高等学校教材

矩阵论

Matrix Theory

（第二版）

程云鹏 主编

西北工业大学出版社

高等学校教材

矩 阵 论

（第二版）

程云鹏 主编

程云鹏 张凯院 徐 仲 编著

西北工业大学出版社

2000年1月 西安

(陕)新登字 009 号

【内容简介】 本书共分七章，主要介绍线性空间与线性变换，矩阵范数，矩阵分析，矩阵分解，特征值估计，广义逆矩阵以及特殊矩阵。部分章节包括了近年来编者的一些研究成果及有关文献上的资料。

本书内容丰富，论述翔实严谨，可作为工科、理科研究生和计算数学及其应用软件专业高年级本科生的教材，也可供有关从事计算工作和工程技术的人员参考。

高等学校教材

矩 阵 论

程云鹏 张凯院 徐 仲 编著

责任编辑 冷国伟

责任校对 齐随印 樊力

*

(邮编：710072 西安市友谊西路 127 号 电话：8491147)

全国各地新华书店经销

西北工业大学出版社印刷厂印装

ISBN 7-5612-1135-X/O·154(课)

*

开本：850 毫米×1 168 毫米 1/32 印张：14.5 字数：351 千字

1999 年 6 月第 2 版 2000 年 1 月第 2 次印刷

印数：2 001～6 000 册 定价：18.00 元

第一版前言

矩阵理论既是学习经典数学的基础，又是一门最有实用价值的数学理论。它不仅是数学的一个重要的分枝，而且业已成为现代各科技领域处理大量有限维空间形式与数量关系的强有力的工具。特别是计算机的广泛应用，为矩阵论的应用开辟了广阔的前景。例如，系统工程、优化方法以及稳定性理论等，都与矩阵论有着密切的联系，从而馈使矩阵理论近年来在内容上有相当大的更新，非现有教科书所能概括。因此，我们根据各学科研究生学习和科研的需要，编出此书。

本书主编程云鹏教授从事矩阵理论研究工作多年，书中的大部分内容都来自他编写的《数值代数》教材之中。全书分为七章，其中第一、二、三、四、七章由程云鹏编写；第五章由张凯院编写；第六章由徐仲编写。程经士做了很多编写具体工作。最后由程云鹏统一全书格调。

本书的编写力求做到，资料丰富，论述详尽严谨，文字通俗易懂，便于自学；尽可能满足不同专业工科及理科研究生学习的需要；书中收编了作者近年来所取得的一些科研成果和有关文献上发表的一些文章。全书内容充实，不同专业的研究生可根据需要删减。理科研究生可读完全书，约需 80 学时。工科修 60 学时的研究生，除删去第七章外，左上角带“ * ”号的内容，可酌情取舍一些；修 40 学时者，除删去上面所要删的内容外，对一些定理的证明，例题的演算，亦可酌情删减。所有删减均不影响教学内容的连贯性。书中各章按节配有适量的习题，以供选用。由于另有习题解答，故而本书未列习题答案。学习过工程数学线性代数课程的读者，均可阅

读本书。

在编写过程中，西北工业大学研究生院和应用数学系的领导及同事们，均给我们以很大的鼓励和支持；航空航天工业部631研究所周天孝教授仔细审阅了本书全稿，并给予了很高的评价。编者在此一并深表谢意！

编者的水平有限，错漏和不妥之处，在所难免，殷望批评指正！

编著者

1988年春于西北工业大学

第二版前言

本书自 1989 年出版以来，被许多高等学校、研究院所选作研究生矩阵论课程的教材或教学参考书，但在使用中也发现了其中的一些问题和需要进一步充实完善的地方。为此，我们根据十年来的教学实践对本书第一版进行了修订。

本次修订是在保持原书风格的前提下，改写了书中一些定理的证明过程，更换了一些例题和习题，对带"＊"号的内容也作了少量调整。改动较多的地方有：

(1) 在 § 1.3 中，将欧氏空间中的对称变换作为酉空间中的酉对称变换的特例处理，省去了原书中定理 1.41 的证明；

(2) 在 § 2.2 中，借助于广义矩阵范数来定义 $m\times n$ 矩阵的范数；

(3) 将原书 § 3.1 中非负矩阵的内容移至 § 7.3；在 § 3.3 中加强了矩阵函数值的计算方法等内容；

(4) 在 § 4.2 中，将矩阵 QR 分解的几个定理证明改成了便于编程计算的构造性证明；

(5) 在 § 4.3 中，将原书第六章中矩阵的 Hermite 标准形的内容前移，简化了矩阵满秩分解的计算；

(6) 在 § 4.4 中，删去了原书中矩阵奇异值分解的三角分解描述，加强了矩阵奇异值分解的计算与应用；

(7) 在 § 5.4 中，增加了线性矩阵方程的可解性讨论，以及使用矩阵函数求解简单线性矩阵方程的内容；

(8) 重写了 § 7.6；

(9) 增加了部分习题的答案或提示。另外，重新编写了与本书

配套的题解。

在修订过程中，我们力求使概念更加清晰，算法构造思想明确，推导论证严谨，深入浅出，以便于阅读和教学。

程云鹏负责本版书稿的修订工作并编制了修订计划，张凯院（修订第一至五章）和徐仲（修订第六至七章）分别执笔，最后由程云鹏审定完成。

承蒙西安交通大学理学院姜宗乾副教授仔细审阅了修订版书稿，并提出了宝贵的意见；修订过程中还吸收了初版以来许多专家同行和读者提供的意见或建议，在此一并深致谢忱。

编著者

1998 年 12 月

符 号 说 明

$\mathbf{N}_0$	正整数集合
$a \in S$	元素 a 属于集合 S
$a \notin S$	元素 a 不属于集合 S
$S_1 \supset S_2$	集合 S_1 包含集合 S_2
$S_1 \cap S_2$	集合 S_1 与集合 S_2 的交
$S_1 \cup S_2$	集合 S_1 与集合 S_2 的并
$S_1 \oplus S_2$	集合 S_1 与集合 S_2 的直和
$\sigma: K \to S$	σ 是集合 K 到集合 S 的映射
$\det \boldsymbol{A}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式
$\mathrm{tr}\boldsymbol{A}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的迹,$\boldsymbol{A}$ 的主对角元素之和
V^n	n 维线性空间
$\dim V^n$	V^n 的维数
$\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$	n 阶对角矩阵
$\mathrm{diag}(\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \cdots, \boldsymbol{A}_s)$	准对角矩阵
$\mathrm{adj}\boldsymbol{A}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵
$\mathbf{R}$	实数域
$\mathbf{R}^n$	实 n 维向量空间
$\mathbf{R}^{m\times n}$	实 $m \times n$ 矩阵空间
$\mathbf{R}_r^{m\times n}$	秩为 r 的实 $m \times n$ 矩阵的集合
$\mathbf{C}$	复数域
$\mathbf{C}^n$	复 n 维向量空间
$\mathbf{C}^{m\times n}$	复 $m \times n$ 矩阵空间

$\mathbf{C}_r^{m\times n}$	秩为 r 的复 $m\times n$ 矩阵的集合
$\boldsymbol{e}_i$	n 维欧氏空间的第 i 个单位坐标向量
$R(\boldsymbol{A})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的值域,$\boldsymbol{A}$ 的列空间
$N(\boldsymbol{A})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的核空间,$\boldsymbol{A}$ 的零空间
$\mathrm{rank}\boldsymbol{A}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩,$\dim R(\boldsymbol{A})$
$n(\boldsymbol{A})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的零度,$\dim N(\boldsymbol{A})$
$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 相似于矩阵 $\boldsymbol{B}$
$P_m(t)\mid Q_n(t)$	m 次多项式 $P_m(t)$ 整除 n 次多项式 $Q_n(t)$
T_0	零变换
T_e	单位变换
$\boldsymbol{J}$	矩阵的 Jordan 标准形
$\boldsymbol{J}_i(\lambda_i)$	矩阵的第 i 个 Jordan 块
$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$	向量 $\boldsymbol{x}$ 与向量 $\boldsymbol{y}$ 的内积
$\boldsymbol{x}\perp\boldsymbol{y}$	向量 $\boldsymbol{x}$ 与向量 $\boldsymbol{y}$ 正交(垂直)
$L(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_s)$	向量 $\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\cdots,\ \boldsymbol{x}_s$ 生成的子空间
$V^{\perp}$	子空间 V 的正交补
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的共轭转置
$(\boldsymbol{A})_{ij}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 i 行 j 列处的元素
$\lVert\boldsymbol{A}\rVert$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的任意范数
$\lVert\boldsymbol{A}\rVert_F$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 Frobenius 范数
$\rho(\boldsymbol{A})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的谱半径
$\mathrm{cond}(\boldsymbol{A})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的条件数
$\lVert\boldsymbol{x}\rVert_p$	向量 $\boldsymbol{x}$ 的 p- 范数,l_p 范数
$\boldsymbol{T}_{ij}$	平面$[\boldsymbol{e}_i,\ \boldsymbol{e}_j]$中的旋转矩阵
$\sigma_i=\sqrt{\lambda_i}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 个奇异值
λ_i 或 $\lambda_i(\boldsymbol{A})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 个特征值

$\mathrm{Re}(\lambda)$	复数 λ 的实部
$\mathrm{Im}(\lambda)$	复数 λ 的虚部
G_i	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 个 Gerschgorin 圆
$R_i(\boldsymbol{A})$ 或 R_i	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 个 Gerschgorin 圆半径
$R(\boldsymbol{x})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 Rayleigh 商
$\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的直积,Kronecker 积
$\overline{\mathrm{vec}}(\boldsymbol{A})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 按行拉直所得到的列向量
$P_{L,M}$	沿着空间 M 向空间 L 的投影算子
P_L	正交投影算子
$\boldsymbol{A}^+$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 Moore-Penrose 逆
$\boldsymbol{A}^{(i,j,\cdots,l)}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的$\{i, j, \cdots, l\}$- 逆
$A\{i, j, \cdots, l\}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的$\{i, j, \cdots, l\}$- 逆的集合
$\boldsymbol{A}^{(d)}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 Drazin 逆
$\boldsymbol{A}^{\#}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的群逆
$\boldsymbol{L}_{-1}$	反周期 Jacobi 矩阵
$\boldsymbol{A} > \boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都是 Hermite 矩阵,且 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵
$\boldsymbol{A} \geqslant \boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都是 Hermite 矩阵,且 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 为非负定矩阵
$\boldsymbol{A} \geqq \boldsymbol{O}(x \geqq \boldsymbol{0})$	非负矩阵 $\boldsymbol{A}$(非负向量 $\boldsymbol{x}$),$\boldsymbol{A}$(或 $\boldsymbol{x}$) 的每个元素都是非负实数
$\boldsymbol{A} \geqslant \boldsymbol{O}(x \geqslant \boldsymbol{0})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$(向量 $\boldsymbol{x}$) 不是零矩阵(向量) 的非负矩阵(向量)
$\boldsymbol{A} > \boldsymbol{O}(\boldsymbol{x} > \boldsymbol{0})$	正矩阵 $\boldsymbol{A}$(正向量 $\boldsymbol{x}$), 矩阵 $\boldsymbol{A}$(向量 $\boldsymbol{x}$) 的每个元素都是正数
V. L. 稳定	Volterra-Lyapunov 稳定
P_0^+	主子式的值非负,且同阶主子式中至少有一个为正值的矩阵集合

$\mathbf{R}_{+}^{n}$	实 n 维向量空间 $\mathbf{R}^{n}$ 中全体非负向量所构成的子集合

目　　录