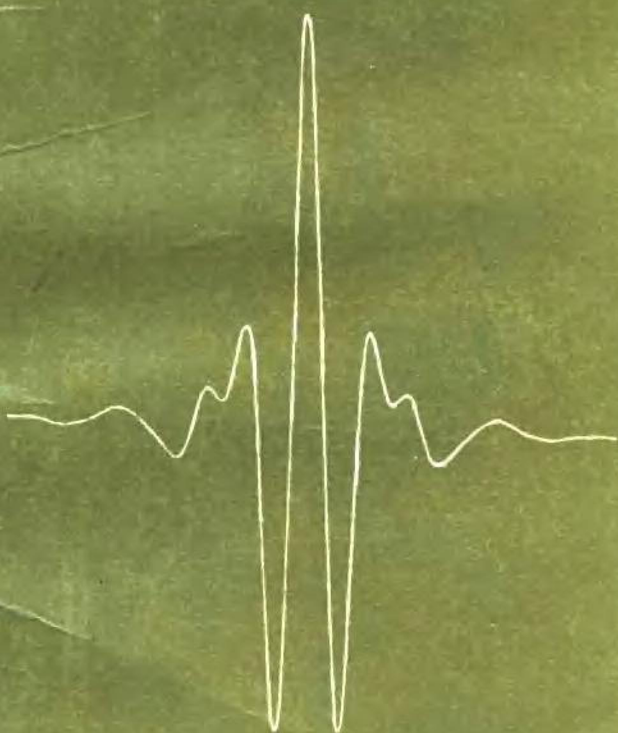
小波与算子

第二卷

[法]Y·迈耶著
王耀东译
邓东皋、龙瑞麟校



世界图书出版公司

小波与算子

第2卷

《Calderon-Zygmund 算子
和多重线性算子》

〔法〕Y. 迈耶 R. 科伊夫曼 著
王耀东 译
邓东皋 龙瑞麟 校

世界图书出版公司
北京·广州·上海·西安
1994

内 容 简 介

本书是 Y. Meyer 和 R. Coifman 著《小波与算子》(“Ondelettes et Opérateurs”, Hermann 出版社)的第 2、3 卷合译本. 这套书是小波分析方面的第一部系统性著作,其理论新颖,思想深刻.

本书是为一切愿意学习小波的读者而写的,适用于从事数值分析、数字图象处理、通讯理论、数据处理、函数论、偏微分方程、非线性分析、量子场论等领域的数学、物理工作者和科技工程人员参考,并可作为有关专业研究生的教材.

Ondelettes et Operateurs

Vol. 2 & Vol. 3

Hermann, Editeurs des Sciences et des Arts, 1991

小波与算子 第 2 卷

《Calderon-Zygmund 算子和多重线性算子》

〔法〕Y. 迈耶 R. 科伊夫曼 著

王耀东 译

邓东皋、龙瑞麟 校

世界图书出版公司北京公司出版

北京朝阳门内大街 137 号

北京中西印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

95 年 3 月第一版 开本:850×1168 1/32

95 年 3 月第一次印刷 印张:12.75

印数:0001—2000 册 字数:30.6 万字

ISBN:7—5062—2031—8/O.152

定价:17.80 元

中译本前言

Y. Meyer 与 R. Coifman 著的《小波与算子》第 2、3 卷中译本合订成一卷出版. 这套中译本的出版，无疑对我国传播小波理论方面会起一定的作用.

"小波分析"是近年出现的一种新的数学方法. 它被纯粹数学家与研究石油勘探数据处理、量子场论、声学等领域的应用数学家独立地发现，也是多元调和分析 40 年来发展的一个突破性的进展，它是纯粹数学与应用数学殊途同归的又一个光辉例子.

历史已经证明，传统的 Fourier 分析是纯粹数学与应用数学的一个重要工具，它几乎渗透到了数学的各个分支，传统的Fourier 分析，从函数 e^{ix}出发，通过展缩变换，成功地构造了 L^2空间中函数的一种展开，这种展开使人们不仅能从时间域，而且能从频率域方面研究函数. 但由于 e^{ix}在无穷远处不是衰减的，所以传统的 Fourier 分析在时间域上没有局部化，因此它不能作局部分析. 另外，传统的 Fourier 分析甚至不能提供 L^2以外的绝大多数空间的无条件基，因此，把它应用到 L^2 以外的空间，需要加上繁冗的演算与推导，小波分析既保留了传统 Fourier 分析的优点，又弥补了它上述的不足之处. 它从有限个具有正则性、局部性与振动性的小波函数出发，通过平移与展缩，为 L^2 空间提供了一类新的正交基——小波正交基. 这类正交基，一方面使函数的分析，在时间域与频率域两方面同时是局部化了的，另方面又使得调和分析中最常见的一类算子 (Calderon－Zygmund 算子)，在其上的表现是几乎对角化了的矩阵，因而使得它们构成了已知的绝大多数常用的 Banach 空间的无条件基，因此，小波分析为各个空间的分析提供了较传统 Fourier 分析更有力的工具，加上一套很有效的快速

算法，小波分析便在函数论、算子论、数值分析、偏微分方程、非线性分析以及图象处理、信号传输、数据压缩、边缘探测等方面，都获得了重要的应用，并且它的理论与应用范围，正在迅速扩大与深入.

本书是 Y. Meyer 与 R. Coifman 合作撰写的《小波与算子》的三卷本著作（第 1、2 卷是 Meyer 写的）之 2、3 卷合订本. 他们这套书是小波分析的第一部系统性著作. 出版几年来，已成了这领域的一部名著. 它详细地研究了各种小波基的构造，小波基与函数空间的关系，Calderon-Zygmund 算子在小波基上的表现，以及小波分析在复分析、算子论、偏微分方程与非线性分析等方面的应用. 这套书的出版，可以说是小波理论形成的标志. 本书作为其中第 2、3 卷合订本，理论性很强，深刻地揭示了小波分析的本质，对有志学习小波理论的读者，是不可缺少的.

本书著者 Y. Meyer 是现在形式小波正交基存在性的证明者，正是他和 R. Coifman 以及他们的学生，长期从事 Calderon 计划的实现（以关于 Lipschitz 曲线上 Cauchy 积分算子 L^2 有界的 Calderon 猜测的解决为转折点)，建立了小波理论的主要框架，为小波理论的建立做出了最重要的贡献，由他们撰写的这套书，其思想的新颖与理论的深刻是不言而喻的.

本人于 1988 年春访问 Yale 大学期间，承蒙 R. Coifman 教授向我介绍了小波分析并赠我这套书的大部分打印稿与全部手稿. 回国后，我即邀请尤众与王耀东教授把它们翻译出来，并由北京大学数学研究所印成油印讲义，于 1990 年初开始在国内交流，这套讲义在我国传播小波理论方面起了一定的作用. 在此，我们向 R. Coifman 教授和 Y. Meyer 教授对中国人民的友好情谊与对发展中国科学事业的热心支持表示衷心的感谢. 本书于 1990 年由法国 Hermann 出版社陆续出版后，译者根据正式出版的文本作了全面的修改. 我们还邀请了中国科学院数学研究所龙瑞麟教授，一起对全书进行校订，最后由世界图书出版公司出版. 本书中译本

的出版，还得到了数学天元基金会的大力支持，其中特别是得到了程民德教授的热情关心与指导. 在此，对上述单位与个人，我们一并表示衷心的感谢.

邓东皋
于中山大学

法文版第2卷 序　　言

当人们要在以 $H=L^2(\mathbb{R}^n)$ 为代表的 Hilbert 空间中安置一个出众的标准正交基 $\{\mathbf{e}_j, j\in J\}$ 时，要抵挡研究在这个特殊基下的是对角(或几乎对角)的算子 $T: H\rightarrow H$ 的企图是不可能的. 人们期望这些算子还是熟知的，这将使大家相信科学家们能体会到的一种联系. 可惜这种企图至今未能实现. 在通常使用的标准正交基内的对角算子往往是病态的并且显得索然无味. 举例来说，在三角系内的对角算子 T，即它满足 $T(e^{ikx})=m_k e^{ikx}$，其中 m_k 是一个有界序列，一般说来是病态的，除非，比如说，Marcinkiewicz 条件 $|m_{k+1}-m_k|\leqslant C/|k|$ 得以满足. 这时，T 是一个伪微分算子，并且构成了我们称之为 **Calderon-Zygmund** 算子的第一个例证.

就我们所知，小波标准正交基构成第一个也是唯一的具有如下性质的标准正交基的例子，在这个基内的对角(或几乎对角)算子是饶有兴味并且也是在人们所熟知的 Calderon-Zygmund 算子的名称下. 这一引人注目的事实解释了小波级数比之于其它正交级数所带来的成功. 小波系数形如 $a_k\rightarrow m_k a_k$ 的变换，当 m_k 是有界序列时，不致使小波级数的和 $f(x)=\sum a_k w_k(x)$ 不可控制. 和 $f(x)$ 变换成 $g(x)=T[f](x)$，而 Calderon-Zygmund 算子的显著特性允许精确刻画对 $f(x)$ 进行的变换. 因而小波级数分解是一个强有力的工具. 而这种强劲性来源于小波和我们上面描述的算子之间的关系.

但是 Calderon-Zygmund 算子远在小波标准正交基发现之前已被研究. 它们构成了一个独立的理论，在本卷我们将以完备和自封的方式讲述这一理论. 因此读者可以直接攻读第 2 卷，至于第 1 卷只须记住小波标准正交基的存在性. Calderon-Zygmund 算子不仅与小波有特殊的关系，它们跟经典的伪-微分算子也有特殊关

系，并且构成了后者的一个值得注意的推广. Calderon-Zygmund 算子事实上处于“伪-微分算子之上”.

为方便读者，本套书的导论重录于后.

目　录

法文版第 2 卷序言 …………………………………………………… (Ⅺ)
导论…………………………………………………………………… (1)

第 7 章　新 Calderon-Zygmund 算子 ………………………… (7)
1. 引言 ……………………………………………………………… (7)
2. 相应于奇异积分的 Calderon-Zygmund 算子的定义 ……
…………………………………………………………………… (14)
3. Calderon-Zygmund 算子和空间 L^p ……………………… (21)
4. Calderon-Zygmund 算子满足 $T(1)=0$ 或 $T^*(1)=0$ 的条件 …………………………………………………………… (32)
5. 对于 Calderon-Zygmund 算子的逐点估计 ………… (36)
6. Calderon-Zygmund 算子和奇异积分………………… (43)
7. 精确化 Cotlar 不等式…………………………………… (48)
8. 好 λ 不等式和 Muckenhoupt 权 ……………………… (51)
9. 注释和补充……………………………………………… (57)
第 8 章　David 和 Joarné 的 $T(1)$定理 ……………………… (59)
1. 引言 ……………………………………………………… (59)
2. $T(1)$定理的表述 ………………………………………… (61)
3. $T(1)$定理通过小波的证明 ……………………………… (69)
4. Schur 引理 ……………………………………………… (71)
5. 小波和小浪 ……………………………………………… (73)
6. 伪积和定理 1 证明的结尾 ……………………………… (75)
7. Cotlar 和 Stein 的引理以及 David 和 Journe 定理的第二个证明 ……………………………………………………… (78)

8. $T(1)$定理的其它表述 …………………………… (83)
9. Calderon-Zygmund 算子的 Banach 代数 …………… (86)
10. Calderon-Zygmund 算子的 Banach 空间 …………… (93)
11. 伪积的变种 ………………………………………… (96)
12. 注释和补充 ………………………………………… (99)
第 9 章 Calderon-Zygmund 算子的例子 ……………… (101)
1. 引言 ……………………………………………… (101)
2. 伪微分算子和 Calderon-Zygmund 算子 …………… (103)
3. 交换子和 Calderon 的精确伪微分法 ……………… (115)
4. 伪微分的 Leibniz 法则 ………………………… (120)
5. 高阶交换子 ……………………………………… (123)
6. Takafumi Murai 所给的 Cauchy 核的 L^2 连续性的证明 ……………………………………………………… (126)
7. Calderon 和 Zygmund 旋转法 ……………………… (135)
第 10 章 相应于奇异积分的算子在 Hölder 或 Sobolev 空间上的连续性 ………………………………………… (142)
1. 引言 ……………………………………………… (142)
2. 定理的表述 ……………………………………… (143)
3. 例子 ……………………………………………… (146)
4. T 在齐次 Hölder 空间上的连续性 ……………… (150)
5. 算子 $T\in\mathscr{L}_\gamma$ 在齐次 Sobolev 空间上的连续性 …… (151)
6. 在普通 Sobolev 空间上的连续性 ………………… (155)
7. 评注 ……………………………………………… (158)
第 11 章 $T(b)$定理 ………………………………………… (160)
1. 引言 ……………………………………………… (160)
2. 基本定理的陈述 ………………………………… (161)
3. 算子和增生型(抽象情形) ……………………… (162)
4. 适用于一个双线性型的基的构造 ………………… (165)
5. Tchamitchian 的构造 ……………………………… (168)

6. 算子 T 的连续性 …………………………………… (172)
7. 回到 $T(b)$定理 …………………………………… (175)
8. 对于 Cauchy 核的 L^2 的连续性的应用 ………… (179)
9. 一般情形下的 $T(b)$定理 ……………………………… (179)
10. 空间 H_b^1 …………………………………………… (184)
11. $T(b)$定理的一般陈述 ……………………………… (188)
12. 对于复分析的应用 ………………………………… (190)
13. 相应于 $T(b)$定理的算子代数 ……………………… (190)
14. 推广到向量情形 …………………………………… (192)
15. 推广到复数域代以 Clifford 代数的情形 ………… (193)
16. 补充 ………………………………………………… (196)

法文版第 3 卷　序言 ………………………………………… (198)

第 12 章　广义 Hardy 空间 …………………………………… (199)
1. 引言 ………………………………………………… (199)
2. Lipschitz 情形 ……………………………………… (200)
3. Hardy 空间和保形表示 ……………………………… (206)
4. 与复分析联系的算子 ……………………………… (216)
5. 最简短的证明 ……………………………………… (224)
6. Guy David 定理的陈述 ……………………………… (227)
7. 转移 ………………………………………………… (232)
8. Ahlfors 正则曲线的 Calderon-Zygmund 分解 …… (237)
9. G. David 定理的证明 ………………………………… (240)
10. 补充 ………………………………………………… (243)
第 13 章　多重线性算子 ……………………………………… (244)
1. 引言 ………………………………………………… (244)
2. 多重线性算子的一般理论 ………………………… (246)
3. 多重线性算子连续性的一个判别法 ……………… (251)

4. 在 $(\mathrm{BMO})^{k}$ 上定义的多重线性算子 …………………(259)
5. 全纯泛函的一般理论 …………………………………(262)
6. 对 Calderon 计划的应用 …………………………………(268)
7. 多重线性算子的 MacIntosh 理论 ……………………(274)
8. 结论 ……………………………………………………(281)
第 14 章 增生微分算子平方根的多重线性分析 …………(283)
1. 引言 ……………………………………………………(283)
2. 算子的平方根 …………………………………………(284)
3. 增生平方根 ……………………………………………(289)
4. 增生共轭双线性型 ……………………………………(294)
5. Kato 猜测 ………………………………………………(296)
6. 相应于 Kato 猜测的多重线性算子……………………(298)
7. 核 $L_m^{(2)}(x,y)$的估计 …………………………………(305)
8. 算子 L_m 的核 $L_m(x,y)$的研究…………………………(312)
9. 补充和注释 ……………………………………………(315)
第 15 章 Lipschitz 区域内的位势理论 ……………………(317)
1. 引言 ……………………………………………………(317)
2. 结果的陈述 ……………………………………………(318)
3. 双层位势的几乎处处存在性 …………………………(324)
4. 单层位势及其梯度 ……………………………………(331)
5. Jerison 和 Kenig 等式 …………………………………(336)
6. 定理 2 和 3 证明的结尾 ………………………………(340)
7. 附录 ……………………………………………………(342)
第 16 章 仿微分算子 ……………………………………(345)
1. 引言 ……………………………………………………(345)
2. 非线性问题线性化的第一个例子 ……………………(346)
3. 非线性问题的第二个线性化 …………………………(348)
4. 仿微分算子 ……………………………………………(355)
5. 仿微分算子的象征演算 ………………………………(358)

6. 对非线性偏微分方程的应用 …………………… (362)
7. 仿积和小波 ………………………………………… (365)

参考文献……………………………………………………… (369)
索引………………………………………………………… (385)

导　论

长期以来，分析中的基函数是余弦函数、正弦函数和虚指数函数. 函数$(2\pi)^{-\frac{1}{2}}e^{ikx}(k\in\mathbb{Z})$构成了空间 $L^2[0,2\pi]$的一组正交基(指规范正交，下同). Fourier 级数是它们的线性组合$\sum a_k e^{ikx}$. 对它们的研究一直是并且仍然是数学分析中问题和发现的用之不尽的源泉. 之所以问题多，这主要是因为缺乏一本好的字典，用它可以把函数的性质翻译到它的 Fourier 系数上. 这里有一个例子说明这个困难. J. P. Kahane，Y. Katznelson 和 K. de Leeuw 已经证明了(〔150〕)：从任一个平方可和函数 $f(x)$出发，为了得到一个连续函数 $g(x)$，只需或者增大 $f(x)$ 的 Fourier 系数的模，或者保持它不变并适当地改变系数的位相. 因此不可能仅根据 Fourier 系数大小的阶就预知函数的性质(大小，正则性). 更清楚地认识这些仍然是困难的，许多问题还有待解决.

在 80 年代初，一些科学家就使用了"小波"作为传统 Fourier 分析的一个替代物. 用这个替代物可以期待把数值分析做得更简单，并把某些瞬时现象的综合做得更有力. J. S. Lienard 和 X. Rodet(〔167〕，〔206〕) 涉及到声学信号(语言和音乐)的数值处理，J. Morlet 的小波(〔124〕)则是用来贮存和表示在石油勘测中收集到的地震信号. 从数学方面来说，探索也在积极地进行. 为说明问题，我们只要提到 R. Coifman 和 G. Weiss 创立"原子"和"分子"学说就够了. 这些"原子"和"分子"构成了不同函数空间的基的组成部分. 它们是很明确地被确定的，对使用者来说，又是很简单的. 某些原子分解可以通过对 A. Calderon 的一个著名恒等式的离散化来得到. 而在这个恒等式中，"小波"已经是被隐蔽地勾划出来了. 这个恒等式后来又被 Morlet 和他的合作者们重新发现……. 最

后,L. Carleson 使用了非常像“小波”的函数构造了 Stein 和 Weiss 的空间 H^1 的无条件基.

这些不同的工作显示了某种“和谐性”;由此可以看出,应该而且可以用数学上有根据的、又是普遍适用的、有内在联系的理论把它们统一起来. 本书将要研究的**小波正交基**就取代了 Lienard, Morlet 和 Rodet 的经验“小波”.

正是这些小波正交基给出了 Coifman 和 Weiss 所发现的“原子分解”的一个直接方法,小波正交基也首次构造出了通常函数空间的**无条件基**. 小波基是普遍适用的;一切准备就绪,“伸手可得”,这就是说:函数或分布是小波级数的和,与用 Fourier 级数来做这件事的情形不同,这些级数的系数以简单的方式精确并忠实地表达了这些函数或分布的性质.

这样,人们就有了一个新的工具,用它可以得到以前只有用缺项的或随机的 Fourier 级数才能办到的微妙的结构. 这些特殊级数的例外好的性质现在变成了一般小波级数的平凡性质.

正交小波级数的分析或综合方法将在科学和技术的不同领域中起着重要作用. 本书第 1 卷(第 1 章到第 6 章)是为所有想了解小波的读者——数学家、物理学家和工程师们而写的.

本书的第 2 卷和第 3 卷是特意为数学家们写的,它们讨论与小波有关的算子. G. Weiss 曾指出:当一个空间可以作“原子分解”时,对作用到这个空间上的算子的研究就变得很简单了. 他写道:“分析中的许多问题可自然地表述为定义在函数或分布空间上的线性算子的连续性问题. 如果这个问题可以首先化为研究算子作用到适当的一类简单的元上,而这些元又以某种方便的形式生成整个空间的话,那么这些问题就可以用很直接而容易的技术来解决”. 当这些“简单的元”是三角函数 e^{ikx}时,在 L^2 上有界的,并且在这个三角函数系下是对角线化的算子,一般地说,除了由定义所保证的平移不变性外,没有任何令人感兴趣的性质. 因此重要的是对算子 T 的特征值施加足够精确的条件,以保证可以延拓这个算子

到其它函数空间上去. 这个方向上的第一个结果是由 Marcinkiewicz 得到的.

但是,在小波基上精确对角线形的算子或近似对角线化的算子构成了 L^2上有界算子的一个代数 A,用著名的 **Calderon** 和 **Zygmund** 的**实变方法**可以把 A 中的算子延拓到其它函数空间上去. 这个代数 A 在很自然的意义上延拓了伪微分算子,并且它是严格地包含在 A. Calderon 已研究过的算子集合 C 中. A. Calderon 的研究工作导致了复分析和偏微分方程中若干问题的解决.

这里对集合 C 作一点更精细的说明. 它的微妙结构寓于我们称之为"Calderon 计划"之中. 在与 Zygmund 合作发现了那些可以归之于经典伪微分算子演算的东西之后,A. Calderon 自己打算尽可能减弱为有效地使用这个算法所必要的正则性条件,以系统地扩展应用领域.

在最少正则性条件的研究中,Calderon 奠基性的并且是令人出乎意料的发现是:存在着一个界限. 存在一个人们不能超越的"自然边界". 在这个范围之内,算子的延拓不过是某个 Banach 空间上全纯函数的解析延拓. 我们将在第 8 章证明它.

本书第 7 章到第 11 章研究 Calderon 计划中算子集合 C 的构造. 我们把它叫做 **Calderon-Zygmund 算子**. 虽然它很不同于 Calderon 和 Zygmund 在 50～60 年代曾研究过的"历史上的算子".

完全同这些"历史上的算子"一样,我们将要讨论的算子在某种新的意义上可以借助于奇异积分来定义. 我们将在第 7 章仔细讨论它. 为了不仅限于考虑卷积算子的情形,必须给出 L^2连续性的判别准则. 缺了它,这个理论就会象沙滩上的城堡一样倒塌下来. 这个判别准则之一就是 David 和 Journé 的重要的 $T(1)$定理. 我们将在第 8 章证明它. $T(1)$ 定理代替了 Fourier 变换,而使用 Fourier 变换本质上只限于卷积算子.

尽管 $T(1)$ 定理是充分必要条件,然而不幸的是它还不能直

接用到最令人感兴趣的 Calderon 计划里的集合 C 中的算子上去.我们不知道这是为什么.然而这些算子具有很特殊的非线性结构,正确地了解非线性,我们就可以从借助于 David 和 Journé 的 $T(1)$ 定理而得到的“局部性”结果过渡到有效地执行 Calderon 计划所要求的“整体性”定理.

在本书的第 3 卷及第 2 卷的第 9 章,我们将介绍 Calderon 计划的最优美的应用.首先是 Calderon 的著名的精确伪微分演算,它现在对非线性偏微分方程有着很有意义的应用.

然后我们回到复平面上与 Lipschitz 域有关的 Hardy 空间和复分析的讨论.第 7 章的课题是研究可求长曲线上的 Cauchy 算子.接下来讨论 Kato 问题,即确定增殖的二阶微分算子的平方根算子的定义域.

往后我们介绍 B. Dahlberg, D. Jerison, C. Kenig 和 G. Verchota 关于 Lipschitz 域上 Dirichlet 问题和 Neumann 问题.

最后,本书以简短介绍 J. M. Bony 的仿微分算子而结束.仿微分算子可用于分析非线性偏微分方程.

小波以突然的方式作为某个伪微分算子的特征值再次出现.经过正确地改写,它又出现在 Lipschitz 曲线上 Hardy 空间和 Cauchy 算子的研究中.这个算子在为这种曲线上的复分析而构造的一组特殊的小波基下是“几乎对角线化的”(第 11 章).为适应各种几何情形而构造小波基是足够灵活的.实际上,不存在一种可以用来分析所有 Calderon 的 C 集合的算子的普遍适用的基.

J. O. Strömberg 是对任意整数 m 构造出 $L^2(\mathbb{R})$ 的形如 $2^{j/2}\psi(2^jx-k)$ $(j\in\mathbb{Z}, k\in\mathbb{Z})$ 的一组正交基的第一个人.这里函数 $\psi(x)$ 属于 C^m,并且它在无穷远处是指数下降的.

以后的关于小波正交基的工作没有走 Strömberg 的路,它本质上属于 I. Daubechies, P. G. Lemarié, S. Mallat 和作者本人这些工作已仔细地给出了完整的证明.

至于算子,Calderon, Zygmund 和 Cotlar 的重要结果将在第 7