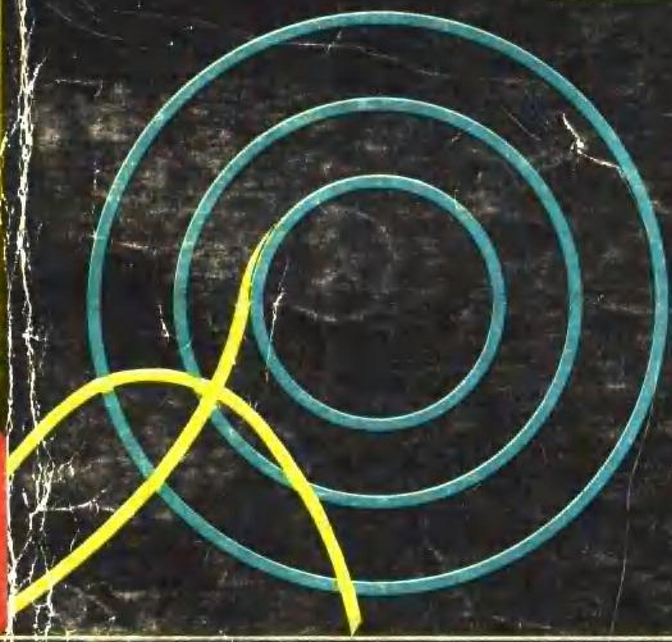
实用数学规划导论



实用数学规划导论

唐焕文 编

大连工学院出版社

内容简介

本书系统地介绍了线性规划、非线性规划、几何规划、整数规划和多目标规划的理论、方法和应用。书中配有一定数量的例题和习题以供读者参考。该书力求做到深入浅出，通俗易懂，适于教学和自学；着重阐述数学规划在实际应用中比较有效的计算方法，及其在计算机上的实现；企图在内容的新颖和较全面地概述方面作一点初步的尝试。

本书可作为工科各专业研究生的教材，也可供应用数学、计算数学、管理工程、系统工程和运筹学专业的大学生作选修课教材或教学参考书，对于从事运筹、优化应用的师生、工程技术人员和管理人员都有一定的参考价值。

实用数学规划导论

SHI YONG SHUXUE GUI HUA DAOLUN

唐焕文 编

责任编辑：高晓凌　　责任校对：孙心伟

*

大连工学院出版社出版

辽宁省新华书店发行

大连工学院印刷厂印刷

*

开本：787×1092 1/32　印张：11.91　字数：270千字

1986年6月第一版　1986年6月第一次印刷

印数：1—5000 册

统一书号：13400·4　　定价：2.00元

序　　言

数学规划是运筹学的一个重要组成部分，在自然科学、社会科学、生产实际、工程设计和现代化管理中有着重要的实用价值，因此，在最近的三十多年中得到了十分迅速的发展。

本书讲述数学规划的基本内容，包括线性规划、非线性规划、几何规划、整数规划和多目标规划等七章，简要介绍了它们的基本概念、基本理论和计算方法，为利用数学规划解决生产实际问题打下了初步的基础。为便于初学者学习和查阅，书末设有一个附录，简要介绍数学规划中常用的一些数学分析和线性代数的基础知识。

本书是在我们编写的《实用数学规划导论》讲义的基础上，经过修改和补充写成的。讲义初稿于 1980 年写成，曾在内部印刷过三次，在十多所工科院校中被用作教材。编者和他的同事先后用这份讲义为工科各专业的研究生，从事运筹、优化应用的大学师生、工厂企业和科研单位的工程技术人员、管理人员讲授过多次，1983 年 10 月，本书经原教育部工科院校应用数学协作组计算数学教材会评审通过，并推荐出版。

本书可作为工科各专业研究生的教材，也可供应用数学、计算数学、管理工程、系统工程和运筹学专业的大学生用作选修课教材或教学参考书，对于从事运筹、优化应用的师生、工程技术人员和管理人员都有一定的参考价值。

在编写本书时，我们着重考虑了以下几点：

1．努力做到深入浅出，通俗易懂，适于教学和自学，

使具有微积分和线性代数知识的广大读者都能读懂本书的大部分内容。为了帮助大家学习，在附录中列出了阅读本书需要用到的主要数学基础知识，供读者复习和查阅。但是，为了叙述的完整，本书中也含有少部分较难的内容，需要用到较深的数学知识或较复杂的数学推导，书中都用*号标记，初学时，可以略去。

2. 正如在《自然杂志》1981年举行的应用数学座谈会上许多同志所指出的那样：目前在我国，适合工科师生和工程技术人员阅读的应用数学书籍还比较少，有的书，纯数学的味道太浓，搞应用的人学不下去，学了也不会应用；有的书，又写得太浅，不够用。本书企图弥补这方面的不足，重点针对从事应用的同志，着重介绍数学规划的基本知识和在实际应用中比较有效的计算方法。为了便于理解和应用，对选入的每种算法，尽可能把它的基本思想阐述清楚，然后阐明其理论依据，并给出具体的计算步骤、程序框图和数值计算例子。在选择算法时，我们遵循下面的原则：第一，所选算法便于在计算机上实现；第二，在应用中比较有效的重要算法都尽可能选入，并注意选入一些较新的重要方法。

3. 目前国内已出版的一些数学规划的书籍，内容多限于线性规划和非线性规划，对于在实际应用中也很重要的几何规划、整数规划和多目标规划，则较少涉及；对于线性与非线性规划，所介绍的内容也多限于七十年代以前比较成熟的内容，对于新近的发展反映较少，本书在这两方面都作了一些努力，但由于编者水平所限，离所期望的目标尚有差距。

4. 要掌握数学规划，需要有一些数值计算及应用的例题帮助理解；还需要独立完成一定数量的习题，其中部分习题要上机计算。为此，我们在每一章都配有一定数量的例题和较多的习题，供大家阅读和练习，部分习题附有提示或答

案。

在我们从事数学规划的学习、教学和科研工作中，曾经得到中国科学院应用数学所越民义、吴方、桂湘云教授、韩继业、赖炎连副教授和我院钱令希、徐利治教授、张义燊副教授的大力支持和热情指导，讲义的部分章节曾经施光燕、冯恩民、李壮、阳明盛、高桂清等审阅或使用过，提出过不少的宝贵意见。1983 年 10 月在华中工学院召开的审稿会上，西安交通大学等十多所院校的老师们都曾对本书初稿提出过很好的意见，对上面提到的各位先生和同志，特在此表示衷心地感谢。

如果用本书作为工科研究生的教材，予计 50 学时可讲完前四章。76 学时可讲完全书。

虽然本书经过几次试用和修改，但由于编者水平有限，书中肯定还会有缺点和不当之处，敬请广大读者批评指正。

编　者

1985年 9 月

符号说明

$\min\limits_{x\in R} f(x)$　$f(x)$ 在 R 上的最小值

$\max\limits_{x\in R} f(x)$　$f(x)$ 在 R 上的最大值

s. t.　受约束于，是“subject to”的缩写

$A\subset B$　集合 A 包含于集合 B

$A\supset B$　集合 A 包含集合 B

$x\in A$　x 属于集合 A，即 x 是集合 A 的一个元素

$x\overline{\in} A$　x 不属于集合 A，亦可写成 $x\notin A$

$A\cup B$　集合 A 与 B 的并集

$A\cap B$　集合 A 与 B 的交集

$\approx$　近似等于

$\varnothing$　空集合

$N(x_0, \varepsilon)$ 或 $N_\varepsilon(x_0)$　以点 x_0 为中心，ε 为半径的邻域

$\binom{n}{k}$ 或 C_n^K　二项式系数，即从 n 个元素中每次取出 k 个元素所有不同的组合数

$\triangleq$　定义、恒等

R　实数域

〔x〕　x 的整数部分

$f(x)\in C$　$f(x)$ 是连续函数

$f(x)\in C^K$　$f(x)$ 具有 K 阶连续偏导数

E^n　n 维欧氏空间

f：$D\subset E^n\to R$　$f(x)$ 是定义在 E^n 中区域 D 上的实值函数

$\|\boldsymbol{x}\|$　向量 $\boldsymbol{x}$ 的欧氏范数，即 $\|\boldsymbol{x}\|=\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$

$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ 或 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y}$　向量 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ 的内积

$\det(A)$ 或 $|A|$　矩阵 A 的行列式

$\mathrm{rank}(A)$ 或 $r(A)$　矩阵 A 的秩

$\nabla f(\boldsymbol{x})$　$f(\boldsymbol{x})$ 的梯度

$H(\boldsymbol{x})$ 或 $\nabla^2 f(\boldsymbol{x})$　$f(\boldsymbol{x})$ 的海赛阵，$H(\boldsymbol{x}) \triangleq \left(\dfrac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{n\times n}$

$\min(x_1, x_2, \cdots x_n)$　数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 中最小者

$\max(x_1, x_2, \cdots, x_n)$　数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 中最大者

$\inf\limits_{\boldsymbol{x}\in X} f(\boldsymbol{x})$　$f(\boldsymbol{x})$ 在 X 上的下确界

$\sup\limits_{\boldsymbol{x}\in X} f(\boldsymbol{x})$　$f(\boldsymbol{x})$ 在 X 上的上确界

$\boldsymbol{x}^*$　最优解

f^*　目标函数的最优值

目　　录

第一章　引　论

本章首先介绍如何从实际问题中抽象出数学规划的问题，然后介绍数学规划的一些基本概念和有关的预备知识，为以后的学习打下基础。

§1-1　数学规划问题举例

利用数学规划的理论和方法解决生产实际和自然科学中的具体问题，一般分为两个步骤：

1．建立数学模型。即对所要解决的具体问题进行分析研究，加以简化，形成数学规划问题。

2．进行数学加工和求解。这个过程主要包括以下各项工作：将所得的数学规划问题进行整理和变换，使之成为易于求解的形式；选择或提出解决该问题的适当的计算方法；编制计算程序并上机计算；分析计算结果，看其是否符合实际。

在这一节中，我们将通过几个简单的实例来说明怎样由实际问题经过抽象，建立它的数学模型。

例1　某化工厂生产A、B、C、D四种化工产品，生产每种产品一吨所消耗的工时和产值如下表：

产　　品	A	B	C	D
工　时（小时）	100	300	400	75
产　值（千元）	1	5	10	0.5

要求全厂年产值在1000万元以上，求当消耗的总工时最少时，该厂生产各种产品的数量。

解 设该厂全年生产A、B、C、D四种产品的数量分别为x_1，x_2，x_3，x_4（单位均为吨），消耗的总工时为y，则

$$y=100x_1+300x_2+400x_3+75x_4,$$

消耗的总工时y最少是我们所追求的目标，所以把$y=f(x_1, x_2, x_3, x_4)$称为目标函数。而变量x_1，x_2，x_3，x_4的值是我们需要确定的，称x_1，x_2，x_3，x_4为决策变量或设计变量。

因为要求全厂的年产值在1000万元以上，所以决策变量x_1，x_2，x_3，x_4还需要满足以下的限制条件：

$$x_1+5x_2+10x_3+0.5x_4\geqslant 10000, \tag{1}$$

$$x_i\geqslant 0,\ i=1,\ 2,\ 3,\ 4, \tag{2}$$

条件（1）（2）称为限制条件或约束条件。所以上述问题的数学模型可概述为：

在约束条件（1）（2）之下，确定变量x_1，x_2，x_3，x_4的数值，使目标函数$y=f(x_1, x_2, x_3, x_4)$取得最小值。今后为叙述简便，常将此问题简写为：

$$\begin{cases} \min & y=100x_1+300x_2+400x_3+75x_4, \\ \text{s.t.} & x_1+5x_2+10x_3+0.5x_4\geqslant 10000, \\ & x_i\geqslant 0,\ i=1,\ 2,\ 3,\ 4, \end{cases} \tag{1·1}$$

其中min是minimize的缩写，s. t. 是subject to的缩写，中文意思是“受约束于”或“约束条件”。由于在数学规划问题（1·1）中，目标函数$y=f(x_1, x_2, x_3, x_4)$是变量x_1，x_2，x_3，x_4的线性函数，约束条件是x_1，x_2，x_3，x_4的线性不等式（或等式），所以把（1·1）称为线性规划问题，线性规划（Linear Programming）以后简记

为LP。

例2 运输问题

假设某种物资有 m 个产地，n 个销地。第 i 个产地的产量为 $a_i(i=1, 2,\cdots, m)$；第 j 个销地的需要量为 $b_j(j=1, 2,\cdots, n)$。其中 $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i \geqslant \sum\limits_{j=1}^{n} b_j$。由产地 i 到销地 j 的距离为 d_{ij}，问应如何按排运输，才能既满足各地的需要，又使所花费的运输总吨公里数最少？试建立数学模型。

解 我们来建立上述问题的数学模型，设由产地 i 运往销地 j 的货物数量为 x_{ij}，s 为运输的总吨公里数，则上述问题可归结为如下的线性规划问题：

$$
\begin{cases}
\min \quad s=\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} d_{ij}x_{ij}, \\
\text{s. t.} \quad \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij}=b_j, \quad j=1, 2,\cdots, n, \\
\qquad \text{（满足各销地的需要量）} \\
\qquad \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant a_i, \quad i=1, 2,\cdots, m, \\
\qquad \text{（各产地的运出量不超过产量）} \\
\qquad x_{ij} \geqslant 0, \quad i=1, 2,\cdots, m; \quad j=1, 2,\cdots, n.
\end{cases}
\tag{1·2}
$$

运输问题是线性规划中的一个典型问题，也是线性规划模型中最早被研究的一类问题。早在1939年，苏联数学家康托洛维奇（Л. В. Канторович）在列宁格勒大学所作的题为“生产组织与计划中的数学方法”的报告中，就讨论了交通运输和生产计划中所提出的线性规划问题。并给出了一种解法——解乘数法。

例3 拟订生产计划问题

设有 m 种资源：A_1，A_2，…，A_m，拟生产 n 种产

品：B_1，B_2，…，B_n。用 a_{ij} 表示生产一个单位的第 j 种产品所需要第 i 种资源的数量，用 b_i 表示第 i 种资源的最大数量，用 c_j 表示第 j 种产品的单价，用 x_j 表示第 j 种产品的生产数量。则 $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2,\cdots, x_n)^T$ 就代表一个生产计划，我们的问题是：要设法按排一个生产计划，使每种产品都完成或超额完成国家下达的产量计划，即有 $x_j\geqslant e_j(j=1, 2,\cdots, n)$，而使总产值最高。其中 $e_j(j=1, 2,\cdots, n)$ 为国家下达的生产第 j 种产品的产量指标。

解 在这个问题中，决策变量为 $x_1, x_2,\cdots, x_n$。设总产值为 y，则上述问题可化为如下的线性规划问题：

$$\begin{cases} \max \quad y=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \\ \text{s. t.} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\leqslant b_i, \quad i=1, 2,\cdots, m, \\ \qquad\quad x_j\geqslant e_j, \quad j=1, 2,\cdots, n. \end{cases} \tag{1·3}$$

采用向量、矩阵记号，则（1·3）可写成：

$$\begin{cases} \max \quad y=\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}, \\ \text{s. t.} \quad A\boldsymbol{x}\leqslant \boldsymbol{b}, \\ \qquad\quad \boldsymbol{x}\geqslant \boldsymbol{e}. \end{cases} \tag{1·3′}$$

其中 $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2,\cdots, x_n)^T$，$\boldsymbol{c}=(c_1, c_2, \cdots, c_n)^T$，$\boldsymbol{b}=(b_1, b_2,\cdots, b_m)^T$，$\boldsymbol{e}=(e_1, e_2,\cdots, e_n)^T$，$A=(a_{ij})_{m\times n}$。$\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{e}$ 表示向量 $\boldsymbol{x}$ 的每一个分量 x_j 都大于、等于向量 $\boldsymbol{e}$ 的每一个相应的分量 e_j。T 表示向量或矩阵的转置。

例4 合理下料问题

设要用某类钢板下 m 种零件 A_1，A_2，…，A_m 的毛料。根据既省料又容易操作的原则，人们在一块钢板上，已设计出 n 种不同的下料方案，设在第 j 种下料方案中，可得到零件 A_i 的个数为 a_{ij}，第 i 种零件的需要量为 $b_i(i=1, 2,$

$\cdots,m$)。问应如何下料，才能既满足需要，又使所用钢板的总数最少？试建立数学模型。

解 设采用第 j 种方案下料的钢板数为 x_j，所用钢板的总数为 y，则上述问题可化为如下的数学规划问题：

$$\begin{cases} \min \quad y=\sum_{j=1}^{n} x_j, \\ \text{s. t.} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geqslant b_i,\ i=1,\ 2,\cdots,\ m. \\ \qquad (\text{第 } i \text{ 种零件的总数不少于需要量} b_i) \\ \left.\begin{array}{l} x_j \geqslant 0, \\ x_j \in I, \end{array}\right. \quad j=1,\ 2,\cdots,\ n. \end{cases} \tag{1·4}$$

其中 $I=\{0,\ 1,\ 2,\cdots,\ n,\cdots\}$。在问题 (1·4) 中，由于 x_j 表示用第 j 种方案下料的钢板数，所以应有 $x_j\in I$，即 x_j 应取整数值，这样我们就得到了整数线性规划问题 (1·4)。

例 5 汽轮机叶片的优化设计

设汽轮机叶片面积的变化规律为：

$$F(x)=F_0-ax^m,$$

其中 F_0 为叶片根部面积，根据热力学计算可求得各级叶片的平均半径 R_p 和叶片高度 L，欲确定参数 F_0，a，m 的值，使其在强度许可的条件下，叶片的重量最轻，试建立数学模型。

强度条件为 $\sigma_p\leqslant[\sigma]$，其中 $[\sigma]$ 是简单拉伸的许用应力，σ_p 是叶片截面上的最大拉应力。

$$\sigma_p=\frac{\gamma}{g}\omega^2\cdot L\cdot R_p\left[1-\left(1-\frac{F_1}{F_0}\right)\left(\frac{1}{m+1}+\frac{m}{\frac{D_p}{L}(m+1)(m+2)}\right)\right], \tag{1·5}$$

上式中的 g，γ，ω，L，R_p 为已知常数，$D_p=2R_p$，$F_1=F_0-aL^m$ 为叶片顶部面积，γ 为比重，则叶片的重量为

$$G=\int_0^L \gamma F(x)dx=\gamma\left[F_0L-\frac{a}{m+1}L^{m+1}\right]$$
$$=f(F_0,\ a,\ m).$$

所以汽轮机叶片的优化设计问题归结为在约束条件 $\sigma_p\leqslant[\sigma]$，$F_0\geqslant(F_0)_{min}$ 之下，求参数 F_0，a，m 的值，使目标函数 $G=f(F_0,a,m)$ 取得最小值。由于这里的目标函数和约束函数都是变量 F_0,a,m 的非线性函数，所以称它为非线性规划问题。非线性规划（Nonlinear programming）以后常简写为 NLP.

例6 曲线拟合问题

在船体的数学放样中，常会遇到下面的问题，已知平面上 n 个点：$(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$，…，$(x_n,\ y_n)$，我们希望用下面的样条函数来拟合这 n 个点。

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4(x-x_1)_*^3+\cdots$$
$$+a_{n+3}(x-x_n)_*^3.$$

其中

$$(x-x_i)_*^3=\frac{1}{2}[|x-x_i|^3+(x-x_i)^3],\ i=1,\ 2,\cdots,\ n.$$

为了保证求出的曲线 $y=f(x)$ 与连结已知 n 个点所成的曲线具有相同的拐点，应要求 $\gamma_i f''(x_i)\geqslant 0$，$i=2,\ 3,\cdots,\ n-1$。其中

$$\gamma_i=\frac{2}{x_{i+1}-x_{i-1}}\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i}-\frac{y_i-y_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}\right)$$

所以上述问题可归结为：

$$\begin{cases}\min\quad s=\sum\limits_{i=1}^{n}[f(x_i)-y_i]^2,\\ \text{s. t.}\quad \gamma_i f''(x_i)\geqslant 0,\ i=2,\ 3,\cdots,\ n-1.\end{cases}\tag{1·6}$$