图論概要

楊炳儒 编著

天津科学技术出版社

图 论 概 要

杨炳儒 编著

天津科学技术出版社

前　言

图论是组合数学与离散数学的重要一支，是富有趣味和应用极为广泛的一门学科，是研究自然科学、工程技术、经济管理和社会问题的一个重要的数学工具。

本书以图表等形式汇集了包括一些较新研究成果的图论的基本理论。力图体现：理论结构清晰，内容融汇完备，概念定理对照，例题解法典型，算法应用俱全等特点。

读者可以此书为线索，尽快地了解图论基本理论的框架，然后参考有关书籍对照学习并做相应的习题，即可掌握本门学科的基础知识、基本技能和基本技巧，进而追逐文献深入探究。

本书可供高等院校有关专业师生，有关图论的教学、科研人员参考、查阅。

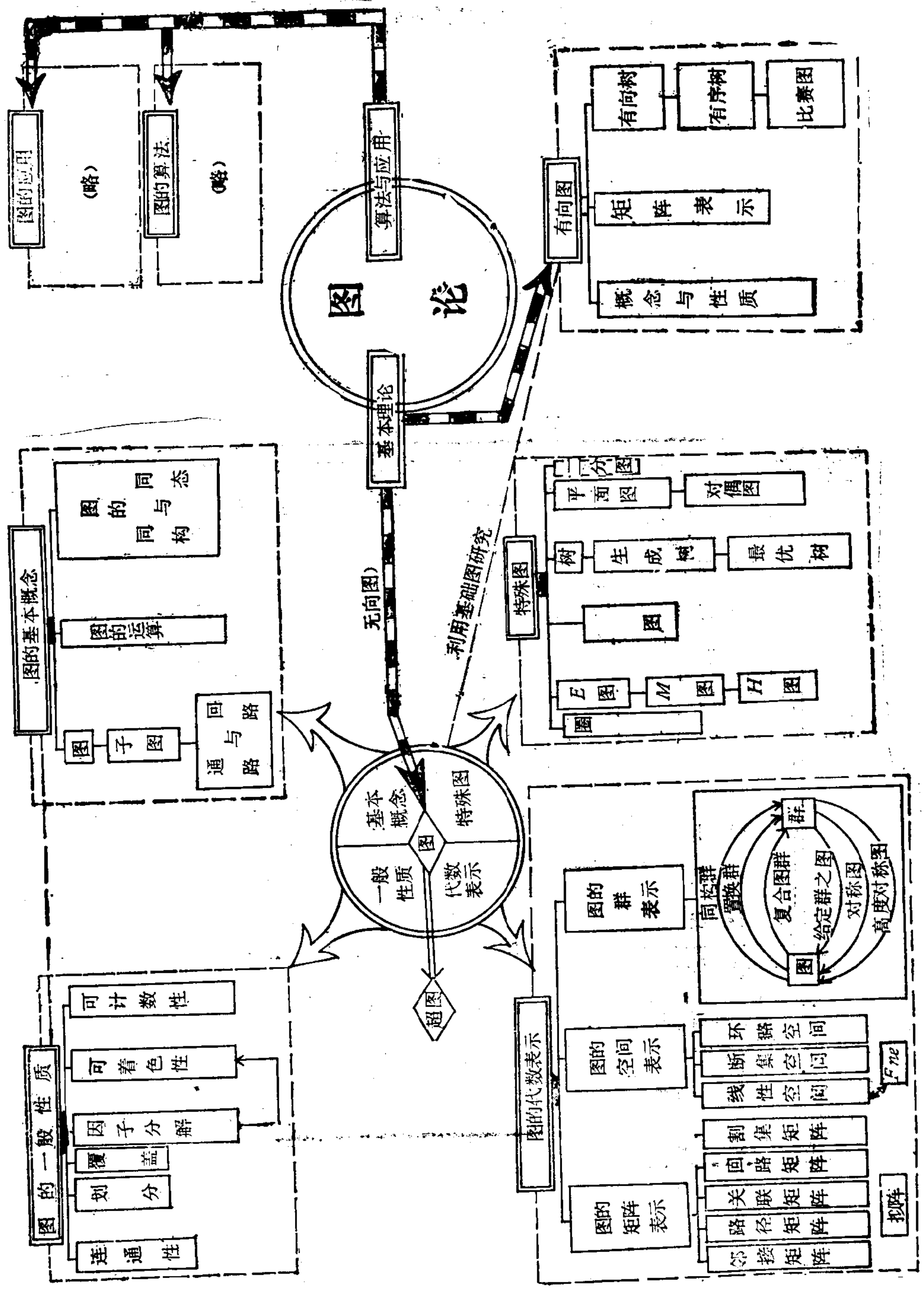
南京邮电学院的余世樑副教授仔细地校阅了本书的原稿，并对其中的内容提出许多有益的建议。安徽大学的张良震教授、北京工业学院的王遇科教授、辽宁大学的洪声贵教授和复旦大学的李为鑑副教授对于本书也给予很大的帮助，在此一并致谢！

杨炳儒

1985.1

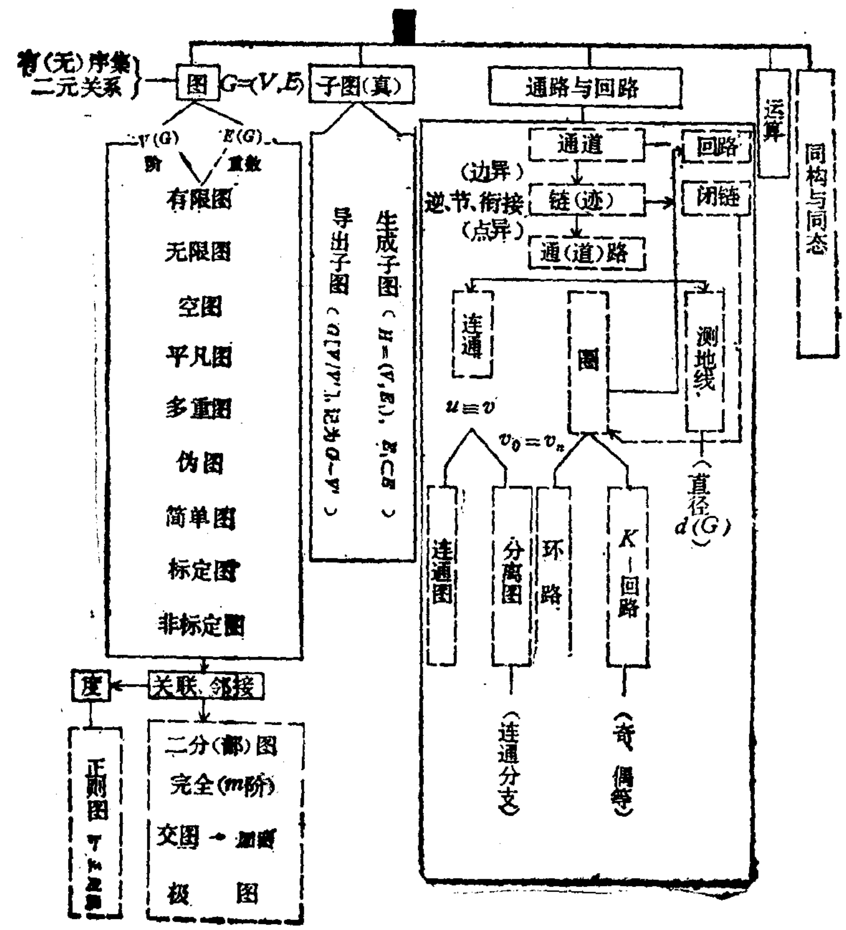
目　　录

《总体结构图》


图论
算法与应用
基本理论
图的应用
图的算法
(略)
(略)
有向图
有向树
有序树
比赛图
矩阵表示
概念与性质
图的基本概念
图的同构与同态
图的运算
图
子图
通路与回路
无向图
利用基础图研究
特殊图
二分图
平面图
对偶图
树
生成树
最优树
图
E图
M图
H图
基本概念
特殊图
一般性质
代数表示
图
超图
图的一般性质
可计数性
可着色性
因子分解
覆盖
划分
连通性
图的代数表示
图的群表示
群
图
复合图群
给定群之图
对称图
高度对称图
图的空间表示
环路空间
断集空间
线性空间
图的矩阵表示
割集矩阵
回路矩阵
关联矩阵
路径矩阵
邻接矩阵

一、图的基本概念

（一）结　　构



有(无)序集
二元关系
图
G=(V,E)
子图(真)
V(G)
阶
E(G)
重数
有限图
无限图
空图
平凡图
多重图
伪图
简单图
标定图
非标定图
导出子图
生成子图
度
关联、邻接
正则图
二分(部)图
完全(m阶)
极　图
通路与回路
通道
回路
(边异)
逆、节、衔接
(点异)
链(迹)
闭链
通(道)路
连通
圈
测地线
u≡v
v0=vn
连通图
分离图
环路
K-回路
(直径 d(G))
(连通分支)
(奇、偶等)
运算
同构与同态

（二）概　　念

1. 图

（1）图：一个图G定义为一个偶对（V，E），记作$G=$（V，E），其中1）V是一个非空集合，它的元素称为顶点；2）E是无序积$V\&V$的一个子集，其元素称为边（线）。集合$V\&V$中的元素可在E中出现不止一次。（分别用$V(G)$和$E(G)$表示图G的顶点集和边集，分别用n_V（或P、v）和n_e（或q、ε）表示顶点数和边数）。

若U是有序积$V\times V$的一个子集（其元素称为弧），则$D=(V,U)$称为有向图。

（2）有（无）限图：

若$V(G)$和$E(G)$都是有限集合，则G称为有限图，否则称为无限图。

空图：没有任何边的图称为空图（记作ϕ）。

平凡图：只有一个顶点的图称为平凡图。

（3）阶：图中顶点的个数叫做图的阶。

重数：连接两个相同顶点的边的条数叫做边的重数。

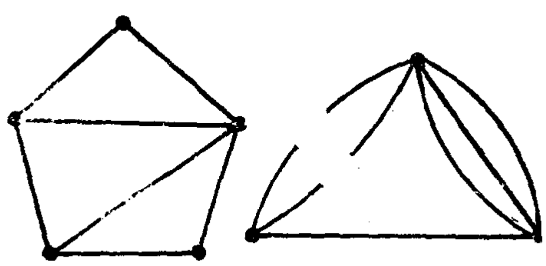
多重边（平行边）：重数大于1的边称为多重边（平行边）。

环：指图中一顶点与它自己联结的边。

（4）简单图：无环且无重数大于1的边的图称为简单图（图1.1(a)）。

多重图：无环且有重数大于1的边的图称为多重图（图1.1(b)）。

伪图：含有环与多重边的图称为伪图（图1.2）。



(a)　　　　(b)

图 1.1

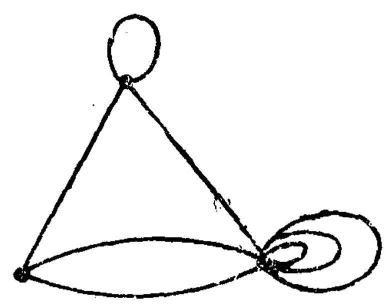


图 1.2

（5）非标定图：所有的图的集合，按照同构关系（见后5）划分成等价类，每一个这样的等价类称为一个非标定图；所有的图的集合，对于图的同构关系构成一个商集。

标定图：如前面（1）中定义的图。

（6）关联：一条边的端点称为与这条边关联；反之，一条边称为与它的端点关联。

邻接：与同一条边关联的两个端点称为邻接；若二边有一公共的顶点，则称此二边邻接。

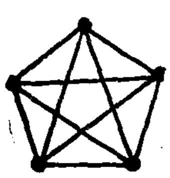


图 1.3

弧立点：若V中某顶点和E中任何边都不关联，则该顶点称为弧立点。

（7）完全图：每一对不同的顶点均有一条边相连的简单图称为完全图。m阶完全图记作K_m（图1.3）。

二分（部）图：若图的顶点能分成二个集合V_1和V_2，使得同一集合中的任何两个顶点都不邻接，则称此图为二分（部）图或双图，记作$G=(V_1, V_2; E)$．这样一个把顶点分成二个集合V_1和V_2的分划(V_1, V_2)称为图的一个二分划。

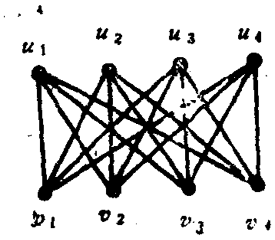


图 1.4

完全二分图：是一个具有二分划(V_1, V_2)的简单二分图，其中V_1的每个顶点与V_2的每个顶点都相连，若$|V_1|=m$，$|V_2|=n$，则此图记作$K_{m,n}$（图1.4）．

（8）度（次数）：设$v\in V(G)$，G中与顶点v关联的边的条数称为v（在G中）的度或次数，记作$d_G(v)$，简记作$d(v)$。（按$d(v)$之奇、偶分别称v为奇、偶顶点）；并记$\Delta(G)=\max\{\deg v \mid v\in V(G)\}$，$\delta(G)=\min\{\deg v \mid v\in V(G)\}$。

（9）正则图：若一个图的每一个顶点都具有相同的度，则称这个图是正则的，每个顶点的度均为K的正则图称为K—正则图（图1.5）．

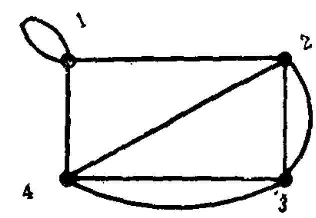


图 1.5

（10）交图：令S是一个集，$F=\{S_1, S_2, \cdots, S_p\}$是$S$的不同的非空子集的一个非空族，这些子集的并是$S$．$F$的交图，记作$\Omega(F)$，定义为$V(\Omega(F))=F$，当$i\neq j$且$S_i\cap S_j\neq\phi$时$S_i$与$S_j$邻接．若存在$S$的子集的一个族$F$，对于这个族，$G\cong\Omega(F)$，就称图$G$是$S$上的一个交图。（“$\cong$”见后(20)）

团：一个图的一个团是一个最大的完全子图（参见（12））．

团图：一个给定的图G的团图是G的团的族的交图（每个团视为它的点的集(图 1.6)．

（11）极图：有禁用子图的图称为极图．

2．子图

（12）子图：图H是G的子图，写作$H\subseteq G$，若$V(H)\subseteq V(G)$，$E(H)\subseteq E(G)$，且H中边的重数不能超过G中对应边的重数．

真子图：设$H\subseteq G$，若下列条件至少有一个成立：$(1^\circ)V(H)\subset V(G)$；$(2^\circ)E(H)\subset E(G)$；$(3^\circ)$ H中至少有一条边的重数小于G中对应边的重数，则称H是G的真子图．

（13）生成子图：设图$G=(V, E)$．一个满足$H=(V, E_1)$，$E_1\subset E$的真子图，叫做G的生成子图（图1.7）。

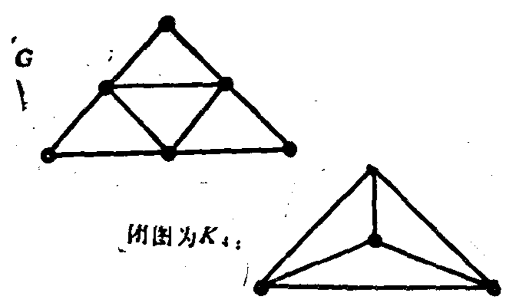


图 1.6

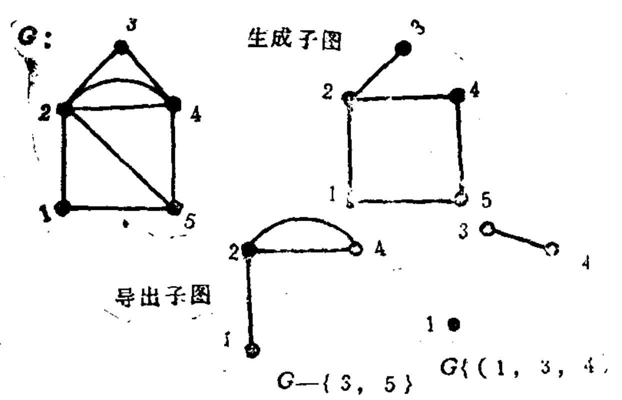


图 1.7

（14）导出子图：设V'是图$G=(V, E)$的顶点集合V的一个非空子集，以V'作为顶点

集，以两端点均在V'中的边的全体为边集的子图，称为由V'导出的G的子图，记作$G[V']$，称$G[V']$是G的导出子图（图1.7）。

导出子图$G[V/V']$(记为$G-V'$)：是从G中去掉V'中的顶点以及与其相关联的边所得到的子图。

3．通路与回路

(15) 通道：一个图G的一条通道是顶点与边的一个交替序列v_0，e_1，v_1，…，v_{n-1}，e_n，v，它以顶点为起、终且每条边关联于直接在其前后的两个顶点。$v_0=v_n$时称为闭的，否则它就称为开的。

迹（链）：上述序列中所有的边都不相同时称为一条迹（链）。（长度为正的、起终点重合的链称为闭链）（图1.8）。

通路（道路）：所有的顶点都不相同的链称为通路（道路）（图1.8）。

(16) 连通：设u、v为图G的二个顶点，若在G中存在一条（u，v）通路，则称顶点u和v是连通的。（示为$u\equiv v$；此关系为一等价关系）。

连通图：若对图中每一对不同的顶点u，v都有一条（u，v）通路，则称G为连通图（联接图）；否则称为非连通图（非联接图）或分离图（图1.9）。

连通分支：按等价关系$u\equiv v$便确定顶点集V的一个分类，把V分成非空子集V_1，V_2，…，V_p，使得当且仅当两个顶点u和v属于同一子集V_i时，它们才是连通的。子图$G[V_1]$，$G[V_2]$…，$G[V_p]$称为G的连通分支或简称分支。

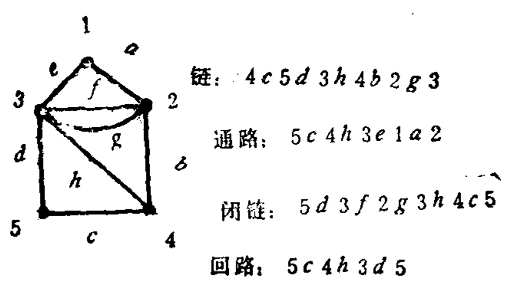


图 1.8

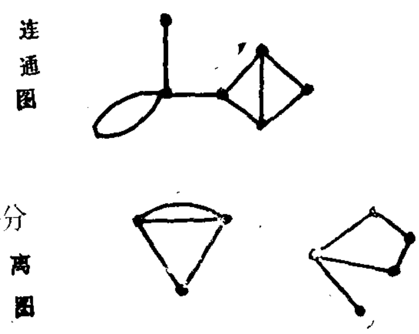


图 1.9

(17) 回路：起点与终点重合的路叫做回路（图1.8）。

圈：起点与终点重合的通路叫做圈（有的亦称回路）。

环路：回路与回路的边不重并称为环路；长为K的回路称为K-回路。按K是奇数还是偶数，称K-回路是奇回路或是偶回路；3-回路称为三角形。

(18) 长度：通道$v_0v_1\cdots v_n$中边的数目n称为它的长度。

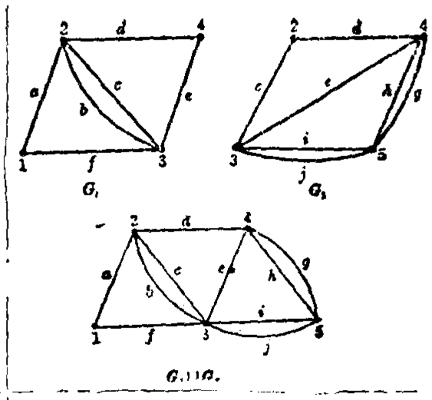
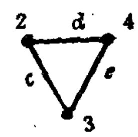
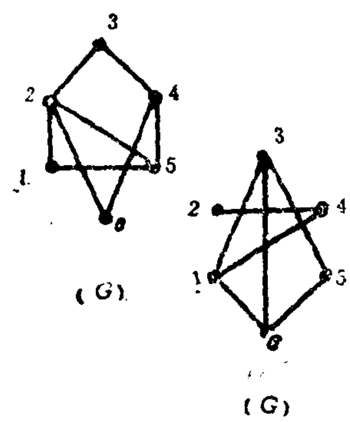
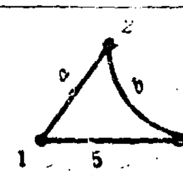
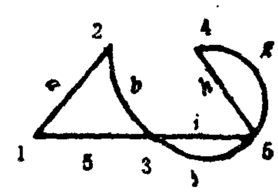
围长：一个图G中最短的圈的长度称为G的围长，记作$g(G)$。

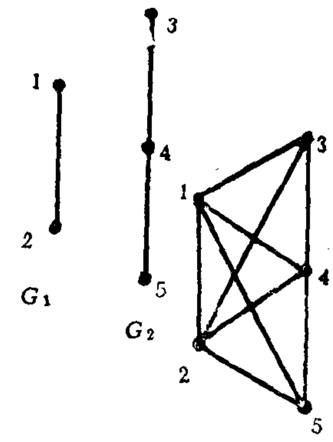
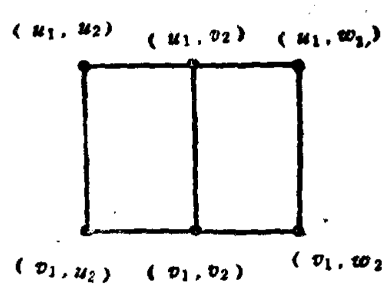
周长：G中任何一个最长的圈的长度称为G的周长，记作$C(G)$。

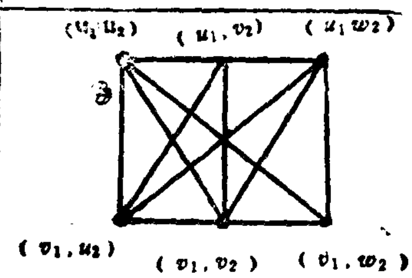
距离：对于G中的两个顶点u与v，当存在联结u和v的道路时，这种道路中最短的道路的长度称为u与v之间的距离，记作$d(u,v)$。若不存在联结u和v的道路，则$d(u,v)=\infty$。

(19) 测地线：一条最短的 $u-v$ 道路称为一条测地线。
直径：一个连通图 G 中任何一条最长的测地线的长度叫做 G 的直径 $d(G)$。

4. 运算

名称	表示	定义	图例
(1)并	$G_1\cup G_2$	由 G_1 和 G_2 中的所有边组成的图.	
(2)交	$G_1\cap G_2$	由 G_1 和 G_2 的公共边组成的图	 ($G_1\cap G_2$)
(3)补	$\overline{G}(G^c)$	设图 $G=(V,E)$，集合 $E_1=\{(u,v)\mid u\neq v,\ u,v\in V\}$，则图 $H=(V,E_1-E)$ 称为 G 之补图	
(4)差	G_1-G_2	由 G_1 中去掉 G_2 中的边组成的图.	 (G_1-G_2)
(5)环和	$G_1\oplus G_2$	在 G_1 与 G_2 的并中去掉 G_1 与 G_2 的交所得之图。	 ($G_1\oplus G_2$)

名称	表　示	定　　义	图　　例
(6)联	G_1+G_2	由$G_1 \cup G_2$和所有的联结V_1和V_2的边所组成的图．(完全n部图：$K=\bar{K}_{P_1}+\bar{K}_{P_2}+\cdots+\bar{K}_{P_n}$)。	 (G_1+G_2)
(7)数乘	nG	由n个与G同构的支构成的图．	略
(8)积	$G_1\times G_2$	考虑$V=V_1\times V_2$中的任意两点$u=(u_1,u_2)$和$v=(v_1,v_2)$，当$[u_1=v_1$及$u_2\,\mathrm{adj}\,v_2]$或$[u_2=v_2$及$u_1\,\mathrm{adj}\,v_1]$时u和v在$G=G_1\times G_2$中邻接．	 $(G_1\times G_2)$
	$G_1\cdot G_2$	将G_1的任意一点与G_2的任意一点等同起来只产生唯一的图（直至同构）．	略
(9)合成	$G_1[G_2]$	以$V=V_1\times V_2$为其点集，而$u=(u_1,u_2)$和$v=(v_1,v_2)$当$[u_1\,\mathrm{adj}\,v_1]$或$[u_1=v_1$及$u_2\,\mathrm{adj}\,v_2]$时邻接	见下图



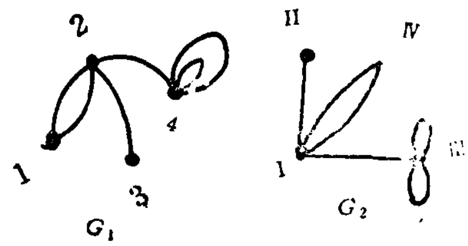
$(G_1[G_2])$

续表

名称	表　示	定　　　　义	图　　例
(10)幂	G^2	它有$V(G^2)=V(G)$且当u、v在G中$d(u,v)\leq 2$时，u和v在G^2中邻接．(类似地可定义G^3，G^4，…)．	略

5. 同构与同态

(20) 同构：设有两个图$G_1=(V_1, E_1)$和$G_2=(V_2, E_2)$，它们的顶点集间有一一对应的关系，使得边之间有如下的关系：设$u_1\leftrightarrow u_2$，$v_1\leftrightarrow v_2$，u_1，$v_1\in V_1$，u_2、$v_2\in V_2$；若$(u_1, v_1)\in E_1$，则$(u_2, v_2)\in E_2$，而且(u_1, v_1)的重数与(u_2, v_2)的重数相同，这种对应叫做同构，记作$G_1\cong G_2$（图1.10）．



$G_1\cong G_2$

图 1.10

(21) 运算1：把图的割点（见后面二(=)-(1)）分裂为两个顶点，使图成为两个不连通的子图。

运算2：把图中两个顶点分裂开，如把顶点x分裂为x_1和x_2；把顶点y分裂为y_1和y_2，于是图G分为两个子图g_1和g_2。设x_1、y_1在g_1中，x_2、y_2在g_2中；这时若把x_1和y_2，x_2和y_1结合在一起，即g_1和g_2两图又重新这样连接起来，将获得一个新图。

(22) 1-同构：两个图G_1和G_2，若应用运算1方法进行运算，能使之成为同构图，则称它们互为1-同构（图1.11）。

2-同构：两个图G_1和G_2，若应用运算1或运算2方法进行运算（也可同时进行），能使之成为同构图，则称它们互为2-同构(图1.12)．

(23) 零度：设G为有n_e条边，n_v个顶点的连通图，称n_e-n_v+1为图G的零度(或环秩)，记作$N(G)$．(分离图为n_e-n_v+p)。

秩：一个具有n_v个顶点的连通图G，定义n_v-1为图G的秩（分离图为n_v-P）。

(24) 初等同态：是将两个不邻接的顶点等同起来。

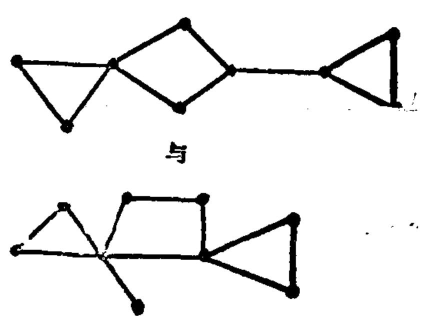


图 1.11

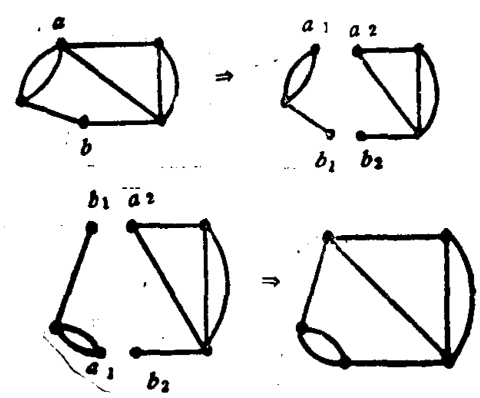


图 1.12

同态：G的一个同态是一系列初等同态，若G'是由G经过一个同态ϕ得到的图，我们可

将 ϕ 看作是从 V 到 V' 上的一个函数，使得若 u 和 v 在 G 中是邻接的，则 ϕ_u 和 ϕ_v 在 G' 中邻接。此时，称 ϕ 是 G 到 G' 上的一个同态，G' 是 G 的一个同态象，且记 $G'=\phi G$。（注意，每一个同构是一个同态）。（图1.13）

n 阶完全的同态：G 的一个同态若有 $\phi G=Kn$，则称是 n 阶完全的。

（25）着色、n-着色、完全着色、消色数 $\psi(G)$、色数 $\chi(G)$ 等均见后面的二(二)-(V)。

道路 P_4 的 4 个同态象：

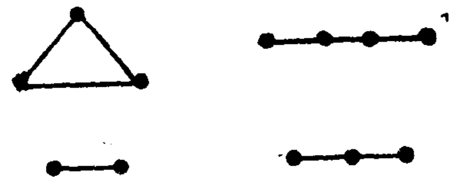


图 1.13

（三）定 理

1. 图

（1）（关于极图）所有有 p 个点而没有三角形的图中最多有 $[p^2/4]$ 条边）即 $ex(p, k_3)=[p^2/4]$)。

另 $tx(p, C_p)=1+(p-1)(p-2)/2$;

$tx(p, K_4-x)=[p^2/4]$;

$tx(p, K_{1,3}+x)=[p^2/4]$;

$$tx(p, K_n)=\frac{(n-2)(p^2-r^2)}{2(n-1)}+\binom{r}{2}.$$

（其中，$n\leqslant p$，$p\equiv r\ (\mathrm{mod}(n-1))$ 且 $0\leqslant r<n-1$，

（2）每个无限图含有 $\mathcal{N}_0$ 个互相邻接的点或者 $\mathcal{N}_0$ 个互相不邻接的点。

（3）一个图 G 有 q 条边 $\Longrightarrow \sum_{v\in V} d(v)=2q$。

（4）任何图 $G \Longrightarrow$ 有偶数个奇数点。

（5）图 G 是一个双图 $\Longleftrightarrow$ 它的所有圈的长度是偶数。

（6）每一个图都是一个交图。

（7）$G(p, q)$ 是连通的，且 $p\geqslant 3 \Longrightarrow \omega(G)\leqslant q$。（其中 $\omega(G)$ 称为 G 的交数，它是构成一个集 S 所需要的最少的元素的数目，而使得 G 是 S 上的一个交图）。

（8）G 有 p_0 个孤立点，且没有 K_2 支 $\Longrightarrow \omega(G)\leqslant q+p_0$。

（9）G 是一个有 $p>3$ 个顶点的连通图，$\omega(G)=q \Longleftrightarrow G$ 中没有三角形。

（10）任一有 $p\geqslant 4$ 个顶点的图 $G \Rightarrow \omega(G)\leqslant[p^2/4]$。

（11）一个图 G 是一个团图 $\Longleftrightarrow$ 它含有完全子图的一个族 F，它们的并是 G；且若 F 的某个子族 F' 中每一对完全子图的交非空，则 F' 的所有元素的交就非空。

2. 子图

（12）图 G 中所有不同的子图的个数是 2^q 个（包括图 G 和空图）。

3．通路与回路

（13）图P是一通路$\Longleftrightarrow P$中有两个顶点的度为1，而其余顶点的度均为2．

（14）G是不连通的$\Longrightarrow \bar{G}$连通．

（15）任一闭链必为回路和回路的边不重并．

（16）闭链为一回路$\Longleftrightarrow$它是最小闭链（即其中并不真包含其它闭链）．

（17）G是二分图$\Longleftrightarrow G$中无奇回路．

4．运算

5．同构与同态

（18）同构关系是一个等价关系．

（19）图G_1与图G_2同构$\Longleftrightarrow$存在一置换矩阵P，使$D_1=PD_2P$（D_1、D_2分别为G_1、G_2之邻接矩阵；G_1与G_2无平行边）．（邻接矩阵见后面的三（二）-（1））．

（20）（Ulam猜想）令G有p个点v_i，H有p个点u_i，$p\geqslant 3$．对每个i，子图$G_i=G-v_i$与$H_i=H-u_i$同构$\Longrightarrow$图G与H同构（该猜想已在树的情形及比赛图的情形下，部分地解决了）．

（21）对任一图G和G的任一初等同态$\varepsilon \Longrightarrow \chi(G)\leqslant\chi(\varepsilon G)\leqslant 1+\chi(G)$．

（22）对G的任何一个同态$\phi \Longrightarrow \chi(G)\leqslant\chi(\phi G)$．

（23）对任一图G和G的任一初等同态$\varepsilon \Longrightarrow \psi(G)-2\leqslant\psi(\varepsilon G)\leqslant\psi(G)$．

（24）对任一图G和任一在χ和Ψ之间的整数$n \Longrightarrow$存在G的一个n阶完全同态（从而存在一个完全着色）．

（25）图G_1和G_2是1-同构$\Rightarrow G_1$的秩等于G_2的秩；G_1的零度等于G_2的零度．

6．E．P．Ramsey定理

（Ramsey数）已给n-集S（$|S|=n$），及正整数t，g_1，g_2，…，g_t，r，满足条件

$$g_1,\ g_2,\ \cdots,\ g_t\geqslant r\geqslant 1 \cdots\cdots (*)$$

在S中作所有r个元素的子集合得集合$P_r(S)$，将$P_r(S)$作t个子集的划分：

$$P_r(S)=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_t\cdots\cdots(**)$$

设在原集合S中存在q_i-子集S_i（$|S_i|=q_i$），使s_i中所有r个元素的子集合，全合在A_i内，则称S包含子集合（q_i，A_i）或称存在子集合（q_i，A_i），

设存在最小正整数$N(q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_t;\ r)$使当

$$n\geqslant N(q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_t;\ r)$$

时至少存在一个子集合（q_i，A_i），则称此最小的正整数$N(q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_t;\ r)$为Ramsey数．

（26）（Ramsey定理）已给n-集S及正整数q_1，q_2，…，q_t，r，满足条件（$*$）$\Rightarrow$恒存在一个极小正整数$N(q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_t;\ r)$；使当$n\geqslant N(q_1,q_2\cdots,q_t;\ r)$时，将$P_r(S)$作分划（$**$），则在集合$S$里，将存在子集（$q_i$，$A_i$），其中$i$是1，2，…，$t$中的某个数．

【Ramsey定理的应用】

（27）在平面上任给5点，无3点共线$\Longrightarrow$在此5点中，必存在4点，构成一个凸四边形．

（28）在平面上，任给m点，无三点共线．由此m点所可能构成的一切四边形，都是凸四边形$\Longrightarrow$原给的m点，构成一个凸m点形．

（29）任给正整数m，作n阶（0，1）一矩阵，当n充分大时$\Longrightarrow$在此矩阵中，必含

一个 m 阶主子矩阵，是以下四种形式之一：

$$\begin{bmatrix} * & & & 0 \\ & * & & \\ & & * & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & * \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} * & & & 0 \\ & * & & \\ & & * & \\ & & & \ddots \\ 1 & & & * \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} * & & & 1 \\ & * & & \\ & & * & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & * \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} * & & & 1 \\ & * & & \\ & & * & \\ & & & \ddots \\ 1 & & & * \end{bmatrix}$$

(30) 设 $q_1, q_2 \geqslant 2 \Longrightarrow N(q_1, q_2; 2) \leqslant N(q_1 - 1, q_2; 2) + N(q_1, q_2 - 1; 2)$。

(31) $N(q_1 - 1, q_2; 2)$ 与 $N(q_1, q_2 - 1; 2)$ 都是偶数 $\Longrightarrow$

$N(q_1, q_2; 2) < N(q_1 - 1, q_2; 2) + N(q_1, q_2 - 1; 2)$

(32) $N(q_1, q_2; 2) \leqslant \binom{q_1 + q_2 - 2}{q_1 - 1}$

(33) (Erdös[1947]) $N(K, K; 2) \geqslant 2^{K/2}$。

(34) $N(3, 3; 2) = 6$。

(35) $N(3, 4; 2) = 9$。

(36) $N(3, 5; 2) = 14$。

(37) $N(4, 4; 2) = 18$。

(38) $N(3, 6; 2) = 18$。

(39) 已知的Ramsey 数：

$N(q_1, q_2; 2)$

	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7
3	1	3	6	9	14	18	23
4	1	4	9	18			
5	1	5	14				
6	1	6	18				
7	1	7	23				

$N(3, 3, 3; 2) = 17$,

$N(3, 3, 3, 3; 2) = 65$,

……………

(40) 关于Ramsey 数 $N(k, l; 2)$ 的确定，最新成果有：

$k \backslash l$	3	4	5	6	7
3	6	9	14	18	23
4		18	28	44	66
5			55	94	156
6				178	322
7					626

（四）题　　解

1．图-通路与回路

（1）找出右图(图1.14)中：①从顶点A到顶点F的所有的通路；②从A到F的所有的的迹；③A和F之间的距离；④这个图的直径．

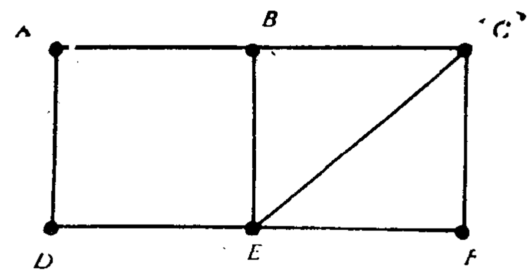


图　1.14

解：①从A到F的路是一条通道，它没有重复的顶点，也没有重复的边．有7条这样的通路：（A，B，C，F），（A，D，E，F），（A，B，C，E，F），（A，D，E，B，C，F），（A，B，E，F），（A，D，E，C，F），（A，B，E，C，F）．

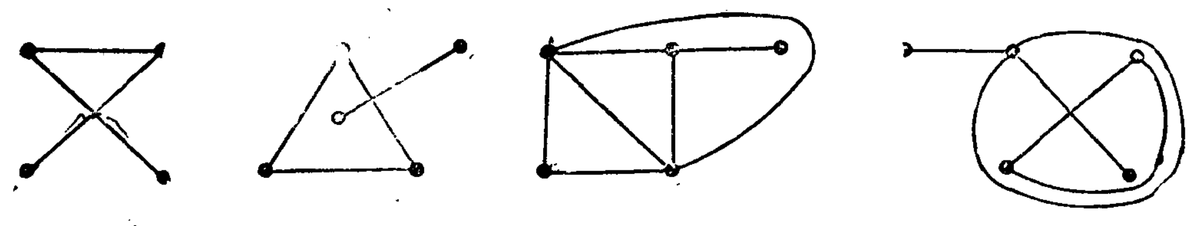
②从A到F的一条迹是一条通道，它的边没有重复．有9条这样的迹，它们是①中的7条路加上．

（A，D，E，B，C，E，F）和（A，D，E，C，B，E，F）．

③从A到F的距离是3，因为有一条从A到F的长度为3的路，即（A，B，C，F），而没有从A到F的更短的路．

④任何两点之间的距离不大于3，A和F之间的距离是3；因此这个图的直径是3．

（2）下图（图1.15）中的哪些是连通的、无环的、简单图？



（i）　　（ii）　　（iii）　　（iv）

图　1.15

解：①仅（i）和（iii）是连通的；

②仅（iv）有一个环，即一条有相同端点的边；

③仅（i）和（ii）是简单图．图（iii）有多重边，图（iv）有多重边和一个环．

（3）试证：当且仅当有一条从u到v的通路时，存在着从顶点u到顶点v的一条通道．

证：因为每一条路是一个通道，所以我们仅需证明，若存在从u到v的一条通道W，则存在从u到v的一条通路．我们对W的长度施以归纳法证明．假设W的长度是1，即$W=(u,\ v)$，则W是从u到v的一条通路．又设W的长度是$n>1$，即

$$W=(u=v_0,\ v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_{n-1},\ v=v_n).$$

若没有顶点被重复，则W是从u到v的一条路．没有一个顶点被重复，比如$v_i=v_j$，这里$i<j$．则

$$W'=(v_0,\ v_1,\ \cdots,\ v_i,\ v_{j+1},\ \cdots,\ v_n)$$

是长度小于n的从$u=v_0$到$v=v_n$的一条通道．根据归纳法，存在着从u到v的一条通路．

（4）证明：若G是简单的，则其边数