应用数学丛书

非线性二阶偏微分方程

董光昌

清华大学出版社

清 华 大 学

应 用 数 学 丛 书

第 5 卷

非线性二阶偏微分方程

董 光 昌

国家自然科学基金资助项目

清华大学出版社

内 容 简 介

本书是关于非线性二阶偏微分方程的专著．除第一章外，其它各章均取材于作者已发表或尚未发表的论文．

贯穿本书的是先验估计方法，重点研究椭圆型方程与抛物型方程，同时也涉及了一些双曲型方程．书中各章均有实际背景

本书可作为数学专业研究生教材，也可供有关研究人员、教师、高年级大学生参考．

非线性二阶偏微分方程

董光昌

责任编辑　潘真微

☆

清华大学出版社出版

北京　清华园

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

☆

开本：850×1168 1/32　印张：10　字数：258千字

1988年8月第1版　1988年8月第1次印刷

印数：0001-6000　定价：平 2.00 元 精 4.50 元

平 ISBN 7-302-00257-6/O·48(课)

精 ISBN 7-302-00256-8/O·47(课)

关于《应用数学丛书》

为了满足广大科技人员、高等院校教师、研究生进一步学习应用数学的需要，我们编辑出版本丛书. 丛书内容将包括应用数学的各个方面、有关的边缘科学以及应用数学的方法等. 限于我们的水平和经验，丛书中难免有不少错误和不足之处，诚恳希望广大读者批评指正.

清华大学《应用数学丛书》编辑委员会

1983.4

目　　录

引　言

非线性偏微分方程定解问题的求解，没有一般方法可循，但也有一些效力较大，适应面较为广泛的方法。下面所谈的就是其中一类方法。其步骤如下：

1. 选定一个适当的函数空间。

2. 定出一族函数映象。一般是用线性定解问题逼近这一非线性定解问题。建立起解与给定变元间的映象。

3. 证明此映象族有一不动点，得到非线性定解问题的至少一个解。

4. 解性质的研究。由第 3 步得到的解一般较粗糙，再进一步研究此解的光滑性等。

第 1 步多半是选用某种 Banach 空间，如 C^α 空间，Соболев 空间等，以及第 2 步对线性定解问题作研究，均可参阅 [49]。第 3 步不动点定理，常用的有压缩映象原理，Leray-Schauder 映象的拓扑度定理等。由于许多书都讲述这些不动点定理，我们就不讲了。第 2，3，4 步都用一定的估计（包括先验估计），因此下面我们主要讲估计方法。

非线性偏微分方程定解问题的其它解法，在此也稍提一下。

非线性偏微分方程定解问题作某种变形，化为另一类问题求解。其中很吸引人的是化为非线性变分问题求解[1]。它能解决较多的问题，但也受到相当的限制，即原非线性方程必须是某一变分问题的 Euler 方程，这使方程系数受到较大限制。

用半群方法解决非线性发展方程的某些定解问题，也能使较多问题得到解决[2],[3]。但也受到相当的限制，即方程连初、边值在

内要适合半群性质，区域也要适当规则等.

还有另一些解法.

由此本书下面所叙述的仅是一类解决非线性定解问题的方法，即所用工具主要是不动点与先验估计的方法.对拟线性方程是如此，对完全非线性方程，更拓广了一般极值原理到 Александров 型极值原理，使得做先验估计方面更为有力一些.

第一章　具散度结构头部的二阶拟线性抛物型方程的第一边值问题[4]

设Ω为R^n中的有界区域，$T>0$. 在$Q=\Omega\times(0,T]$中，考察具散度结构头部的方程

$$\mathscr{L}u\equiv u_t-\sum_i\frac{d}{dx_i}(a_i(x,t,u,u_{x_k}))$$
$$+a(x,t,u,u_{x_k})=0,\quad(1\leqslant k\leqslant n)$$

与初、边值条件

$$u|_{t=0}=\varphi(x),\quad(x\in\Omega),$$
$$u|_S=\phi|_S,$$

其中$S=\partial\Omega\times[0,T]$，$\varphi$，$\phi$分别是$\Omega$与$S$上给定的函数. 设$\Omega$满足条件(A):

$$\operatorname{mes}[K(\rho)\cap\Omega]\leqslant(1-\theta_0)\operatorname{mes}K(\rho),\quad 0<\theta_0<1,\ \rho<a_0,\tag{A}$$

其中$K(\rho)=\{|x-x_0|<\rho,\ x_0\in\partial\Omega\}$，$\theta_0$与$a_0$为常数. 对系数$a_i$、$a$的条件将按需要逐步给出. 要证明上述初、边值问题解为存在唯一.

§1　解的有界估计与 Hölder 条件估计

进行先验估计. 设$u\in C^{2,1}(\bar{Q})$，于Q内为第一边值问题的解，且设a，$\frac{\partial a_i}{\partial p_i}$，$\frac{\partial a_i}{\partial u}$，$\frac{\partial a_i}{\partial x_i}$当变量有界时为有界，则有

定理 1　设$a_i(1\leqslant i\leqslant n)$，$a$满足条件

$$\sum\frac{\partial a_i}{\partial p_j}\xi_i\xi_j|_{p=0}\geqslant 0,\quad p=(p_1,\cdots,p_n),$$

$$u\left[-\sum\frac{\partial a_i(x,t,u,0)}{\partial x_i}+a(x,t,u,0)\right]\geqslant -b_1u^2-b_2.$$

$\forall(x,t)\in\bar{Q}$, 其中常数 $b_1\geqslant 0$, $b_2\geqslant 0$, 则解的最大模可估计如下:

$$\max_{\bar{Q}}|u(x,t)|\leqslant\min_{b>b_1}e^{bT}\left[\max_{\partial^*Q}|u(x,t)|+\left(\frac{b_2}{b-b_1}\right)^{1/2}\right]\equiv M,$$

其中 $\partial^*Q=\Omega\times\{t=0\}\cup S$.

证 当 $u(x,t)\equiv 0$, 定理显然成立,故可设 $u(x,t)\not\equiv 0$. 作变换 $u=ve^{bt}$ (b 为常数),估计 $v^2(\not\equiv 0)$ 的最大值. 由于方程

$$u_t-\sum\frac{\partial a_i}{\partial p_i}u_{x_ix_i}-\sum\frac{\partial a_i}{\partial u}u_{x_i}-\sum\frac{\partial a_i}{\partial x_i}+a=0$$

化为

$$\frac{1}{2}(v^2)_t+bv^2-\frac{1}{2}\sum\frac{\partial a_i}{\partial p_i}(v^2)_{x_ix_j}+\sum\frac{\partial a_i}{\partial p_i}v_{x_i}v_{x_j}$$
$$-\frac{1}{2}\sum\frac{\partial a_i}{\partial u}(v^2)_{x_i}+\left(a-\sum\frac{\partial a_i}{\partial x_i}\right)ve^{-bt}=0,$$

当 $v^2(\not\equiv 0)$ 在 $\bar{Q}$ 中的最大点不在 ∂^*Q 上时, 于此点处, $v_{x_i}=0$ $(1\leqslant i\leqslant n)$, $(v^2)_t\geqslant 0$, $\sum\frac{\partial a_i}{\partial p_i}(v^2)_{x_ix_j}\leqslant 0$. 因此

$$bv^2\leqslant\left[\sum\frac{\partial a_i}{\partial x_i}-a\right]_{u_{x_1}=\cdots u_{x_n}=0}ve^{-bt}\leqslant\frac{v}{u}e^{-bt}(b_1u^2+b_2)$$
$$\leqslant b_1v^2+b_2,$$

故有

$$|v|\leqslant\left(\frac{b_2}{b-b_1}\right)^{1/2}.$$

与边界条件结合得

$$|v|\leqslant\max\left[|v|_{\partial^*Q},\left(\frac{b_2}{b-b_1}\right)^{1/2}\right]\leqslant\max_{\partial^*Q}|u|+\left(\frac{b_2}{b-b_1}\right)^{1/2},$$

$$\max_{\bar{Q}}|u(x,t)|\leqslant e^{bT}\max_{Q}|v|\leqslant e^{bT}\left[\max_{\partial^*Q}|u(x,t)|\right.$$
$$\left.+\left(\frac{b_2}{b-b_1}\right)^{1/2}\right],$$

再右边对 $b \geqslant b_1$ 取 min. 定理证毕.

作 Hölder 条件估计，需再假设存在正常数 μ_1, ν_1，使得当 $(x, t) \in \bar{Q}, |u| \leqslant M, p = (p_1, \cdots, p_n) \in R^n$ 时，下面两式成立:

$$\sum_i a_i(x, t, u, p_k)p_i \geqslant \nu_1|p|^2 + \mu_1,$$

$$\sum_i |a_i(x, t, u, p_k)|(1 + |p|) + |a(x, t, u, p_k)|$$
$$\leqslant \mu_1(1 + |p|^2).$$

$\mathscr{L}u = 0$ 乘 $\eta(x, t)$ 于 Ω 积分，当 t 固定时，要求 $\eta(x, t) \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$，得

$$\int_\Omega u_t(x, t)\eta(x, t)dx + \int_\Omega [\sum a_i(x, t, u, u_{x_k})\eta_{x_i}(x, t)$$
$$+ a(x, t, u, u_{x_k})\eta(x, t)]dx = 0,$$

取 $\eta(x, t) = [u(x, t) - k]^+\zeta^2(x)$，$k$ 为常数，$\zeta(x)$ 为于 $K(\rho) = \{x||x - x^0| < \rho\}$ $(x^0 \in \Omega)$ 内不为零的截断函数，为保证 $\eta \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$，取 $k \geqslant \max\limits_{x \in K(\rho)\cap S} u(x, t)$ 即可，记 $A_{k,\rho}(t) = \{x \in K(\rho) \cap \Omega | u(x, t) > k\}$. 由上式得:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_{A_{k,\rho}(t)} (u - k)^2\zeta^2dx + \nu_1\int_{A_{k,\rho}(t)} |\nabla u|^2\zeta^2dx$$
$$\leqslant \int_{A_{k,\rho}(t)} \left[\mu_1\zeta^2 + \left|\sum_i a_i(u - k)2\zeta\zeta_{x_i}\right|\right.$$
$$\left. + |a(u - k)\zeta^2|\right] dx \leqslant \int_{A_{k,\rho}(t)} \{\mu_1\zeta^2 + \mu_1(u - k)$$
$$\cdot [2\zeta|\nabla\zeta|(|\nabla u| + 1) + (|\nabla u|^2 + 1)\zeta^2]\}dx$$
$$\leqslant \mu_1\int_{A_{k,\rho}(t)} \left[\zeta^2 + \varepsilon(|\nabla u|^2 + 1)\zeta^2 + \frac{4}{\varepsilon}(u - k)^2|\nabla\zeta|^2\right.$$
$$\left. + (u - k)(|\nabla u|^2 + 1)\zeta^2\right] dx,$$

上式中正数 ε 可以任意取定. 我们取 k 使

$$\max_{K(\rho)\cap\Omega}[u(x, t) - k] \leqslant \frac{\nu_1}{4\mu_1} \equiv \delta,$$

取 $\varepsilon=\delta$，注意到截断函数 $\zeta\leqslant 1$，由上式得：

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{A_{k,\rho}(t)}(u-k)^2\zeta^2dx+\nu_1\int_{A_{k,\rho}(t)}|\nabla u|^2\zeta^2dx$$
$$\leqslant\gamma\left[\int_{A_{k,\rho}(t)}(u-k)^2|\nabla\zeta|^2dx+\operatorname{mes}A_{k,\rho}(t)\right],$$

其中

$$k\geqslant\max\{\sup_{x\in K(\rho)\cap\Omega}u(x,t)-\delta,\ \sup_{x\in K(\rho)\cap S}u(x,t)\},$$
$$\gamma=\gamma(\mu_1,\nu_1,M).$$

同法得

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{B_{k,\rho}(t)}(u-k)^2\zeta^2dx+\nu_1\int_{B_{k,\rho}(t)}|\nabla u|^2\zeta^2dx$$
$$\leqslant\gamma\left[\int_{B_{k,\rho}(t)}(u-k)^2|\nabla\zeta|^2dx+\operatorname{mes}B_{k,\rho}(t)\right],$$

其中

$$B_{k,\rho}(t)=\{x\in K(\rho)\cap\Omega\,|\,u(x,t)<k\},$$
$$k\leqslant\min\{\inf_{x\in K(\rho)\cap\Omega}u(x,t)+\delta,\ \inf_{x\in K(\rho)\cap S}u(x,t)\}$$

因此

$$u\in\mathscr{B}_2\left(Q,M,\nu_1,\gamma,\frac{\nu_1}{4\mu_1},0\right),$$

$\mathscr{B}_2$ 类函数的定义见 [49] 抛物型方程部分 §5. 由对 $\mathscr{B}_2$ 类函数性质的研究得到解的 Hölder 条件估计，即存在 $\alpha>0$ 使 $\|u\|_{\alpha,Q}$ 可由 M，ν_1，μ_1，θ_0，a_0 与 $\|u\|_{\beta,\partial^*Q}$ 估计. 因而

$$\|u\|_{\alpha,Q}=\sup_{(x,t)\in Q}|u(x,t)|$$
$$+\sup_{(x,t),(x',t')\in Q}\frac{|u(x,t)-u(x',t')|}{(|x-x'|^2+|t-t'|)^{\alpha/2}}$$

为有界.

如仅考虑内估计，则在 $Q'=\Omega'\times[\varepsilon,T](\bar{\Omega}'\subset\Omega)$ 中 $\|u\|_{\alpha,Q'}$ 可由 M，ν_1，μ_1 与 ε，$d(\Omega',\partial\Omega)$ 估计.

§2 $D_x u$ 的有界估计

再进行 $\nabla u = D_x u = (u_{x_1}, \cdots, u_{x_n})$ 的有界估计. 设当 $(x, t) \in \bar{Q}, |u| \leqslant M, p \in \boldsymbol{R}^n$ 时有

$$\nu(M)|\xi|^2 \leqslant \sum \frac{\partial a_i(x, t, u, p_k)}{\partial p_j} \xi_i \xi_j \leqslant \mu(M)|\xi|^2, \quad \forall \xi \in \boldsymbol{R}^n,$$

$$\sum_i |a_i(x, t, u, p_k)|(1 + |p|) + |a| + \sum_{i,j} \left|\frac{\partial a_i}{\partial p_j}\right|(1 + |p|^2)$$
$$+ \sum_i \left|\frac{\partial a_i}{\partial u}\right|(1 + |p|) + \sum_{i,k} \left|\frac{\partial a_i}{\partial x_k}\right| \leqslant \mu(M)(1 + |p|^2).$$

又假设 $u|_S = 0$. 这一假设基本上不限制一般性, 因为一般是 $u|_S = \phi$, 设 ϕ 可拓广到 $\bar{Q}$ 上使 $\phi(x, t) \in C^{2,1}(\bar{Q})$, 则用 $u(x,t) - \phi(x, t)$ 代替 u, 而考察这一新的 u 即可.

在上述假设下,先估计 $\|\nabla u\|_{L^2(Q)}$. 做法为考察

$$\int_\Omega \mathscr{L} u(e^{\lambda u} - 1)dx = 0,$$

λ 为待定常数. 分部积分得

$$\frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial t} \int_\Omega (e^{\lambda u} - \lambda u)dx + \int_\Omega [\sum a_i \lambda u_{x_i} e^{\lambda u}$$
$$+ a(e^{\lambda u} - 1)]dx = 0.$$

上式对 t 再积分,应用由 $\sum \frac{\partial a_i}{\partial p_j} \xi_i \xi_j \geqslant \nu \sum \xi_i^2$ 导出的式子

$$\sum a_i p_i = \sum \frac{\partial a_i(x, t, u, \tilde{p}_k)}{\partial p_j} p_i p_j + \sum a_i(x, t, u, 0)p_i$$
$$\geqslant \frac{\nu}{2}|p|^2 - C,$$

($\tilde{p}_k$ 在 0 与 p_k 之间)以及 $|a| \leqslant \mu(1 + |p|^2)$ 得:

$$\frac{\lambda\nu}{2}\int_0^t\int_\Omega |\nabla u|^2 e^{\lambda u} dx\,dt \leqslant C \int_0^t\int_\Omega e^{\lambda u}(\lambda + 1 + |\nabla u|^2)dx\,dt$$
$$+ \frac{1}{\lambda}\int_\Omega (\lambda u - e^{\lambda u})dx\Big|_0^t,$$

取 $\lambda = 4C/\nu$ 得:

$$\int_0^t\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\,dt \leqslant M_1, \quad \forall t\in[0,T].$$

再估计 $\int_\Omega |\nabla u|^{2s+2}dx$, $t\in[0,T]$, $0\leqslant s\leqslant 3n/2$ (为了下面的应用,估到 $s\leqslant 3n/2$ 已足够).

先作内估计. 设中心在 Ω 内的球 $K(2\rho)\subset\Omega$. 取截断函数 $\zeta(x)$ 使 $\zeta(x)=0$, 当 $x\notin K(2\rho)$. 考察

$$-\int_0^t dt\int_{K(2\rho)}\sum_{k=1}^n \mathscr{L}u\,\frac{d}{dx_k}(|\nabla u|^{2s}u_{x_k}\zeta^2)dx = 0, \quad (s\geqslant 0).$$

暂设 u_{tx_k} 与 D_x^3u 为连续,上式分部积分得:

$$\frac{1}{2s+2}\int_{K(2\rho)}|\nabla u|^{2s+2}\zeta^2dx\Big|_{t=0}^{t=t} + \int_0^t dt\int_{K(2\rho)}\sum\Big[\frac{da_i}{dx_k}$$

$$\cdot\frac{d}{dx_i}(|\nabla u|^{2s}u_{x_k}\zeta^2) - a\,\frac{d}{dx_k}(|\nabla u|^{2s}u_{x_k}\zeta^2)\Big]dx = 0,$$

由于上式最后结果仅出现 D^2u, 故逼近取极限后知对 $u\in C^{2,1}(\bar{Q})$ 为成立. 由于

$$\frac{da_i}{dx_k} = \sum\frac{\partial a_i}{\partial u_{x_j}}u_{x_jx_k} + \frac{\partial a_i}{\partial u}u_{x_k} + \frac{\partial a_i}{\partial x_k},$$

$$\frac{d}{dx_i}(|\nabla u|^{2s}u_{x_k}\zeta^2) = |\nabla u|^{2s}u_{x_kx_i}\zeta^2$$

$$+ 2s|\nabla u|^{2s-2}\sum u_{x_l}u_{x_lx_i}u_{x_k}\zeta^2 + |\nabla u|^{2s}u_{x_k}2\zeta\zeta_{x_i},$$

代入上式并应用 $2ab\leqslant \varepsilon a^2 + b^2/\varepsilon$ 得:

$$\frac{1}{2s+2}\int_{K(2\rho)}|\nabla u|^{2s+2}\zeta^2dx\Big|_0^t + \int_0^t\int_{K(2\rho)}\sum\Big(\frac{\partial a_i}{\partial u_{x_j}}|\nabla u|^{2s}$$

$$\cdot u_{x_kx_j}u_{x_kx_i}\zeta^2 + 2s\frac{\partial a_i}{\partial u_{x_j}}|\nabla u|^{2s-2}u_{x_k}u_{x_kx_j}u_{x_l}u_{x_lx_i}\zeta^2\Big)dx\,dt$$

$$\leqslant C_s\int_0^t\int_{K(2\rho)}\Big[\varepsilon|\nabla u|^{2s}\sum_{k,i}u_{x_kx_i}^2\zeta^2 + \frac{1}{\varepsilon}|\nabla u|^{2s}(|\nabla u|^4+1)\zeta^2$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}|\nabla u|^{2s}(|\nabla u|^2+1)|\nabla\zeta|^2\Big]dx\,dt, \quad 0<\varepsilon<1,$$

$C_s = C(\mu(M), \nu(M), s)$. 记 $\sum_k u_{x_k} u_{x_k x_i} = v_{x_i}$，其中 $v = |p|^2/2$. 取 ε 使 $C_s \varepsilon = \nu/2$，由上式得

$$\frac{1}{s+1} \int_{K(2\rho)} |\nabla u|^{2s+2} \zeta^2 dx \Big|_0^t + \nu \int_0^t \int_{K(2\rho)} \Big[|\nabla u|^{2s} \sum_{k,i} u_{x_k x_i}^2 \zeta^2$$

$$+ 4s |\nabla u|^{2s-2} \sum_i v_{x_i}^2 \zeta^2 \Big] dx\, dt \leqslant C_s \int_0^t \int_{K(2\rho)} [|\nabla u|^{2s+4} \zeta^2$$

$$+ |\nabla u|^{2s+2} |\nabla \zeta|^2] dx\, dt + C_s' \operatorname{mes} K(2\rho) \frac{1}{\rho^2}, \tag{1}$$

由于

$$\int_{K(2\rho)} |\nabla u|^{2s+4} \zeta^2 dx = \int_{K(2\rho)} |\nabla u|^{2s+2} \sum u_{x_i} [u(x, t)$$

$$- u(x^0, t)]_{x_i} \zeta^2 dx = \int_{K(2\rho)} [u(x, t) - u(x^0, t)]$$

$$\cdot [|\nabla u|^{2s+2} \Delta u \zeta^2 + |\nabla u|^{2s+2} \sum u_{x_i} 2\zeta\zeta_{x_i}$$

$$+ (2s+2) |\nabla u|^{2s} \sum u_{x_l} u_{x_l x_i} u_{x_i} \zeta^2] dx,$$

其中 x^0 为球 $K(2\rho)$ 的中心. 由于 $u(x, t)$ 满足 Hölder 条件，导出 $\dfrac{|u(x, t) - u(x^0, t)|}{|x - x^0|^\alpha}$ 为有界，故由上式得

$$\int_{K(2\rho)} |\nabla u|^{2s+4} \zeta^2 dx \leqslant C_s'' \rho^\alpha \int_{K(2\rho)} \Big(\varepsilon |\nabla u|^{2s+4} \zeta^2$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon} |\nabla u|^{2s} \sum_{k,i} u_{x_k x_i}^2 \zeta^2 + \frac{1}{\varepsilon} |\nabla u|^{2s+2} |\nabla \zeta|^2 \Big) dx,$$

取 ε 小使 $\varepsilon C_s'' = 1/2$，则当 $\rho \leqslant 1$ 时由上式得:

$$\int_{K(2\rho)} |\nabla u|^{2s+4} \zeta^2 dx \leqslant C_s''' \rho^\alpha$$

$$\cdot \int_{K(2\rho)} \Big(|\nabla u|^{2s} \sum_{k,i} u_{x_k x_i}^2 \zeta^2 + |\nabla u|^{2s+2} |\nabla \zeta|^2 \Big) dx, \tag{2}$$

取 ρ 小使 $\rho < 1$ 及 $C_s''' C_s \rho^\alpha \leqslant \nu/2$ 成立，结合 (1)、(2) 得到:

$$\frac{1}{s+1} \int_{K(2\rho)} |\nabla u|^{2s+2} \zeta^2 dx \Big|_0^t + \frac{\nu}{2} \int_0^t \int_{K(2\rho)} |\nabla u|^{2s} \sum_{k,i} u_{x_k x_i}^2 \zeta^2 dx\, dt$$

$$\leqslant C_s \int_0^t \int_{K(2\rho)} |\nabla u|^{2s+2} |\nabla \zeta|^2 dx\, dt + C_s',$$

$$(s \geqslant 0), \tag{3}$$

取 $\zeta=\zeta(x,\rho+\rho/2^s,\rho+\rho/2^{s+1})$，则当 $s=0$ 时，(3) 式右端有界，由 (2) 得到 $\int_0^t\int_{K(2\rho)}|\nabla u|^4\zeta^2dx\,dt$ 有界，因而

$$\int_0^t\int_{K(3\rho/2)}|\nabla u|^4dx\,dt \text{ 有界.}$$

当 $s=1$ 时，(3) 式右端有界，由 (2) 得 $\int_0^t\int_{K(3\rho/2)}|\nabla u|^6\zeta^2dx\,dt$ 有界，因而

$$\int_0^t\int_{K(5\rho/4)}|\nabla u|^6dx\,dt \text{ 有界.}$$

$\cdots$，$\int_0^t\int_{K(\rho+\rho/2^{s+1})}|\nabla u|^{2s+4}dx\,dt$ 有界 $(0\leqslant s\leqslant s_0)$.

再代入 (1) 得

$$\int_{K(\rho)}|\nabla u|^{2s+2}dx\leqslant C_0,\quad(\rho\leqslant\rho_0,\ 0\leqslant s\leqslant s_0),$$

其中 ρ_0, C_0 仅依赖于 s_0, M, $\mu(M)$, $\nu(M)$, u 的 Hölder 条件系数与 $\max\limits_{x\in\Omega}|\nabla\varphi(x)|$.

用上述估计为基础，可于 $K(\rho/2)\times[0,t]\equiv Q(\rho/2)$ 中估计 $|\nabla u|$. 记 $w(x,t)=\zeta^2(x,\rho,\rho/2)|\nabla u|^2$. 考察积分

$$-\int_0^t dt\int_{A_{\lambda,\rho}(t)}\sum_k\mathscr{L}u\frac{d}{dx_k}[(w-\lambda)\zeta^2u_{x_k}]dx=0$$

其中 $A_{\lambda,\rho}(t)=\{(x,t)\in K(\rho)\,|\,w>\lambda\}$，这里常数 $\lambda\geqslant 0$.

先设 u_{tx_i}, D_x^2u 连续，分部积分，再取极限，当 $u\in C^{2,1}(\bar{Q})$ 时，下面式子成立：

$$\frac{1}{2}\int_{A_{\lambda,\rho}(t)}(w-\lambda)^2dx\Big|_{t=0}^{t=t}+\int_0^t dt\int_{A_{\lambda,\rho}(t)}\Big\{\sum\frac{da_i}{dx_k}\frac{d}{dx_i}\cdot[(w-\lambda)\zeta^2u_{x_k}]+a\sum\frac{d}{dx_k}[(w-\lambda)\zeta^2u_{x_k}]\Big\}dx=0,$$

上式中第二积分对 t 可微，故第一积分也可微，微分得到：

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_{A_{\lambda,\rho}(t)}(w-\lambda)^2dx+\int_{A_{\lambda,\rho}(t)}\Big\{\sum\Big[\Big(\frac{\partial a_i}{\partial u_{x_j}}u_{x_kx_j}+\frac{\partial a_i}{\partial u}u_{x_k}+\frac{\partial a_i}{\partial x_k}\Big)(w_{x_i}\zeta^2u_{x_k}+(w-\lambda)u_{x_kx_i}\zeta^2$$