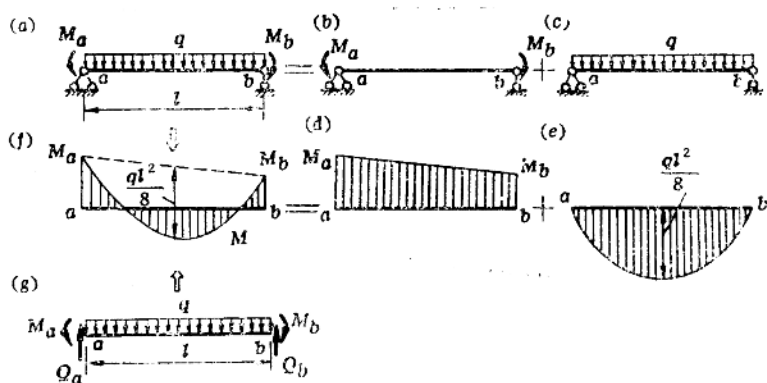


图 2—8

利用叠加法作 M 图的具体步骤如下：先在 a 、 b 两点垂直杆轴的方向分别画出 M_a 和 M_b ，并连以直线（图 2—8 f 中虚线所示），然后以此直线为基线，往下同样于垂直杆轴的方向，叠加一个均布荷载作用的简支梁弯矩图，最后消去上述两个图形纵距的重叠部分，即得叠加后的总弯矩图（图 2—8 f 中竖直阴影线部分）。

应该注意，这里所说的 M 图的叠加，是指两个弯矩图纵距的叠加，因此叠加时两图纵距的方向必须一致。

上述叠加法作 M 图的方法，适用于从结构中取出的任意直杆部分。这是因为任意直杆两端截面上的剪力 Q_a 与 Q_b 是和同跨度简支梁的两个支座反力 R_a 和 R_b 完全相等的。所以图 2—8 g 和图 2—8 a 的受力情况也完全相同，故两个弯矩图完全相同。因此 叠加法作图技巧在理论上是正确的且作法也十分方便，它在结构力学中得到广泛应用。

根据同样理由，剪力图也可用叠加法作出。为了作图方便，一般是先画出与均布荷载（或其它跨中荷载）相应的剪力图，即左端为 $+ql/2$ ，右端为 $-ql/2$ ，如图 2—9 中虚线所示。然后以这根虚线为基线，并于竖直方向叠加一个由于端力偶 M_a 与 M_b 作用下的剪力图。根据 (2.2) $Q = dM/dx$ ，知道该剪力图为一常数，其值等于图 2—8 d 所示 M 图的斜