

应用数学丛书

非线性
二阶偏微分方程

董光昌

清华大学出版社

511/170/24

清 华 大 学
应 用 数 学 丛 书

第 5 卷

非线性二阶偏微分方程

董 光 昌

国家自然科学基金资助项目

清华大学出版社

内 容 简 介

本书是关于非线性二阶偏微分方程的专著。除第一章外，其它各章均取材于作者已发表或尚未发表的论文。

贯穿本书的是先验估计方法，重点研究椭圆型方程与抛物型方程，同时也涉及了一些双曲型方程。书中各章均有实际背景

本书可作为数学专业研究生教材，也可供有关研究人员、教师、高年级大学生参考。

非线性二阶偏微分方程

董 光 昌

责任编辑 潘真微

☆

清华大学出版社出版

北京 清华园

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

☆

开本：850×1168 1/32 印张：10 字数：258千字

1988年8月第1版

1988年8月第1次印刷

印数：0001-6000

定价：平 2.00 元
精 4.50 元

平 ISBN 7-302-00257-6/O·48(课)

精 ISBN 7-302-00256-8/O·47(课)

关于《应用数学丛书》

为了满足广大科技人员、高等院校教师、研究生进一步学习应用数学的需要，我们编辑出版本丛书。丛书内容将包括应用数学的各个方面、有关的边缘科学以及应用数学的方法等。限于我们的水平和经验，丛书中难免有不少错误和不足之处，诚恳希望广大读者批评指正。

清华大学《应用数学丛书》编辑委员会

1983.4

主编 赵访熊

编委 常 迥 栾汝书 孙念增 黄克智 肖树铁

目 录

引言.....	1
第一章 具散度结构头部的二阶拟线性抛物型方程的第一边值问题.....	3
§ 1 解的有界估计与 Hölder 条件估计.....	3
§ 2 $D_x u$ 的有界估计	7
§ 3 $D_x u$ 的 Hölder 条件估计	16
§ 4 第一边值问题解的存在性与唯一性	23
第二章 非线性电报方程的周期边值问题.....	33
§ 1 多维电报方程非共振情况下解存在性的证明	34
§ 2 共振情况的讨论	39
§ 3 解光滑性的一些讨论	43
第三章 非线性 Schrödinger 方程的初值问题	47
§ 1 一些预备知识	47
§ 2 线性 Schrödinger 方程的初值问题	50
§ 3 非线性 Schrödinger 方程的初值问题	54
第四章 高维亚音速绕流问题.....	65
§ 1 问题的介绍	65
§ 2 线性问题的预备知识	68
§ 3 辅助问题的求解	71
§ 4 绕流问题的求解及解的简单性质	82
§ 5 绕流问题解的其它性质	84
第五章 蜕化拟线性抛物型方程的初、边值问题.....	88
§ 1 定解问题的叙述与解的 Hölder 条件估计.....	89
§ 2 第一边值问题解的存在性	117

• v •

§ 3	解的唯一性	121
§ 4	初值问题	127
第六章	蜕化拟线性抛物型方程解的传播速度	130
§ 1	定解区域的估计	130
§ 2	解的下限估计	141
第七章	抛物型方程的 Александров 型极值原理与 Bony 型极值原理	145
§ 1	引言	145
§ 2	凹函数的若干性质	151
§ 3	凹包函数的讨论	163
§ 4	几种情况下的 Александров 型极值原理	169
§ 5	Bony 型极值原理	180
第八章	密度定理及其应用	183
§ 1	密度定理的叙述	183
§ 2	几个引理与密度定理的证明	186
§ 3	可测系数线性抛物方程解的 Harnack 不等式	194
§ 4	拟线性抛物方程解的 Hölder 条件估计	196
§ 5	拟线性抛物方程组解的 Hölder 条件估计	200
第九章	完全非线性抛物型方程	208
§ 1	解 u 的有界估计与 $D_x u$ 的内估计	209
§ 2	二阶微商的内有界估计	214
§ 3	二阶微商的 Hölder 条件内估计	221
§ 4	u 的近边 Hölder 条件估计	225
§ 5	$D_x u$ 的近边有界估计与 Hölder 条件估计	231
§ 6	二阶微商的近边有界估计与 Hölder 条件估计	243
§ 7	自然结构条件下第一边值问题解的存在性与唯一 性	246
第十章	完全非线性抛物型方程(续)	252
§ 1	拟线性抛物方程具第二种自然结构条件下的密度定	

理	253
§ 2 解的 Hölder 条件估计与第一边值问题解的存在、唯一性	279
§ 3 具第二种自然结构条件的完全非线性抛物方程解的一些先验估计与第一边值问题解的存在、唯一性	293
后记	302
符号索引	303
参考文献	306

引 言

非线性偏微分方程定解问题的求解,没有一般方法可循,但也有一些效力较大,适应面较为广泛的方法.下面所谈的就是其中一类方法.其步骤如下:

1. 选定一个适当的函数空间.
2. 定出一族函数映象.一般是用线性定解问题逼近这一非线性定解问题.建立起解与给定变元间的映象.
3. 证明此映象族有一不动点,得到非线性定解问题的至少一个解.
4. 解性质的研究.由第3步得到的解一般较粗糙,再进一步研究此解的光滑性等.

第1步多半是选用某种 Banach 空间,如 C^α 空间,Соболев 空间等,以及第2步对线性定解问题作研究,均可参阅[49].第3步不动点定理,常用的有压缩映象原理, Leray-Schauder 映象的拓扑度定理等.由于许多书都讲述这些不动点定理,我们就不讲了.第2,3,4步都用一定的估计(包括先验估计),因此下面我们主要讲估计方法.

非线性偏微分方程定解问题的其它解法,在此也稍提一下.

非线性偏微分方程定解问题作某种变形,化为另一类问题求解.其中很吸引人的是化为非线性变分问题求解^[1].它能解决较多的问题,但也受到相当的限制,即原非线性方程必须是某一变分问题的 Euler 方程,这使方程系数受到较大限制.

用半群方法解决非线性发展方程的某些定解问题,也能使较多问题得到解决^{[2],[3]}.但也受到相当的限制,即方程连初、边值在

内要适合半群性质,区域也要适当规则等。

还有另一些解法。

由此本书下面所叙述的仅是一类解决非线性定解问题的方法,即所用工具主要是不动点与先验估计的方法.对拟线性方程是如此,对完全非线性方程,更拓广了一般极值原理到 Александров 型极值原理,使得做先验估计方面更为有力一些。

第一章 具散度结构头部的二阶拟线性抛物型方程的第一边值问题^[4]

设 Q 为 R^n 中的有界区域, $T > 0$. 在 $Q = Q \times (0, T]$ 中, 考察具散度结构头部的方程

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u \equiv u_t - \sum_i \frac{d}{dx_i} (a_i(x, t, u, u_{x_k})) \\ + a(x, t, u, u_{x_k}) = 0, \quad (1 \leq k \leq n) \end{aligned}$$

与初、边值条件

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad (x \in Q),$$

$$u|_S = \phi|_S,$$

其中 $S = \partial Q \times [0, T]$, φ, ϕ 分别是 Q 与 S 上给定的函数. 设 Q 满足条件 (A):

$$\text{mes}[K(\rho) \cap Q] \leq (1 - \theta_0) \text{mes} K(\rho), \quad 0 < \theta_0 < 1, \quad \rho < a_0, \quad (A)$$

其中 $K(\rho) = \{|x - x_0| < \rho, x_0 \in \partial Q\}$, θ_0 与 a_0 为常数. 对系数 a_i, a 的条件将按需要逐步给出. 要证明上述初、边值问题解为存在唯一.

§ 1 解的有界估计与 Hölder 条件估计

进行先验估计. 设 $u \in C^{2,1}(\bar{Q})$, 于 Q 内为第一边值问题的解, 且设 $a, \frac{\partial a_i}{\partial p_i}, \frac{\partial a_j}{\partial u}, \frac{\partial a_j}{\partial x_i}$ 当变量有界时为有界, 则有

定理 1 设 $a_i (1 \leq i \leq n), a$ 满足条件

$$\sum \frac{\partial a_i}{\partial p_i} \xi_i \xi_j |_{p=0} \geq 0, \quad p = (p_1, \dots, p_n),$$

$$u \left[- \sum \frac{\partial a_i(x, t, u, 0)}{\partial x_i} + a(x, t, u, 0) \right] \geq -b_1 u^2 - b_2.$$

$\forall (x, t) \in \bar{Q}$, 其中常数 $b_1 \geq 0, b_2 \geq 0$, 则解的最大模可估计如下:

$$\max_{\bar{Q}} |u(x, t)| \leq \min_{b \geq b_1} e^{bT} \left[\max_{\partial^* Q} |u(x, t)| + \left(\frac{b_2}{b - b_1} \right)^{1/2} \right] \equiv M,$$

其中 $\partial^* Q = Q \times \{t = 0\} \cup S$.

证 当 $u(x, t) \equiv 0$, 定理显然成立, 故可设 $u(x, t) \not\equiv 0$. 作变换 $u = v e^{bt}$ (b 为常数), 估计 v^2 ($\not\equiv 0$) 的最大值. 由于方程

$$u_t - \sum \frac{\partial a_i}{\partial p_i} u_{x_i x_i} - \sum \frac{\partial a_i}{\partial u} u_{x_i} - \sum \frac{\partial a_i}{\partial x_i} + a = 0$$

化为

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (v^2)_t + b v^2 - \frac{1}{2} \sum \frac{\partial a_i}{\partial p_i} (v^2)_{x_i x_i} + \sum \frac{\partial a_i}{\partial p_i} v_{x_i} v_{x_i} \\ & - \frac{1}{2} \sum \frac{\partial a_i}{\partial u} (v^2)_{x_i} + \left(a - \sum \frac{\partial a_i}{\partial x_i} \right) v e^{-bt} = 0, \end{aligned}$$

当 v^2 ($\not\equiv 0$) 在 $\bar{Q}$ 中的最大点不在 $\partial^* Q$ 上时, 于此点处, $v_{x_i} = 0$

($1 \leq i \leq n$), $(v^2)_t \geq 0$, $\sum \frac{\partial a_i}{\partial p_i} (v^2)_{x_i x_i} \leq 0$. 因此

$$\begin{aligned} b v^2 & \leq \left[\sum \frac{\partial a_i}{\partial x_i} - a \right]_{u_{x_1} = \dots = u_{x_n} = 0} v e^{-bt} \leq \frac{v}{u} e^{-bt} (b_1 u^2 + b_2) \\ & \leq b_1 v^2 + b_2, \end{aligned}$$

故有

$$|v| \leq \left(\frac{b_2}{b - b_1} \right)^{1/2}.$$

与边界条件结合得

$$|v| \leq \max \left[|v|_{\partial^* Q}, \left(\frac{b_2}{b - b_1} \right)^{1/2} \right] \leq \max_{\partial^* Q} |u| + \left(\frac{b_2}{b - b_1} \right)^{1/2},$$

$$\begin{aligned} \max_{\bar{Q}} |u(x, t)| & \leq e^{bT} \max_{\bar{Q}} |v| \leq e^{bT} \left[\max_{\partial^* Q} |u(x, t)| \right. \\ & \left. + \left(\frac{b_2}{b - b_1} \right)^{1/2} \right], \end{aligned}$$

再右边对 $b \geq b_1$ 取 $\min$. 定理证毕.

作 Hölder 条件估计, 需再假设存在正常数 μ_1, ν_1 , 使得当 $(x, t) \in \bar{Q}, |u| \leq M, p = (p_1, \dots, p_n) \in R^n$ 时, 下面两式成立:

$$\sum_i a_i(x, t, u, p_k) p_i \geq \nu_1 |p|^2 + \mu_1,$$

$$\begin{aligned} \sum_i |a_i(x, t, u, p_k)| (1 + |p|) + |a(x, t, u, p_k)| \\ \leq \mu_1 (1 + |p|^2). \end{aligned}$$

$\mathcal{L}u = 0$ 乘 $\eta(x, t)$ 于 Q 积分, 当 t 固定时, 要求 $\eta(x, t) \in \dot{W}_2^1(Q)$, 得

$$\begin{aligned} \int_Q u_t(x, t) \eta(x, t) dx + \int_Q [\sum_i a_i(x, t, u, u_{x_i}) \eta_{x_i}(x, t) \\ + a(x, t, u, u_{x_k}) \eta(x, t)] dx = 0, \end{aligned}$$

取 $\eta(x, t) = [u(x, t) - k]^+ \zeta^2(x)$, k 为常数, $\zeta(x)$ 为于 $K(\rho) = \{x \mid |x - x^0| < \rho\}$ ($x^0 \in Q$) 内不为零的截断函数, 为保证 $\eta \in \dot{W}_2^1(Q)$, 取 $k \geq \max_{x \in K(\rho) \cap S} u(x, t)$ 即可, 记 $A_{k, \rho}(t) = \{x \in K(\rho) \cap Q \mid u(x, t) > k\}$. 由上式得:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{A_{k, \rho}(t)} (u - k)^2 \zeta^2 dx + \nu_1 \int_{A_{k, \rho}(t)} |\nabla u|^2 \zeta^2 dx \\ \leq \int_{A_{k, \rho}(t)} \left[\mu_1 \zeta^2 + \left| \sum_i a_i(u - k) 2 \zeta \zeta_{x_i} \right| \right. \\ \left. + |a(u - k) \zeta^2| \right] dx \leq \int_{A_{k, \rho}(t)} \{ \mu_1 \zeta^2 + \mu_1 (u - k) \\ \cdot [2 \zeta |\nabla \zeta| (|\nabla u| + 1) + (|\nabla u|^2 + 1) \zeta^2] \} dx \\ \leq \mu_1 \int_{A_{k, \rho}(t)} \left[\zeta^2 + \varepsilon (|\nabla u|^2 + 1) \zeta^2 + \frac{4}{\varepsilon} (u - k)^2 |\nabla \zeta|^2 \right. \\ \left. + (u - k) (|\nabla u|^2 + 1) \zeta^2 \right] dx, \end{aligned}$$

上式中正数 ε 可以任意取定. 我们取 k 使

$$\max_{K(\rho) \cap Q} [u(x, t) - k] \leq \frac{\nu_1}{4\mu_1} \equiv \delta,$$

取 $\varepsilon = \delta$, 注意到截断函数 $\zeta \leq 1$, 由上式得:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_{A_{k,\rho}(t)} (u-k)^2 \zeta^2 dx + \nu_1 \int_{A_{k,\rho}(t)} |\nabla u|^2 \zeta^2 dx \\ & \leq \gamma \left[\int_{A_{k,\rho}(t)} (u-k)^2 |\nabla \zeta|^2 dx + \text{mes } A_{k,\rho}(t) \right], \end{aligned}$$

其中

$$k \geq \max \left\{ \sup_{x \in K(\rho) \cap \Omega} u(x, t) - \delta, \sup_{x \in K(\rho) \cap S} u(x, t) \right\},$$

$$\gamma = \gamma(\mu_1, \nu_1, M).$$

同法得

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_{B_{k,\rho}(t)} (u-k)^2 \zeta^2 dx + \nu_1 \int_{B_{k,\rho}(t)} |\nabla u|^2 \zeta^2 dx \\ & \leq \gamma \left[\int_{B_{k,\rho}(t)} (u-k)^2 |\nabla \zeta|^2 dx + \text{mes } B_{k,\rho}(t) \right], \end{aligned}$$

其中

$$B_{k,\rho}(t) = \{x \in K(\rho) \cap \Omega \mid u(x, t) < k\},$$

$$k \leq \min \left\{ \inf_{x \in K(\rho) \cap \Omega} u(x, t) + \delta, \inf_{x \in K(\rho) \cap S} u(x, t) \right\}$$

因此

$$u \in \mathcal{B}_2 \left(Q, M, \nu_1, \gamma, \frac{\nu_1}{4\mu_1}, 0 \right),$$

$\mathcal{B}_2$ 类函数的定义见 [49] 抛物型方程部分 §5. 由对 $\mathcal{B}_2$ 类函数性质的研究得到解的 Hölder 条件估计, 即存在 $\alpha > 0$ 使 $\|u\|_{\alpha, Q}$ 可由 $M, \nu_1, \mu_1, \theta_0, a_0$ 与 $\|u\|_{\beta, \partial^* Q}$ 估计. 因而

$$\begin{aligned} \|u\|_{\alpha, Q} &= \sup_{(x,t) \in Q} |u(x, t)| \\ &+ \sup_{(x,t), (x',t') \in Q} \frac{|u(x, t) - u(x', t')|}{(|x - x'|^2 + |t - t'|)^{\alpha/2}} \end{aligned}$$

为有界.

如仅考虑内估计, 则在 $Q' = Q' \times [\varepsilon, T] (Q' \subset Q)$ 中 $\|u\|_{\alpha, Q'}$ 可由 M, ν_1, μ_1 与 $\varepsilon, d(Q', \partial Q)$ 估计.

§ 2 $D_x u$ 的有界估计

再进行 $\nabla u = D_x u = (u_{x_1}, \dots, u_{x_n})$ 的有界估计. 设当 $(x, t) \in \bar{Q}$, $|u| \leq M$, $p \in R^n$ 时有

$$\nu(M)|\xi|^2 \leq \sum \frac{\partial a_i(x, t, u, p_k)}{\partial p_i} \xi_i \xi_i \leq \mu(M)|\xi|^2, \quad \forall \xi \in R^n,$$

$$\begin{aligned} & \sum_i |a_i(x, t, u, p_k)|(1 + |p|) + |a| + \sum_{i,j} \left| \frac{\partial a_i}{\partial p_j} \right| (1 + |p|^2) \\ & + \sum_i \left| \frac{\partial a_i}{\partial u} \right| (1 + |p|) + \sum_{i,k} \left| \frac{\partial a_i}{\partial x_k} \right| \leq \mu(M)(1 + |p|^2). \end{aligned}$$

又假设 $u|_S = 0$. 这一假设基本上不限制一般性, 因为一般是 $u|_S = \phi$, 设 ϕ 可拓广到 $\bar{Q}$ 上使 $\phi(x, t) \in C^{2,1}(\bar{Q})$, 则用 $u(x, t) - \phi(x, t)$ 代替 u , 而考察这一新的 u 即可.

在上述假设下, 先估计 $\|\nabla u\|_{L^2(Q)}$. 做法为考察

$$\int_Q \mathcal{L} u (e^{\lambda u} - 1) dx = 0,$$

λ 为待定常数. 分部积分得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial t} \int_Q (e^{\lambda u} - \lambda u) dx + \int_Q [\sum_i a_i \lambda u_{x_i} e^{\lambda u} \\ & + a(e^{\lambda u} - 1)] dx = 0. \end{aligned}$$

上式对 t 再积分, 应用由 $\sum \frac{\partial a_i}{\partial p_j} \xi_i \xi_j \geq \nu \sum \xi_i^2$ 导出的式子

$$\begin{aligned} \sum_i a_i p_i &= \sum \frac{\partial a_i(x, t, u, \bar{p}_k)}{\partial p_i} p_i p_i + \sum a_i(x, t, u, 0) p_i \\ &\geq \frac{\nu}{2} |p|^2 - C, \end{aligned}$$

($\bar{p}_k$ 在 0 与 p_k 之间) 以及 $|a| \leq \mu(1 + |p|^2)$ 得:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda \nu}{2} \int_0^t \int_Q |\nabla u|^2 e^{\lambda u} dx dt &\leq C \int_0^t \int_Q e^{\lambda u} (\lambda + 1 + |\nabla u|^2) dx dt \\ &+ \frac{1}{\lambda} \int_Q (\lambda u - e^{\lambda u}) dx \Big|_0^t, \end{aligned}$$

取 $\lambda = 4C/\nu$ 得:

$$\int_0^t \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx dt \leq M_1, \quad \forall t \in [0, T].$$

再估计 $\int_{\Omega} |\nabla u|^{2s+2} dx, t \in [0, T], 0 \leq s \leq 3n/2$ (为了下面的应用, 估到 $s \leq 3n/2$ 已足够).

先作内估计. 设中心在 Ω 内的球 $K(2\rho) \subset \Omega$. 取截断函数 $\zeta(x)$ 使 $\zeta(x) = 0$, 当 $x \notin K(2\rho)$. 考察

$$-\int_0^t dt \int_{K(2\rho)} \sum_{k=1}^n \mathcal{L} u \frac{d}{dx_k} (|\nabla u|^{2s} u_{x_k} \zeta^2) dx = 0, \quad (s \geq 0).$$

暂设 u_{ix_k} 与 $D_x^3 u$ 为连续, 上式分部积分得:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2s+2} \int_{K(2\rho)} |\nabla u|^{2s+2} \zeta^2 dx \Big|_{t=0}^{t=t} + \int_0^t dt \int_{K(2\rho)} \sum \left[\frac{da_i}{dx_k} \right. \\ & \quad \cdot \left. \frac{d}{dx_i} (|\nabla u|^{2s} u_{x_k} \zeta^2) - a \frac{d}{dx_k} (|\nabla u|^{2s} u_{x_k} \zeta^2) \right] dx = 0, \end{aligned}$$

由于上式最后结果仅出现 $D^2 u$, 故逼近取极限后知对 $u \in C^{2,1}(\bar{Q})$ 为成立. 由于

$$\begin{aligned} \frac{da_i}{dx_k} &= \sum \frac{\partial a_i}{\partial u_{x_j}} u_{x_j x_k} + \frac{\partial a_i}{\partial u} u_{x_k} + \frac{\partial a_i}{\partial x_k}, \\ \frac{d}{dx_i} (|\nabla u|^{2s} u_{x_k} \zeta^2) &= |\nabla u|^{2s} u_{x_k x_i} \zeta^2 \\ &\quad + 2s |\nabla u|^{2s-2} \sum u_{x_j} u_{x_j x_i} u_{x_k} \zeta^2 + |\nabla u|^{2s} u_{x_k} 2\zeta \zeta_{x_i}, \end{aligned}$$

代入上式并应用 $2ab \leq \varepsilon a^2 + b^2/\varepsilon$ 得:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2s+2} \int_{K(2\rho)} |\nabla u|^{2s+2} \zeta^2 dx \Big|_0^t + \int_0^t \int_{K(2\rho)} \sum \left(\frac{\partial a_i}{\partial u_{x_j}} |\nabla u|^{2s} \right. \\ & \quad \cdot u_{x_k x_i} u_{x_k x_j} \zeta^2 + 2s \frac{\partial a_i}{\partial u_{x_j}} |\nabla u|^{2s-2} u_{x_k} u_{x_k x_j} u_{x_i} u_{x_l x_l} \zeta^2 \Big) dx dt \\ & \leq C_s \int_0^t \int_{K(2\rho)} \left[\varepsilon |\nabla u|^{2s} \sum_{k,i} u_{x_k x_i}^2 \zeta^2 + \frac{1}{\varepsilon} |\nabla u|^{2s} (|\nabla u|^2 + 1) \zeta^2 \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{\varepsilon} |\nabla u|^{2s} (|\nabla u|^2 + 1) |\nabla \zeta|^2 \right] dx dt, \quad 0 < \varepsilon < 1, \end{aligned}$$

$C_s = C(\mu(M), \nu(M), s)$. 记 $\sum_k u_{x_k} u_{x_k x_i} = v_{x_i}$, 其中 $\nu = |p|^2/2$.

取 ε 使 $C_s \varepsilon = \nu/2$, 由上式得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{s+1} \int_{K(2\rho)} |\nabla u|^{2s+2} \zeta^2 dx \Big|_0^t + \nu \int_0^t \int_{K(2\rho)} \left[|\nabla u|^{2s} \sum_{k,i} u_{x_k x_i}^2 \zeta^2 \right. \\ & \quad \left. + 4s |\nabla u|^{2s-2} \sum_i v_{x_i}^2 \zeta^2 \right] dx dt \leq C_s \int_0^t \int_{K(2\rho)} [|\nabla u|^{2s+4} \zeta^2 \\ & \quad + |\nabla u|^{2s+2} |\nabla \zeta|^2] dx dt + C'_s \text{mes } K(2\rho) \frac{1}{\rho^2}, \end{aligned} \quad (1)$$

由于

$$\begin{aligned} \int_{K(2\rho)} |\nabla u|^{2s+4} \zeta^2 dx &= \int_{K(2\rho)} |\nabla u|^{2s+2} \sum u_{x_i} [u(x, t) \\ & \quad - u(x^0, t)]_{x_i} \zeta^2 dx = \int_{K(2\rho)} [u(x, t) - u(x^0, t)] \\ & \quad \cdot [|\nabla u|^{2s+2} \Delta u \zeta^2 + |\nabla u|^{2s+2} \sum u_{x_i} 2\zeta \zeta_{x_i} \\ & \quad + (2s+2) |\nabla u|^{2s} \sum u_{x_i} u_{x_i x_i} u_{x_i} \zeta^2] dx, \end{aligned}$$

其中 x^0 为球 $K(2\rho)$ 的中心. 由于 $u(x, t)$ 满足 Hölder 条件, 导出

$\frac{|u(x, t) - u(x^0, t)|}{|x - x^0|^\alpha}$ 为有界, 故由上式得

$$\begin{aligned} \int_{K(2\rho)} |\nabla u|^{2s+4} \zeta^2 dx &\leq C''_s \rho^\alpha \int_{K(2\rho)} \left(\varepsilon |\nabla u|^{2s+4} \zeta^2 \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{\varepsilon} |\nabla u|^{2s} \sum_{k,i} u_{x_k x_i}^2 \zeta^2 + \frac{1}{\varepsilon} |\nabla u|^{2s+2} |\nabla \zeta|^2 \right) dx, \end{aligned}$$

取 ε 小使 $\varepsilon C''_s = 1/2$, 则当 $\rho \leq 1$ 时由上式得:

$$\begin{aligned} \int_{K(2\rho)} |\nabla u|^{2s+4} \zeta^2 dx &\leq C'''_s \rho^\alpha \\ & \cdot \int_{K(2\rho)} \left(|\nabla u|^{2s} \sum_{k,i} u_{x_k x_i}^2 \zeta^2 + |\nabla u|^{2s+2} |\nabla \zeta|^2 \right) dx, \end{aligned} \quad (2)$$

取 ρ 小使 $\rho < 1$ 及 $C'''_s C_s \rho^\alpha \leq \nu/2$ 成立, 结合 (1)、(2) 得到:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{s+1} \int_{K(2\rho)} |\nabla u|^{2s+2} \zeta^2 dx \Big|_0^t + \frac{\nu}{2} \int_0^t \int_{K(2\rho)} |\nabla u|^{2s} \sum_{k,i} u_{x_k x_i}^2 \zeta^2 dx dt \\ & \leq C_s \int_0^t \int_{K(2\rho)} |\nabla u|^{2s+2} |\nabla \zeta|^2 dx dt + C'_s, \\ & \quad (s \geq 0), \end{aligned} \quad (3)$$

取 $\zeta = \zeta(x, \rho + \rho/2^s, \rho + \rho/2^{s+1})$, 则当 $s = 0$ 时, (3) 式右端有界, 由 (2) 得到 $\int_0^t \int_{K(2\rho)} |\nabla u|^4 \zeta^2 dx dt$ 有界, 因而

$$\int_0^t \int_{K(3\rho/2)} |\nabla u|^4 dx dt \text{ 有界.}$$

当 $s = 1$ 时, (3) 式右端有界, 由 (2) 得 $\int_0^t \int_{K(3\rho/2)} |\nabla u|^6 \zeta^2 dx dt$ 有界, 因而

$$\int_0^t \int_{K(5\rho/4)} |\nabla u|^6 dx dt \text{ 有界.}$$

$\cdots$, $\int_0^t \int_{K(\rho + \rho/2^{s+1})} |\nabla u|^{2^{s+4}} dx dt$ 有界 ($0 \leq s \leq s_0$).

再代入 (1) 得

$$\int_{K(\rho)} |\nabla u|^{2^{s+2}} dx \leq C_0, \quad (\rho \leq \rho_0, 0 \leq s \leq s_0),$$

其中 ρ_0, C_0 仅依赖于 $s_0, M, \mu(M), \nu(M), u$ 的 Hölder 条件系数与 $\max_{x \in D} |\nabla \varphi(x)|$.

用上述估计为基础, 可于 $K(\rho/2) \times [0, t] \equiv Q(\rho/2)$ 中估计 $|\nabla u|$. 记 $w(x, t) = \zeta^2(x, \rho, \rho/2) |\nabla u|^2$. 考察积分

$$-\int_0^t dt \int_{A_{\lambda, \rho}(t)} \sum_k \mathcal{L} u \frac{d}{dx_k} [(w - \lambda) \zeta^2 u_{x_k}] dx = 0$$

其中 $A_{\lambda, \rho}(t) = \{(x, t) \in K(\rho) | w > \lambda\}$, 这里常数 $\lambda \geq 0$.

先设 $u_{tx_i}, D_x^2 u$ 连续, 分部积分, 再取极限, 当 $u \in C^{2,1}(\bar{Q})$ 时, 下面式子成立:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{A_{\lambda, \rho}(t)} (w - \lambda)^2 dx \Big|_{t=0}^{t=t} + \int_0^t dt \int_{A_{\lambda, \rho}(t)} \left\{ \sum \frac{da_i}{dx_k} \frac{d}{dx_i} \right. \\ & \quad \left. \cdot [(w - \lambda) \zeta^2 u_{x_k}] + a \sum \frac{d}{dx_k} [(w - \lambda) \zeta^2 u_{x_k}] \right\} dx = 0, \end{aligned}$$

上式中第二积分对 t 可微, 故第一积分也可微, 微分得到:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{A_{\lambda, \rho}(t)} (w - \lambda)^2 dx + \int_{A_{\lambda, \rho}(t)} \left\{ \sum \left[\left(\frac{\partial a_i}{\partial u_{x_j}} u_{x_k x_j} \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. + \frac{\partial a_i}{\partial u} u_{x_k} + \frac{\partial a_i}{\partial x_k} \right) (w_{x_i} \zeta^2 u_{x_k} + (w - \lambda) u_{x_k x_i} \zeta^2 \right. \right. \right. \end{aligned}$$