不等式

严镇军

人民教育出版社

不 等 式

严镇军　编

人民教育出版社出版
新华书店总店科技发行所发行
北京市房山区印刷厂印装

开本787×1092　1/32　印张5.25　字数105000
1990年3月第1版　1990年3月第1次印刷
印数　1—1,750
ISBN 7-107-10434-9
G·1555　定价 1.80元

目　录

不等式的基本性质

1. 不等式的基本性质

实数集内的任意两个数a、b总是可以比较大小的．如果$a-b$是正数，则$a>b$；如果$a-b$是零，则$a=b$；如果$a-b$是负数，则$a<b$．反过来也对．即有

$$a\geqslant b\Longleftrightarrow a-b\geqslant 0,$$

$$a<b\Longleftrightarrow a-b<0.$$

这里符号“$\Longleftrightarrow$”表示“等价于”．

这个定义虽然简单，实际它反映不等式的本质．许多不等式的证明，是从这个定义出发．首先，根据不等式的定义，容易证明下述不等式的简单性质，这些性质是证明其他不等式的基本工具．

(1) $a>b\Longleftrightarrow b<a$（对称性）．

(2) 若$a>b$，$b>c$，则$a>c$（传递性）．

(3) 若$a>b$，则$a+c>b+c$（加法保序性）．

(4) 若$a>b$，$c>0$，则$ac>bc$（乘正数保序性）；
若$a>b$，$c<0$，则$ac<bc$．

(5) 若$a>b$，$c>d$，则$a+c>b+d$；
若$a>b$，$c<d$，则$a-c>b-d$．

(6) 若$a>b>0$，$c>d>0$，则$ac>bd$．

(7) 若$a>b$，$ab>0$，则$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

(8) 若$a>b>0$，$0<c<d$，则$\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$.

(9) 若$a>b>0$，$n\in N$，则 $a^n>b^n$，$\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$.

(10) 若 $a>b>0$，m、$n\in N$，则 $a^{m/n}>b^{m/n}$，$a^{-m/n}<b^{-m/n}$.

2. 含绝对值的不等式

以下几个含绝对值的基本不等式，在后面的论证中是常用的.

(1) $|x|\leqslant a\Longleftrightarrow x^2<a^2\Longleftrightarrow -a<x<a$.

$|x+b|\leqslant a\Longleftrightarrow -a-b\leqslant x\leqslant a-b$.

(2) $|x|\geqslant a\,(a>0)\Longleftrightarrow x^2\geqslant a^2\Longleftrightarrow x\geqslant a$或$x\leqslant -a$.

(3) $||a|-|b||\leqslant|a\pm b|\leqslant|a|+|b|$.

(4) $|a_1+a_2+\cdots+a_n|\leqslant|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|$.

一　证明不等式的基本方法和技巧

不等式的证明没有固定的程序，证法因题而异，灵活多样，技巧性强．其最基本的手法是应用定义及基本性质，并通过代数变换予以论证．最常用的方法大致有比较法、综合法、反推法、反证法、数学归纳法等．

1．比较法

比较法有两种常用形式：由定义，欲证 $a>b$，只需证 $a-b>0$；由基本性质(4)，若$b>0$，欲证$a>b$，只需证$\frac{b}{a}<1$或$\frac{a}{b}>1$．

例1　已知a、$b\in R^+$，求证：$a^ab^b\geqslant a^bb^a$，等号当且只当$a=b$时成立．

证法一：由于要证的不等式关于a、b对称，故不妨设$a\geqslant b>0$．

$\because$　$a-b\geqslant0$，

$\therefore$　$a^ab^b-a^bb^a=a^bb^b(a^{a-b}-b^{a-b})\geqslant0$，

从而原不等式得证．显然上面的不等式当且只当 $a^{a-b}=b^{a-b}$（即$a=b$）时等号成立，故原不等式当且只当$a=b$时成立等号．

证法二：设$a\geqslant b>0$，

$\because$　$\frac{a}{b}\geqslant1$，$a-b\geqslant0$，

$$\therefore\quad \frac{a^a b^b}{a^b b^a}=\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}\geqslant 1.$$

故原不等式得证．且从上式易知，当且只当$a=b$时等号成立．

例2　已知a，b，$c\in R^+$，求证：

$$a^a b^b c^c\geqslant (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}.$$

证明：由于不等式关于a，b，c的对称性，不妨设$a\geqslant b\geqslant c>0$，

$$\therefore\quad \frac{a^a b^b c^c}{(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a-b}{3}}\left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{b-c}{3}}\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{a-c}{3}}\geqslant 1.$$

故原不等式得证．

本题可以作如下的推广：如果$a_i\in R^+(i=1、2、\cdots、n)$，那么，

$$a_1^{a_1}a_2^{a_2}\cdots a_n^{a_n}\geqslant (a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}}.\qquad (1)$$

证明请读者自己完成．

在上述两题的证明中，都利用了不等式的对称性，增加了一个附加条件($a\geqslant b>0$及$a\geqslant b\geqslant c>0$)，从而给论证带来了很大的方便，这种手法在不等式的证明中是常用的．这里必须指出，一个不等式关于字母a_1、a_2、$\cdots$、a_n是对称的，其含义是指：把任何两个字母a_i和a_j($i\neq j$)对调位置，都不改变这个不等式．如不等式(1)，对调任何两个字母都不变，它关于a_1、a_2、$\cdots$、a_n对称，这时可作补充假设$a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n$来论证．如果一个不等式不具备上述意义下的对称性，是不能随意添加这个补充假设的．关于对称性问题，在第七节中还要讨论．

比较法还有另一种形式：为了证明一个外形上很复杂的不等式$A\leqslant B$，如果用某种方法能断定$A\leqslant C$，我们可以尝试

去证明$C\leqslant B$（如果形式上它要比$A\leqslant B$简单）. 若能达到这个目的，则证得$A\leqslant B$（传递性）. 这种证明不等式的方法，实际上是一个加强命题的手法，即需要证明不等式$A\leqslant B$，首先用某种方法直接断定$A\leqslant C$，又证明了较强的不等式$C\leqslant B$，所以有$A\leqslant B$. 当然$C\leqslant B$也可能不成立，那就只有另辟它径去证$A\leqslant B$.

例3 已知$0\leqslant a, b, c\leqslant 1$，求证：

$$\frac{a}{b+c+1}+\frac{b}{c+a+1}+\frac{c}{a+b+1}+(1-a)(1-b)(1-c)\leqslant 1.$$

证明：显然，对本题如果把左端直接通分会把问题弄得很复杂. 不失一般性，可设$0\leqslant a\leqslant b\leqslant c\leqslant 1$，于是，有

$$\frac{a}{b+c+1}+\frac{b}{c+a+1}+\frac{c}{a+b+1}\leqslant\frac{a+b+c}{a+b+1},$$

因而可以尝试去证较简单的不等式

$$\frac{a+b+c}{a+b+1}+(1-a)(1-b)(1-c)\leqslant 1. \qquad (2)$$

$$\because\quad 左边=\frac{a+b+1}{a+b+1}+\frac{c-1}{a+b+1}+(1-a)(1-b)(1-c)$$

$$=1-\frac{1-c}{a+b+1}[1-(1+a+b)(1-a)(1-b)],$$

又 $(1+a+b)(1-a)(1-b)\leqslant(1+a+b+ab)(1-a)(1-b)$

$$=(1+a)(1+b)(1-a)(1-b)=(1-a^2)(1-b^2)\leqslant 1,$$

故不等式(2)得证，从而原不等式成立.

例4 已知$m, n\in N$，$m>n$，求证：

(1) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$，

(2) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3$.

证明：(1) 只需证明

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \tag{3}$$

即可．由二项式定理，有

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(\frac{1}{n}\right)^k=\sum_{k=0}^{n}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}\cdot\frac{1}{k!}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right),$$

同理 $\quad\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$

$$=\sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)$$

$$\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

现在不等式(3)是很显然的了，因为比较上面两式右端和式下的项，对每个k($k=0, 1, 2, \cdots, n$)，有

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

$$<\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right).$$

(2) $\quad\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$

$$<\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}<1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}$$

$$=1+2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]<3.$$

2. 综合法

综合法是由题设条件出发，根据不等式的性质(或其他已知不等式，特别是后面要讲到的一些重要不等式)，推导出要证的不等式. 下面的几个不等式在证题时常用到：

(1) 若a、$b\in R$，则$a^2\geqslant 0$，$(a-b)^2\geqslant 0$.

(2) 若a_1，$a_2\in R^+$，则

$$\frac{a_1+a_2}{2}\geqslant\sqrt{a_1a_2}.$$

等号当且只当$a_1=a_2$时成立. 由这个不等式还可以得到另一些常用的不等式：

$$xy\leqslant\left(\frac{x+y}{2}\right)^2\leqslant\frac{x^2+y^2}{2}\quad(x、y\in R),$$

$$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 2\quad(a、b\in R^+).$$

(3) 若a_1、a_2、$a_3\in R^+$，则

$$\frac{a_1+a_2+a_3}{3}\geqslant\sqrt[3]{a_1a_2a_3}.$$

等号当且只当$a_1=a_2=a_3$时成立.

上面的(2)及(3)中的不等式，都称为算术平均-几何平均不等式，以后引用它们时分别简记为$A_2\geqslant G_2$及$A_3\geqslant G_3$.

例5 设a、b、c是互不相等的正数，且$abc=1$，求证：

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}>\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}.$$

证明：先把左边的和改写成

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{b}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{c}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right),$$

由$A_2\geqslant G_2$，并注意到$b\neq c$，得

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)>\sqrt{\frac{1}{bc}}=\sqrt{\frac{a}{abc}}=\sqrt{a}.$$

同理 $$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)>\sqrt{b},$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)>\sqrt{c}.$$

再把以上三个同向不等式相加，即得要证的不等式.

在本题的证明中，我们把和式$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$的各项都拆成了二项，然后又重新组合成三项，再应用$A_2\geqslant G_2$完成命题的证明.这个方法称为**拆项法**.读者可用拆项方法证明：

$$\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}>a+b+c,$$

其中a、b、$c\in R^+$且互不相等.

例6 设$x_i\in R^+(i=1, 2, \cdots, n)$，求证：

$$\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_3}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}+\frac{x_n^2}{x_1}\geqslant x_1+x_2+\cdots+x_n.$$

证明：由$A_2\geqslant G_2$，得

$$\frac{x_1^2}{x_2}+x_2\geqslant 2\sqrt{\frac{x_1^2}{x_2}\cdot x_2}=2x_1.$$

同理 $$\frac{x_2^2}{x_3}+x_3\geqslant 2x_2,$$

……

$$\frac{x_{n-1}^2}{x_n}+x_n\geqslant 2x_{n-1},$$

$$\frac{x_n^2}{x_1}+x_1\geqslant 2x_n.$$

把以上n个同向不等式相加，得

$$\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_3}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}+\frac{x_n^2}{x_1}+(x_1+x_2+\cdots+x_n)$$
$$\geqslant 2(x_1+x_2+\cdots+x_n),$$
$$\therefore\quad \frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_3}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}+\frac{x_n^2}{x_1}\geqslant(x_1+x_2+\cdots+x_n).$$

例5及例6的证明中，都是利用一些简单的不等式相加，得到要证的不等式，这不仅是一种常用证题手法，也是一种“造题”方法．特别是根据算术平均-几何平均不等式，先写出一些简单不等式相加或相乘，就可以得到各种命题．例如，由$a_i\in R^+(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$及$A_3\geqslant G_3$可得

$$1+a_1+a_2\geqslant 3\sqrt[3]{1\cdot a_1a_2}=3\sqrt[3]{a_1a_2},$$
$$1+a_2+a_3\geqslant 3\sqrt[3]{a_2a_3},$$
$$\cdots\cdots$$
$$1+a_{n-1}+a_n\geqslant 3\sqrt[3]{a_{n-1}a_n},$$
$$1+a_n+a_1\geqslant 3\sqrt[3]{a_na_1},$$

由于这些不等式两边都是正数，把它们相乘，即得

$$(1+a_1+a_2)(1+a_2+a_3)\cdots(1+a_{n-1}+a_n)(1+a_n+a_1)$$
$$\geqslant 3^n\sqrt[3]{a_1^2a_2^2\cdots a_n^2}.$$

这就得到了下述命题：设$a_i\in R^+$，$a_1a_2\cdots a_n=8$，则

$$(1+a_1+a_2)(1+a_2+a_3)\cdots(1+a_{n-1}+a_n)(1+a_n+a_1)$$
$$\geqslant 4\cdot 3^n.$$

下面我们再利用$A_2\geqslant G_2$及指数函数$a^x(a>1)$的递增性来造一个题．设$b,\ c\in R^+$，则有

$$a^b+a^c\geqslant 2\sqrt{a^ba^c}=2a^{\frac{b+c}{2}}\geqslant 2a^{\sqrt{bc}},\qquad(4)$$

特别地，取$a=3$，$b=\sqrt[12]{x}$，$c=\sqrt[4]{x}\ (x>0)$，则

$$\sqrt{bc}=(x^{\frac{1}{12}}x^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{2}}=x^{\frac{1}{6}}.$$

把a，b，c代入(4)式，就得到了这样一个命题：

设$x\in R^+$，求证：$3^{\sqrt[3]{x}}+3^{\sqrt[6]{x}}\geqslant 2\cdot 3^{\sqrt[4]{x}}$.

例7 已知a，$b\in R^+$，且$a+b=1$，求证：

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)\geqslant\frac{25}{4}.$$

证明：因$a+b=1$，故$(a+b)^2=1$，$a^2+b^2=1-2ab$.

$$\begin{aligned}\therefore\quad &\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)\\ &=\frac{a^2b^2+a^2+b^2+1}{ab}\\ &=\frac{a^2b^2-2ab+2}{ab}=\frac{(ab-1)^2+1}{ab}.\end{aligned}$$

又 $$ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{1}{4},$$

$$\therefore\quad \frac{(ab-1)^2+1}{ab}\geqslant 4\left[\left(\frac{1}{4}-1\right)^2+1\right]=\frac{25}{4},$$

即 $$\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)\geqslant\frac{25}{4}.$$

例8 设$a,b,c\in R^+$，且$a+b+c=1$，又设$x_1,x_2,x_3\in R^+$，令$y_1=ax_1+bx_2+cx_3$，$y_2=bx_1+cx_2+ax_3$，$y_3=cx_1+ax_2+bx_3$，求证：

$$y_1y_2y_3\geqslant x_1x_2x_3.$$

证明：将$y_1y_2y_3$的乘积展开，并整理得

$$\begin{aligned}y_1y_2y_3=&abc(x_1^3+x_2^3+x_3^3)+\\ &+(ab^2+bc^2+ca^2)(x_1x_2^2+x_2x_3^2+x_3x_1^2)\\ &+(a^2b+b^2c+c^2a)(x_1^2x_2+x_2^2x_3+x_3^2x_1)\\ &+(a^3+b^3+c^3+3abc)x_1x_2x_3,\end{aligned}$$

由$A_3\geqslant G_3$，有

$$x_1^3+x_2^3+x_3^3\geqslant 3x_1x_2x_3,$$

$$x_1x_2^2+x_1x_3^2+x_3x_1^2\geqslant 3\sqrt[3]{x_1x_2^2\cdot x_2x_3^2\cdot x_3x_1^2},$$

$y_1 \geq 3\sqrt[3]{abc\, x_1 x_2 x_3}$ [redacted]

$y_2 \geq \cdots$ $a+b+c=1$

$y_3 \geq \cdots$ [redacted]

$y_1 y_2 y_3 \geq 27\, abc\, x_1 x_2 x_3$ [redacted]

$$=3x_1x_2x_3.$$

同理 $x_1^2x_2+x_2^2x_3+x_3^2x_1 \geqslant 3x_1x_2x_3$,

$$\therefore \quad y_1y_2y_3 \geqslant [a^3+b^3+c^3+3(a^2b+b^2c+c^2a) +3(ab^2+bc^2+ca^2)+6abc]x_1x_2x_3 =(a+b+c)^3x_1x_2x_3.$$

再由题设 $a+b+c=1$，得

$$y_1y_2y_3 \geqslant x_1x_2x_3.$$

请读者自己分析，等号当且只当 $x_1=x_2=x_3$ 时成立.

例9 设 $x+y+z=0$，求证：

$$6(x^3+y^3+z^3)^2 \leqslant (x^2+y^2+z^2)^3.$$

证法一：由 $z=-(x+y)$，得 $x^3+y^3+z^3=3xyz$，记 $I=6(x^3+y^3+z^3)^2=54x^2y^2z^2$，若由此直接应用 $A_3 \geqslant G_3$，只能得到较粗糙的不等式

$$I \leqslant 54\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{3}\right)^3=2(x^2+y^2+z^2)^3.$$

这促使我们对问题重新来考虑．由于 $x+y+z=0$，不妨设 $x \geqslant 0$，$y \leqslant 0$，把 I 改写成

$$I=216 \cdot \frac{|xy|}{2} \cdot \frac{|xy|}{2} \cdot z^2$$

$$\leqslant 216\left(\frac{\frac{|xy|}{2}+\frac{|xy|}{2}+z^2}{3}\right)^3=(2z^2+2|xy|)^3.$$

再注意到 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=z^2+2|xy|$，因而 $2z^2+2|xy|=x^2+y^2+z^2$.这就得到要证的不等式.

证法二：由于 $x+y+z=0$，不妨设 x，$y \geqslant 0$，$z \leqslant 0$.由 $x+y=-z$，得 $z^2=(x+y)^2$.从而

$$(x^2+y^2+z^2)^3=(x^2+y^2+(x+y)^2)^3=8(x^2+xy+y^2)^3$$

由 $A_3 \geqslant G_3$，得

$$x^2+xy+y^2=\frac{x(x+y)}{2}+\frac{y(x+y)}{2}+\frac{x^2+y^2}{2}$$

$$\geqslant\frac{x(x+y)}{2}+\frac{y(x+y)}{2}+xy$$

$$\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{x^2y^2(x+y)^2}{4}}=3\sqrt[3]{\frac{x^2y^2z^2}{4}}.$$

$$\therefore\quad (x^2+y^2+z^2)^3\geqslant 8\times 27\times\frac{x^2y^2z^2}{4}=54x^2y^2z^2$$

$$=6(x^3+y^3+z^3)^2.$$

由本例可见利用$A_3\geqslant G_3$解题是很灵活的．同一个和式可以用不同方式表示成若干项的和（各项都非负）；同一个乘式可以用不同方式表示成若干个因子相乘．有时应用这个不等式时，还要巧妙地凑上因子1．

例10 设x_1，x_2，$x_3\in R^+$，求证：

$$\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_3}{x_2}+\frac{x_1}{x_3}\leqslant\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^3+\left(\frac{x_2}{x_3}\right)^3+\left(\frac{x_3}{x_1}\right)^3.$$

证明：由$A_3\geqslant G_3$，得

$$\frac{x_2}{x_1}=\frac{x_2}{x_3}\cdot\frac{x_3}{x_1}\cdot 1\leqslant\frac{1}{3}\left(\frac{x_2}{x_3}\right)^3+\frac{1}{3}\left(\frac{x_3}{x_1}\right)^3+\frac{1}{3},$$

$$\frac{x_3}{x_2}=\frac{x_1}{x_2}\cdot\frac{x_3}{x_1}\cdot 1\leqslant\frac{1}{3}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^3+\frac{1}{3}\left(\frac{x_3}{x_1}\right)^3+\frac{1}{3},$$

$$\frac{x_1}{x_3}=\frac{x_1}{x_2}\cdot\frac{x_2}{x_3}\cdot 1\leqslant\frac{1}{3}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^3+\frac{1}{3}\left(\frac{x_2}{x_3}\right)^3+\frac{1}{3}.$$

又 $$1=\frac{x_1}{x_2}\cdot\frac{x_2}{x_3}\cdot\frac{x_3}{x_1}\leqslant\frac{1}{3}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^3+\frac{1}{3}\left(\frac{x_2}{x_3}\right)^3+\frac{1}{3}\left(\frac{x_3}{x_1}\right)^3.$$

把以上四个同向不等式相加，即得要证的不等式．

在证明关于分式的不等式时，常用到这样一个不等式：设$b>a\geqslant 0$，$m\geqslant 0$，则

$$\frac{a}{b}\leqslant\frac{a+m}{b+m}. \qquad (5)$$

当且仅当$m=0$时成立等号.请读者自己作出其证明.

例11 求证：$\dfrac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\dfrac{|a|}{1+|a|}+\dfrac{|b|}{1+|b|}$.

证法一：因$1+|a+b|>|a+b|\geqslant0$，故由(5)式，对任何$m\geqslant0$，有

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\frac{|a+b|+m}{1+|a+b|+m}.$$

特别地，令$m=|a|+|b|-|a+b|\geqslant0$，得

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}=\frac{|a|}{1+|a|+|b|}+\frac{|b|}{1+|a|+|b|}$$

$$\leqslant\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}.$$

证法二：$\dfrac{|a+b|}{1+|a+b|}=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{|a+b|}}\leqslant\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{|a|+|b|}}$

$$=\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}\text{(以下同证法一)}.$$

上面两例的证明过程中，都曾多次根据分式的性质，并结合其他知识对不等式放大或缩小．这种放缩的方法在不等式的证明中常用．

3. 反推法

前面讲的方法，属于不等式的直接证法．也就是说，由题设出发，经一系列的逻辑推理，得到要证的结果．但对于一些较复杂的不等式，有时很难于直接入手求证，可用间接方法.常用的有反推法及反证法.所谓反推法就是先假定要证的不等式成立，然后由它出发推出一系列与之等价的不等式(即要求推理过程的每一步都可逆)，直到得到一个较容易证

明的不等式或者一个明显成立的不等式.由于等价性,从最后的不等式成立，得知原不等式成立. 这就是通常所说的分析法.

例12　设x，$y\in R^+$，且$x+y=1$，求证：

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\geqslant 9.$$

证明：由题设$0<x<1$，故原不等式等价于

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{1-x}\right)\geqslant 9$$

$$\Longleftrightarrow (x+1)(1-x+1)\geqslant 9x(1-x)$$

$$\Longleftrightarrow 2+x-x^2\geqslant 9x-9x^2$$

$$\Longleftrightarrow (2x-1)^2\geqslant 0.$$

最后一个不等式显然成立，从而原不等式得证.

上述证明中使用了这样一种方法：把一个表达式化为这样一种形式，使之能利用一个实数的平方是非负的，这种手法在不等式的论证中常用.

例13　试证明$f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$是$(0,\ 1)$内的增函数.

证明：依题设，我们要证明当$0<x_1<x_2<1$时，有

$$f(x_1)=\frac{x_1}{1+x_1^2}<f(x_2)=\frac{x_2}{1+x_2^2}.$$

它等价于
$$\frac{x_2}{1+x_2^2}-\frac{x_1}{1+x_1^2}>0$$

$$\Longleftrightarrow \frac{x_2(1+x_1^2)-x_1(1+x_2^2)}{(1+x_2^2)(1+x_1^2)}>0$$

$$\Longleftrightarrow \frac{(x_2-x_1)(1-x_1x_2)}{(1+x_2^2)(1+x_1^2)}>0.$$

由题设 $x_2-x_1>0$，$1-x_1x_2>0$，$1+x_2^2>0$，$1+x_1^2>0$，故最