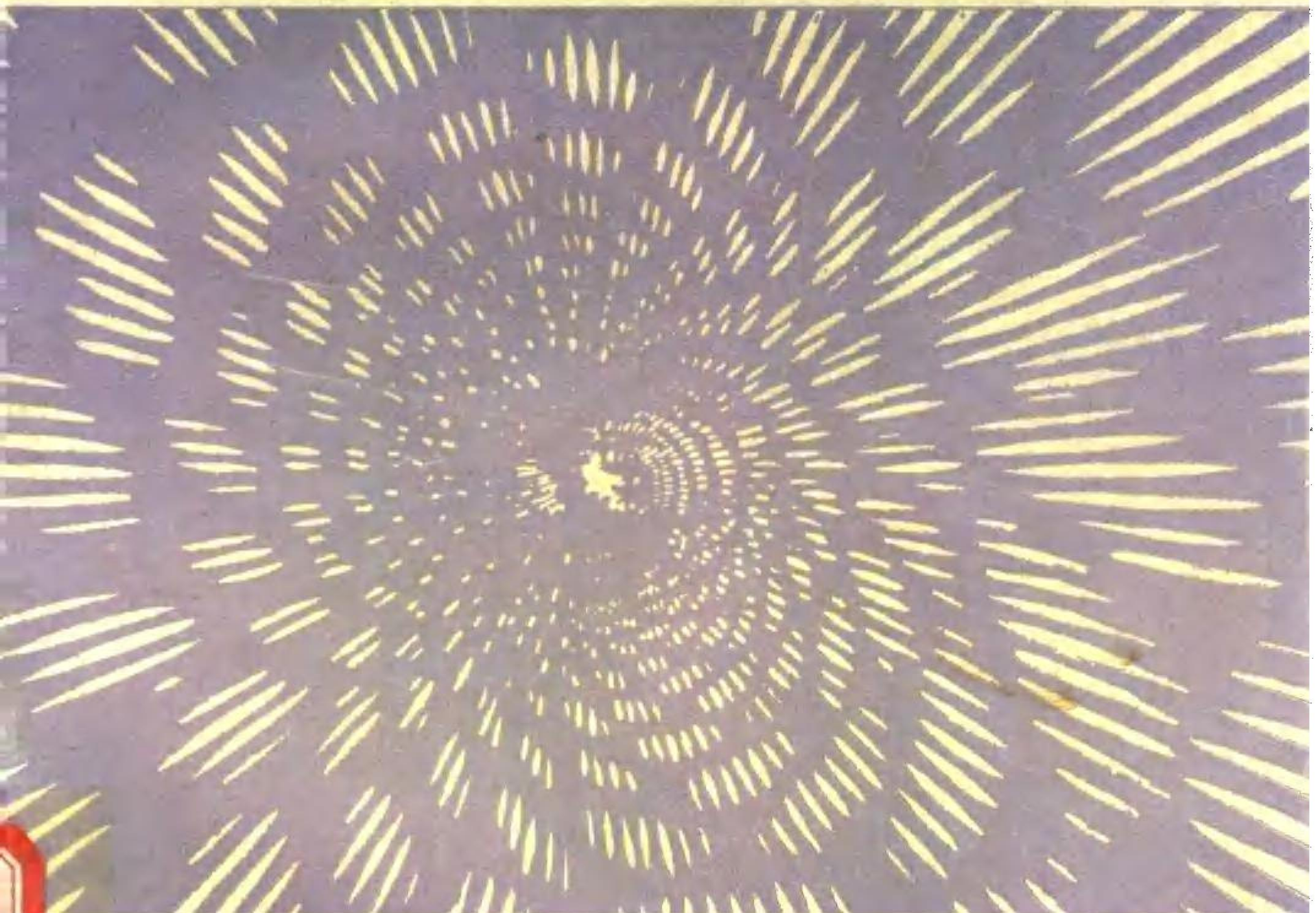
简明电磁场

葛 真 王如筠 唐模弟 编



重庆大学出版社

简明电磁场

葛真　王如筠　唐模弟　编

重 庆 大 学 出 版 社

简明电磁场
葛真　王如筠　唐模弟　编
责任编辑　唐利
*
重庆大学出版社出版发行
新　华　书　店　经　销
重庆建筑大学印刷厂印刷
*
开本 787×1092　1/16　印张:14　字数:341　千
1995 年 6 月第 1 版　　1995 年 6 月第 1 次印刷
印数:1—3500
ISBN 7-5624-0984-6/O·108　定价:11.00 元
(川)新登字 020 号

序

近年来，工科电类专业大学本科生应具备的知识结构，越来越必须包括电磁场理论。作为电机工程、电力工程、无线电工程、电子工程等等共同基础的古老的电磁场理论，成为一些交叉领域学科的生长点和新兴边缘学科发展的基础。

本门课程的主要任务是，在大学物理电磁学的基础上，进一步说明电磁场的基本规律，培养学生用场的观点对电气工程中的电磁现象进行定性分析与判断的初步能力，以及了解定量分析的基本途径；并且，通过电磁场的逻辑推理，培养学生严谨的科学态度和思维方法。学好这门课，将增强学生的适应能力和创造能力，不仅为进一步学习、研究、开发打下基础，而且有助于学生基本素质的提高。

随着社会主义市场经济的建立和改革开放的深化，高等教育及其每门课程都要进行改革。我们在遵循国家教委《电磁场课程教学基本要求》的同时，积极探索在适应新形势下教材建设的新路子，尝试在课程体系的内容上进行初步的改革。

高等工科院校中，“普通物理”、“高等数学”、“工程数学”等课程的教学，在广度和深度上都有所加强，为讲授本门课采用新的教材体系莫定了基础。在第一章，首先回顾电磁场的基本物理量和基本电磁实验定律，予以概括提高，引出电磁场的普遍规律——麦克斯韦方程。希望以最短的篇幅使读者及早掌握统观全局的理论武器。再分别讨论静电场、恒定电流的电场、恒定电流的磁场、时变电磁场，然后讨论电磁波和均匀传输线。从我们60年代以来的教学实践看，这样做一方面可以减少与《普通物理·电磁学》的某些重复，节省学时，学生也能够接受；另一方面有益于学生形成电磁的整体观念，建立在一般规律指导下分析讨论具体问题的思路。

为了适应当前各专业的适应面必将拓宽、技术基础课必将加强的新形势，亟需探索编写少学时类型的电磁场基本原理的简明教材，并且力图在理论联系实际上有所前进。本书新增了静电应用技术、静电危害防止、磁传感器等方面内容、是为建设新的教材的尝试和创新。

在学习本课程时，要把物理概念和数学工具结合起来。本书附录收入复习或补充的有关数学内容，并为由散度、旋度开始讲授静电场和稳恒场提供数学知识。

本书是在原来葛真编写的《简明电磁场》讲义的基础之上由王如筠撰写第一至第四章及附录，唐模弟撰定第五章至第七章。葛真统编全书。

限于编著者的水平有限，书中欠妥和错误之处，请读者不吝指正。

编者

1994年10月

目　录

第一章　电磁场的基本规律

本章在普通物理学中电磁理论的基础之上，首先回顾电磁场中的基本物理量，及极化、磁化等物理现象，然后对电磁场的基本定律进行复习、概括和推广，由此得出麦克斯韦方程组，并导出电磁场的边界条件和电磁能量关系等，进而在后续各章中分别对不同情况下的电磁场和电磁波进行论述。其中以静电场为突破口，抓住由静到动的规律，举一反三。以位函数贯穿整个电磁场理论。

§1-1　电磁场的基本物理量

要定性和定量地研究电磁场，必须选定基本物理量来描述它的主要特征。本书选用 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{H}$ 作为电磁场的基本物理量，其中最基本的是 E 和 B。

电路理论中遇到的基本物理量，如电压 u，电流 i 等均为代数量、总和量，它们具有积分的性质，只可能为时间的函数，不可能为空间的函数（分布参数电路除外）。i 代表单位时间通过导体某一截面的电荷总量；u 代表电场力将单位正电荷由一点移到另一点时，电场力所作的功。而电磁场中遇到的物理量则均为矢量，它们既有大小又有方向，既可能是时间的函数又可能是空间的函数，是代表某一点的情况，具有微分的性质。

电磁场的基本特征是以力施加在电荷上。一个以速度 v 运动的电荷 q，在电磁场中受到一个与其速度无关的力的作用，又受到一个与其速度成正比，而与之垂直的力的作用，即

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \tag{1-1}$$

式中 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 就是用来确定电磁场强度的一对基本物理量。我们可以通过力、电荷和速度这些可观测的物理量来定义矢量电场和矢量磁场。

1. 电场强度矢量 $\boldsymbol{E}(x,y,z,t)$

电场可以看成是电荷周围存在的一种特殊物质，可通过电荷在电场中受力；电场中移动电荷自某点到另一点时电场力作功等现象说明它的存在。若在时间 t 把一很小的测试电荷 q 静止地（$v=0$）放在已有的电磁场中的某一点上，测量出这个电荷所受的力，就得到此时该点的电场强度矢量 $\boldsymbol{E}(x,y,z,t)$，简称电场强度 E，即

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{F}}{q} \tag{1-2}$$

它是位置和时间的函数，方向即为该点电荷 受力的方向，在国际单位制中的单位为 V/m 亦可用 N/C。

2. 电感应强度矢量 $\boldsymbol{D}=(x,y,z,t)$

电场既可在真空中存在，也可在媒质中存在。如果媒质为电介质，且存在有电场，则电介质中的分子将被极化，为此引入表征极化程度的物理量 P，称电极化强度矢量，在线性、各向同性的介质中，它正比于电场强度 E，即

$$\boldsymbol{P} = \chi_e \varepsilon_0 \boldsymbol{E} \tag{1-3}$$

式中 χ_e 为电极化率，是一个没有单位的纯数，与介质的性质有关。$\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ F/m，或

$C/N \cdot m^2$，叫真空中的介电常数（亦叫真空中的电容率）。P 的单位为 C/m^2。

定义 1
$$D = \varepsilon_0 E + P \tag{1-4}$$
或
$$D = \varepsilon_0(1 + \chi_e)E = \varepsilon_0\varepsilon_r E = \varepsilon E \tag{1-5}$$
D 即电介质中某点的电感应强度矢量或电位移矢量，单位亦为 C/m^2，方向即为该点 E 的方向。式中 $\varepsilon_r = \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = 1 + \chi_e$ 为某一介质的相对介电常数，$\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$ 为某一介质的介电常数。在各向异性电介质中，各点的 ε 不为常数，而表示为张量，E、D 不同向，这里不予讨论。需要注意的是式(1-4)为 E、D、P 三者之间的一般关系。不论介质是线性还是非线性，各向同性还是各向异性，E、D、P 之间都存在此关系。而式(1-5)则只适用于线性、各向同性介质。线性介质指介电常数大小与电场强度无关的介质。各向同性介质是指各方向的物理性能均相同的介质。均匀介质是指在某一范围内，介电常数处处一样的介质。

物理学中讨论库仑定律时，曾设想场源电荷 q 的电力作用是依靠它不断射出的电通量。电通量是紧密联系在电荷之上的，由电荷向外发射的线所组成，四面八方，由近及远，终止于负电荷或消失于无穷。电荷移动时通量也随着移动。采用国际单位制，二者的关系为
$$\psi_0 = q \tag{1-6}$$
电通量 ψ_0 发自正电荷终止于负电荷。为此我们有

定义 2　场中某点的电感应强度矢量即为该点垂直穿过单位面积的电通量数。即
$$D = \frac{d\psi_0}{dS} \tag{1-7}$$
穿过空间曲成 S 的总通量为
$$\psi_0 = \int_s D \cdot dS \tag{1-8}$$
故 D 也叫电通密度矢量。但需注意 D 是考虑介质极化，为计算方便而引出的派生物理量，E 是最基本的物理量。

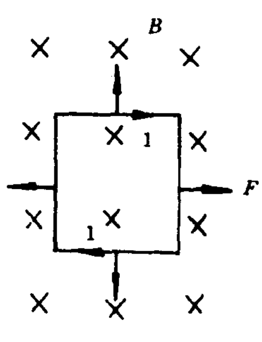


图 1-1

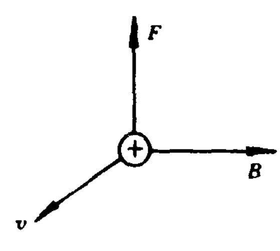


图 1-2

3. 磁感应强度矢量 $B(x,y,z,t)$

磁场可以看成是电流周围存在的一种特殊物质。它可以通过指南针在磁场中受有力的作用；运动电荷在磁场中受有洛仑兹力；载流线圈在磁场中受有安培力；线圈匝联的磁场变化，在线圈中有感应电势产生等许多实验证明其存在。为此，我们用两种方法定义它：

定义 3　在时间 t，磁场中某点单位正电荷以单位速度向与磁场相垂直的方向运动时所受的力，即为该点的磁感应强度 B，即

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \tag{1-9}$$

其中 $\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{F}$ 三者相互垂直，符合右螺旋关系，如图 1-1 所示，$\boldsymbol{B}$ 的单位为 T($1\text{T}=1\text{Wb/m}^2$)，$\boldsymbol{F}$ 及 $\boldsymbol{v}$ 的单位分别为 N 和 m/s。

定义 4 在时间 t，垂直磁场方向上某点单位电流所受的力。即

$$\boldsymbol{F} = \int_l I\mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B} \tag{1-10}$$

$I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{F}$ 三者相互垂直，符合右螺旋关系，如图 1-2。为形象描绘磁场引出磁力线的概念，某处磁力线的疏、密表示该处磁场的弱、强。但由于磁场力与带电粒子的运动方向垂直，它只能改变运动的方向，使带电粒子发生偏转，故磁力线实质为磁通线或 $\boldsymbol{B}$ 矢量线，$\boldsymbol{B}$ 线上各点的切线方向即表该点 $\boldsymbol{B}$ 的方向。因而磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 还可认为是某点垂直穿过单位面积上的磁通量，单位为 Wb/m^2，故又叫磁通密度矢量。它与 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{D}$ 一样，可以既是空间又是时间的函数。

4. 磁场强度矢量 $\boldsymbol{H}(x,y,z,t)$

磁场可在真空中存在，也可在媒质中存在。若磁场存在于媒质中，则媒质(磁介质)将被磁化，为描述被磁化的程度，引入磁化强度矢量 $\boldsymbol{M}$。在线性、各向同性的媒质中，由实验可以证明各点的 $\boldsymbol{M}$ 与磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 成正比，即

$$\boldsymbol{M} = \chi_m \boldsymbol{H} \tag{1-11}$$

式中的 χ_m 为媒质的磁化率，是一个无单位的纯数，顺磁性物质为正值，反磁性物质为负值。定义

$$\boldsymbol{H} = \frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} - \boldsymbol{M} \tag{1-12}$$

式中 $\boldsymbol{M}$、$\boldsymbol{H}$ 的单位均为 A/m，$\mu_0=4\pi\times10^{-7}$H/m(或 T · m/A)为真空中的磁导率(或导磁系数)。将式(1-11)代入(1-12)可得

$$\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{H} + \mu_0\boldsymbol{M} = \mu_0(1+\chi_M)\boldsymbol{H} = \mu_0\mu_r\boldsymbol{H} = \mu\boldsymbol{H} \tag{1-13}$$

式中 μ 为某一媒质的磁导率，$\mu_r=\dfrac{\mu}{\mu_0}=1+\chi_m$ 为某一媒质的相对磁导率。式(1-13)亦仅适用于线性各向同性媒质中，此时 $\boldsymbol{H}$、$\boldsymbol{B}$ 同方向。由上分析可知，$\boldsymbol{B}$ 为最基本的量，$\boldsymbol{H}$ 是为计算方便，考虑磁化而导出的计算量、派生量。

§1-2 电极化和磁化

上节物理量中已定义了磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 和电感应强度 $\boldsymbol{D}$，它们分别是考虑磁化和极化现象而引入的物理量。电极化与磁化现象的物理本质又是什么呢？下面我们作一简单复习。

1. 电介质的极化

物理学中已知，当电场中引入导体时，导体内的自由电荷受到电场力的作用而移动，在最终稳定状态时，导体表面便具有感应电荷，其分布状况是使导体内所有各处的感生电荷的电场抵消原来的电场，致使导体内部的净电场为零，导体表面为等位面，整个导体为一等位体，且电荷分布于导体表面上。

电介质的特点是它所有的电子被很强的力束缚在原子结构上，当电场中引入电介质时，在电场的作用下，正负电荷只能朝相反的方向发生微小的位移而形成电偶极子，对外呈现带电现

象，电介质表面出现不能自由运动的束缚电荷，这就是电介质的极化现象。无极分子发生位移极化、有极分子发生取向极化，他们共同的作用是削弱外电场。

在极化介质中，每个分子象一个具有偶极矩 $\boldsymbol{p}_k$ 的偶极子，整个介质可以看成是有秩序排列在真空中的偶极子的集合。为定量描述介质极化程度，引入某点单位体积中的偶极矩矢量和即极化强度矢量 $\boldsymbol{P}$

$$\boldsymbol{P}=\lim_{\triangle V\to 0}\frac{\sum \boldsymbol{p}_k}{\triangle V}=N\boldsymbol{p} \tag{1-14}$$

式中 $\boldsymbol{p}_k$ 表第 k 个分子的电偶极矩，$\sum \boldsymbol{p}_k$ 表 $\triangle V$ 体积中各分子的电偶矩矢量和，N 表单位体积中的分子数，$\boldsymbol{p}$ 表 $\triangle V$ 内的平均电偶极矩。前面已说明 $\boldsymbol{p}$ 和外电场 $\boldsymbol{E}$ 及介质的性质有关，即 $\boldsymbol{P}=\chi_e\varepsilon_0\boldsymbol{E}$。

介质对电场的影响，可归结为束缚电荷的作用。考虑到束缚电荷的作用，高斯定理可写成下式

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}S=\frac{q+q'}{\varepsilon_0} \tag{1-15}$$

式中 q' 即为 S 面内总的束缚电荷。其大小当然与极化强度 $\boldsymbol{P}$ 有关。q' 与 $\boldsymbol{P}$ 关系可通过图 1-3 来说明。设介质内部有一个面积元 $\mathrm{d}S$，在电场 $\boldsymbol{E}$ 的作用下，分子内部电荷发生了平均位移 $\boldsymbol{l}$，假设各负电荷 $-q$ 固定，各正电荷 q 顺电场方向移动穿出面积元，移动距离就是 $\boldsymbol{l}$，那么，穿过 $\mathrm{d}S$ 的电荷 $\mathrm{d}q$ 正好是图中假想的平行六面体内正电荷总数，即

$$\mathrm{d}q=Nq\boldsymbol{l}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{1-16}$$

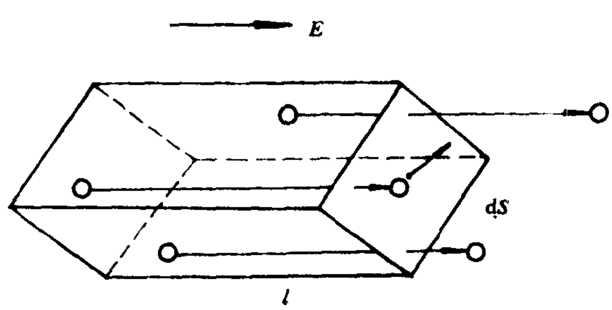


图 1-3

式中 N 为单位体积中的分子数，所以

$$\mathrm{d}q=\boldsymbol{P}\cdot\mathrm{d}S \tag{1-17}$$

而留在六面体内的净电荷必为负的，即

$$\mathrm{d}q'=-\boldsymbol{P}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{1-18}$$

对整个介质言

$$q'=-\oint_S \boldsymbol{P}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{1-19}$$

它表明了束缚电荷 q' 与极化强度 $\boldsymbol{P}$ 的关系；同时也表示了 $\boldsymbol{P}$ 的另一定义：在极化过程中，垂直于电场方向上，单位面积通过的束缚电荷量。也即是束缚电荷的面密度。将式(1-19)代入式(1-15)，并整理

$$q=\varepsilon_0\oint_S \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}+\oint_S \boldsymbol{P}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\oint_S(\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\oint_S \boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{1-20}$$

式中

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon_0(1+\chi_e)\boldsymbol{E}=\varepsilon_0\varepsilon_r\boldsymbol{E}=\varepsilon\boldsymbol{E} \tag{1-21}$$

由以上的分析可以看出：电介质中的电容率比真空大，今后在计算介质中自由电荷的电场时，由于无限大均匀介质中的电场为无限大真空中相应电场的$\frac{1}{\varepsilon_r}$，所以在一定条件下，可只计算自由电荷的电场，而束缚电荷的作用，用电介质的电容率 $\varepsilon>\varepsilon_0$ 来等效代替，由此得出结论：极化的效应可用束缚电荷来等效代替；束缚电荷的效应又可用电介质的电容率 $\varepsilon>\varepsilon_0$ 来等效代替。

在通常情况下，大多数电介质均为线性、各向同性介质。其中多数性能良好的绝缘体，如云母、玻璃、陶瓷、纸、清漆等电极化率在 1～10 范围内；空气或大多数气体的电极化率近乎为几千分之几；有些物质如纯水、酒精、丙酮等电极化率较大可达几十。岩盐、石英等结晶体，在不同方向极化时，电极化率不同，P、E 的方向也不同，称各向异性介质；酒石酸钾钠、钛酸钡等结晶体，电极化率很高可达几千，P 与 E 呈非线性关系，且在交变极化情况下，$P=f(E)$关系曲线和磁滞回线形状相似，叫电滞回线。

2. 磁介质的磁化

电介质在电场中由于极化影响到电场，可用介电常数或电容率 ε 来描述。同样磁介质在磁场中也会影响到磁场，我们可用磁导率 μ 来描述。

磁介质中由于荷电质点运动而形成的电流叫分子电流，分子电流产生的磁场叫分子磁场。分子电流可以是电子在一定轨道上绕行而形成，可以是电子公转轴的进动而形成，也可以是电子自转而形成。从宏观效果看，它们都可视为等效的分子电流 i 沿一个小回路运动。设小回路围成的平面面积为 S，则分子磁矩

$$m = i\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{1-22}$$

顺磁性物质在无外磁场时，磁介质内由于分子热运动分子磁矩取向是杂乱无章的，对外不显磁性，当引入外磁场后，这类物质的分子磁矩受到一力矩，使其沿外磁场方向取向，但热运动却阻碍分子磁矩的规则取向，净结果是在外磁场方向上叠加一个平均分子磁矩，它类似于有极分子在静电场中的极化，如铝、钡、钙、钨、镁、铂、氧等。抗磁性物质在无外磁场时原子或分子本身的等效磁矩为零，对外不呈磁性。引入外磁场后，由于绕原子核旋转的电子受到电磁力的作用，其旋转角速度发生变化，因而原子中微观电流改变，产生与外磁场方向相反的感应磁偶极矩，如铋、铜、锌、银、金、汞、锑、石墨和氩、氮等惰性气体，以及多数有机物等。铁磁物质中有许多天然的由数以百万计且磁矩方向相同的原子所组成的磁畴，在无外磁场时，各磁畴排列混乱，磁场相互抵消，对外不呈磁性。引入外磁场时，各个磁畴力图按外磁场方向排列，从而对外呈磁性。如铁、钴、镍及其合金，以及锰和铬的某些合金等结晶状态的物质。总起来说，无论是固有磁矩沿外磁场取向所产生的附加磁场现象，还是出现与外磁场反向的感应磁矩所产生的附加磁场现象，我们都称之为磁化现象。为描述磁化程度引入磁化强度矢量，即

$$\boldsymbol{M} = \lim_{\triangle V\to 0}\frac{\sum \boldsymbol{m}_k}{\triangle V} = N\boldsymbol{m} \tag{1-23}$$

式中$\triangle V$ 为磁介质中某处的体积元，$\sum \boldsymbol{m}_k$ 为$\triangle V$ 中各分子磁矩的矢量和，N 为单位体积中的分子数，$\boldsymbol{m}$ 为$\triangle V$ 内的平均磁矩。实验证明，对顺磁性和抗磁性物质言，磁化强度与磁场强度成正比，且物质不同，磁化强度也不同（铁磁性物质磁化机理复杂，这里不作讨论）。与电介质相同，磁介质磁化后，磁化物质可以看成是按一定方向排列的许多磁偶极子在真空的集合。

正如电介质极化后在电介质表面出现束缚电荷一样，磁介质磁化后，在磁介质某一横截面

内，由于分子电流绕向相同，磁介质内相邻两分子电流方向相反，其效应互相抵消，而在磁介质表面上出现一层未被抵消的磁效应，这就是表面电流的等效磁效应，是分子电流规则排列的宏观效果。这种因磁化而出现的宏观电流叫磁化电流，由于它不伴随着带电粒子的宏观位移，所以也叫束缚电流，用 i_m 表示。因而物质对磁场的影响可归结为束缚电流的作用，考虑束缚电流的作用，我们有

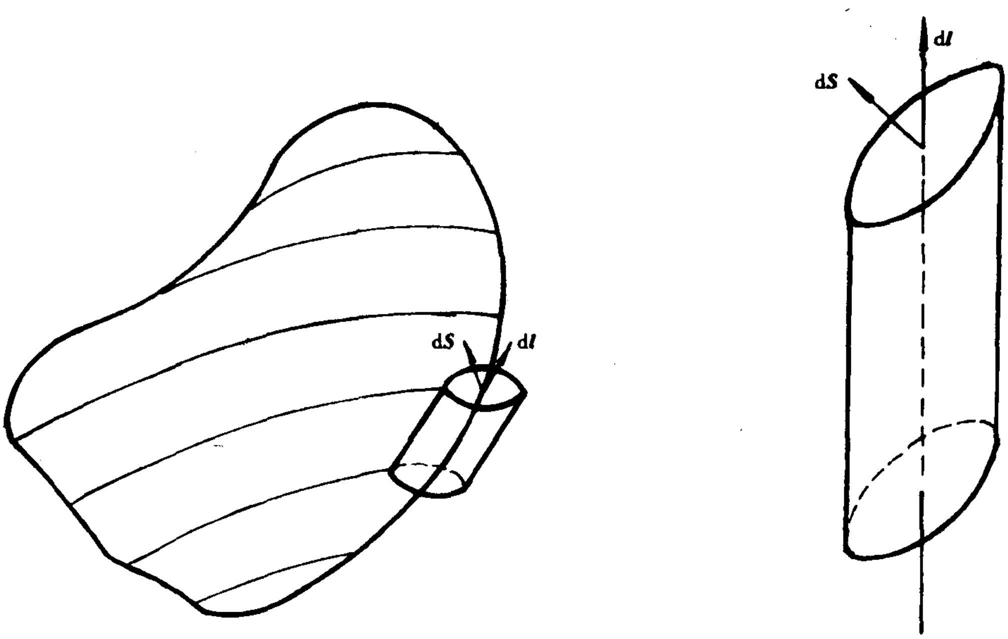


图 1-4

$$\oint_l \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mu_0(i + i_m) \tag{1-24}$$

式中 i_m 为穿过 l 回路的总束缚电流。它的大小当然与磁化强度 $\boldsymbol{M}$ 有关，下面我们分析 i_m 与 $\boldsymbol{M}$ 的关系。

见图 1-4，我们在磁介质中任一闭合回路 $\boldsymbol{l}$ 上取一小微段长为 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$，截面为 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 的斜圆柱体，它套住的磁化电流为

$$\mathrm{d}i_m = N(\mathrm{d}\boldsymbol{S} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l})i = N\boldsymbol{m} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \boldsymbol{M} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{1-25}$$

式中 m 为单位体积中磁偶极子的平均磁矩。整个 L 回路套住的总磁化电流为

$$i_m = \oint_l \boldsymbol{M} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{1-26}$$

由上式我们还可得到 M 的另一定义：磁场中某点磁化强度 M，等于包围该点的单位长度轴线上的磁化电流。将式(1-26)代入式(1-24)并经整理得：

$$\oint_l \left(\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} - \boldsymbol{M}\right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = i \tag{1-27}$$

令 $\boldsymbol{H} = \left(\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} - \boldsymbol{M}\right)$，且由前述 $\boldsymbol{M} = \chi_m \boldsymbol{H}$ 可知

$$B = \mu_0 \boldsymbol{H} + \mu_0 \boldsymbol{M} = \mu_0(1 + \chi_m)\boldsymbol{H} = \mu_0 \mu_r \boldsymbol{H} = \mu \boldsymbol{H} \tag{1-28}$$

式(1-27)可写成

$$\oint_l \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = i \tag{1-29}$$

其右端不出现磁化电流，使问题大为简化。线积分的右边也叫磁动势。

由上分析可见，电介质中的电场比真空中有所削弱，削弱的效应用一个比真空电容率 ε_0 大的介质电容率 ε 来反应；与电场相似，磁介质中的磁场比真空中增多的效应可用一个与真空导磁率 μ_0 不同的 μ 来反映，顺磁性物质 $\mu>\mu_0$，反磁性物质 $\mu<\mu_0$。但在工程上认为顺磁性物质、反磁性物质的 μ 均接近于 μ_0，只有铁磁性物质 $\mu\gg\mu_0$。

§1-3 电荷密度、电流密度与全电流

1. 电荷密度

在学习宏观或大尺度的电磁理论时，我们要用到连续电荷和连续电流分布的概念。为此我们定义：电磁场中某点 M 的电荷体密度即为 M 点单位体积中的电荷总数。

$$\rho = \lim_{\Delta v\to 0}\frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}V} \tag{1-30}$$

ΔV 为包围 M 点的微小体积。（理论上点是没有体积的，$\Delta V\to 0$，它不可能容纳一个实际上具有有限尺寸的电子。但从实际观点看，这里指电子体积与宏观体积相比可以完全忽略不计，但从电子的微观或原子尺度上看仍足够大）。仿此定义电荷面密度与电荷线密度为

$$\rho_s = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta q}{\Delta S} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}S} \tag{1-31}$$

$$\rho_l = \lim_{\Delta l\to 0}\frac{\Delta q}{\Delta l} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}l} \tag{1-32}$$

电荷体密度，面密度，线密度的单位分别为库仑/米^2(C/m^3)、库仑/米^3(C/m^2)、库仑/米(C/m)。

2. 电流密度

我们知道电流强度简称电流。其定义为

$$i = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \tag{1-33}$$

式中 Δq 为 Δt 时间内流过给定截面的总电荷。在电路理论中，总认为电流是沿一根导线流的，不考虑电流流通路径的横截面，这种电流在低频情况下，用电流强度也就足以说明其特性了。如果在横截面 S 不可忽略的导体中，不同的面积元 ΔS，单位时间内通过的电荷及流动方向均可能不同，这种电流称为体电流。为描述这种电流在空间任一点的分布情况需引入电流密度矢量这一概念。

$$\boldsymbol{J} = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta I}{\Delta S} = \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}S} \tag{1-34}$$

故电流密度数值上即为在垂直于电荷运动方向的平面里每单位面积上所通过的电流：方向为该点正电荷运动的方向。如果所取的面积元的法线方向 n° 与电流方向不垂直而成 θ 角，则通过该面积元的电流是

$$\mathrm{d}I = \boldsymbol{J}\cdot\mathrm{d}S = J\mathrm{d}S\cos\theta$$

通过导体中任一截面 S 的电流与电流密度间的关系为

$$I = \int_s \boldsymbol{J}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_s \boldsymbol{J}\cdot n^\circ\mathrm{d}S \tag{1-35}$$

如图 1-5 所示。

有的电流在一很薄很薄的导体上流动，我们将它称为面电流，如图 1-6 所示。此时与电流流动方向垂直的横截面 S 近似为零，面积元 ΔS 变成了线元 Δl，为描述面电流在横截面上的分布，定义面电流密度大小为

$$J_l = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta l} = \frac{dI}{dl} \tag{1-36}$$

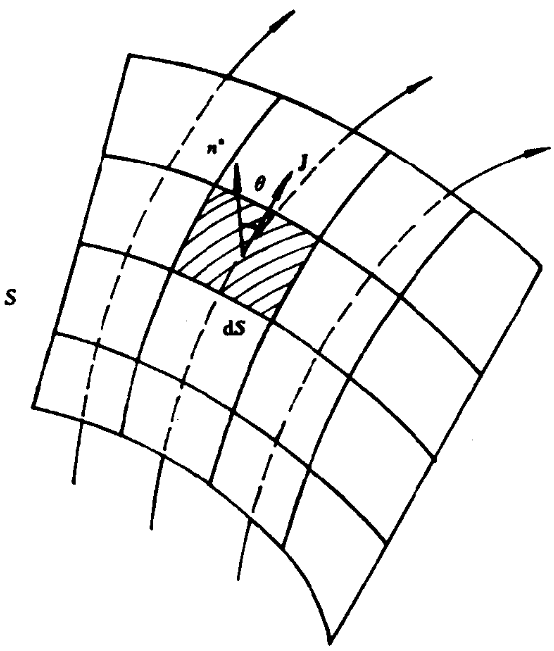


图 1-5

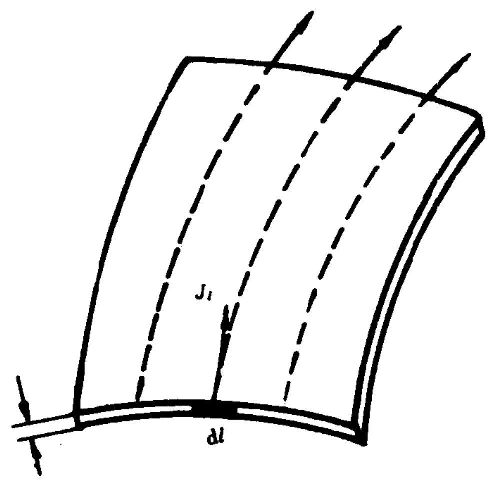


图 1-6

方向仍是正电荷运动的方向，其实质即为垂直电流线的单位长度上的电流。正是为区别二者，故前者称体电流，后者称面电流。这里还可认为 $dI = Jh dl$ 其中 $\lim_{h \to 0} Jh = J_l$。

3. 全电流

电磁场理论中所说的全电流，通常指传导电流、运流电流和位移电流三种的总和。现分别叙述如下：

(1) 传导电流 i_c

它是指导电媒质中自由电子在电场力的作用下作宏观定向运动而形成的电流，常存在于金属导体或电解液中，实验证明，在同一材料中，外电场越强传导电流越大。即

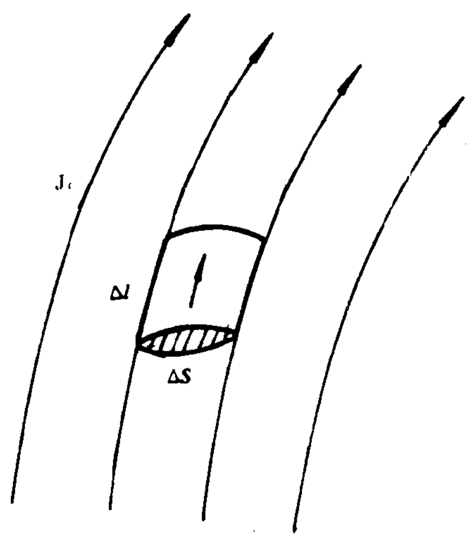


图 1-7

$$J_c = \gamma E \tag{1-37}$$

式中 γ 为导体的电导率，与媒质的性质有关。单位为 S/m。式(1-37)又叫欧姆定律的微分形式，

可由欧姆定律导得。见图 1-7。设在电导率为 γ 的导体内，沿电流线取一极微小的直圆柱体，长为 Δl，横截面为 ΔS，则圆柱体两端的电阻

$$R = \frac{\Delta l}{\gamma \Delta S} \tag{1-38}$$

通过 ΔS 的电流 $\Delta I = J\Delta S$，圆柱体两端的电压 $\Delta U = E\Delta l$，由欧姆定律得

$$\Delta I = \frac{\Delta U}{R} = E\Delta l \,/\, \frac{\Delta l}{\gamma \Delta S} = E\gamma \Delta S$$

$$J \frac{\Delta I}{\Delta S} = \gamma E$$

写成矢量形式

$$J_c = \gamma E \tag{1-39}$$

(2)运流电流 i_v

它是指由电子或离子在真空或稀薄气体中的机械运动所形成的电流，与速度间满足

$$J_v = \rho v \tag{1-40}$$

设有密度为 ρ 的电荷在与微分面积 $\mathrm{d}S$ 垂直方向上以 v 速运动，则在 $\mathrm{d}t$ 时间内穿过 $\mathrm{d}S$ 的总电荷

$$\mathrm{d}q = \rho \mathrm{d}v = \rho v \mathrm{d}t \mathrm{d}S \tag{1-41}$$

式中 $\mathrm{d}V = v\mathrm{d}t\mathrm{d}S$ 表时间 $\mathrm{d}t$ 内穿过 $\mathrm{d}S$ 的电荷所占有的体积，故穿过 $\mathrm{d}S$ 的电流 $\mathrm{d}I$ 可写成

$$\mathrm{d}I = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \rho v \mathrm{d}S$$

所以由 ρ 的运动而产生运流电流密度可表示成

$$J_v = \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}S} = \rho v$$

空间任一点上不可能同时存在传导电流与运流电流，所以二者经常结合起来用 J 表示。它可以单指传导电流，也可以单指运流电流。

(3)位移电流 i_d

它是指由于电场变化(或介质极化)而引起的电流。图 1-8(a)、(b)为电容器充电、放电电路。我们作一个闭合曲面 $S = S_1 + S_2$ 包围极板 A，而 S_1、S_2 两曲面的交界线 l 为一闭合曲线，根据安培环路定律

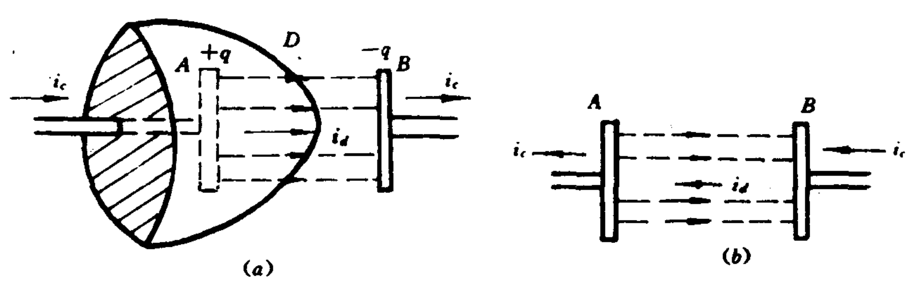


图 1-8

对 S_1 曲面有 $$\oint H \cdot \mathrm{d}l = i_c \tag{1-42}$$

对 S_2 曲面有 $$\oint H \cdot \mathrm{d}l = 0 \tag{1-43}$$

显然相互矛盾，事实上式(1-42)是正确的，故有必要对式(1-43)加以修改，为此引出位移电流的概念。因为此时引线中的传导电流 i_c 流进曲面 S_1 时，把电荷源源不断送上极板，极板上的正电荷 q 与 i_c 的关系为

$$i_c = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \tag{1-44}$$

从正极板上的正电荷出发，又不断发出电通量。根据高斯定理，发出的电通量 ψ_D 总数等于面内的自由电荷

$$\psi_D = \oint_s \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = q \tag{1-45}$$

因而 $$\frac{\mathrm{d}\psi_D}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\oint \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \tag{1-46}$$

它仿佛是穿过 S_1 曲面在介质中曲面 S_2 的电流。根据电流连续性原理，流入 S_1 面的传导电流 i_c 与流出 S_2 面的电流 $\frac{\mathrm{d}\psi_D}{\mathrm{d}t}$ 应相等，也就是

$$i = \frac{\mathrm{d}\psi_D}{\mathrm{d}t} \tag{1-47}$$

我们定义电通量对时间的变化率即为位移电流

$$i_d = \frac{\mathrm{d}\psi_D}{\mathrm{d}t} \tag{1-48}$$

又由于 $\boldsymbol{D} = \varepsilon_0\boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}$，所以位移电流

$$\begin{aligned} i_d &= \frac{\mathrm{d}\psi_D}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{S2} \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}S = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{S2} (\varepsilon_0\boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \\ &= \int_{S2}\left(\varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial t}\right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \end{aligned} \tag{1-49}$$

它包含两部分，用位移电流密度 $\boldsymbol{J}_D$ 表示，则

$$J_D = \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t} \tag{1-50}$$

其中第一部分是真空中介电常数 ε_0 乘上电场强度对时间的变化率，第二部分由于介质极化而形成的极化电流。因为极化的方式最常见是位移极化，因而把两部分结合起来称为位移电流，用 i_D 表示。式(1-50)亦可写成

$$\boldsymbol{J}_D = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{1-51}$$

当电容器充电时电场增强，$\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$ 方向与电场强度方向一致，放电时电场减弱，$\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$ 方向与电场强度方向相反。$\frac{\mathrm{d}\psi_D}{\mathrm{d}t}$ 不论充电或放电时，数值上均等于该时刻的传导电流值。综上所述全电流

$$i_t = i_c + i_v + i_d \tag{1-52}$$

若用 i 表示 i_c 与 i_v 之和，则有

$$i_t = i + i_d \tag{1-53}$$