

“十三五” 国家重点出版物出版规划项目

21世纪理论物理及其交叉学科前沿丛书

椭圆函数相关凝聚态物理 模型与图表示

石康杰 杨文力 李广良 编著

非外借



科学出版社



国家自然科学基金
理论物理专款资助

“十三五”国家重点出版物出版规划项目

21 世纪理论物理及其交叉学科前沿丛书

椭圆函数相关凝聚态物理 模型与图表示

石康杰 杨文力 李广良 编著

科学出版社

北京

内 容 简 介

精确可解统计模型在凝聚态物理、可积场论和数学中都有重要应用,是理论物理的前沿课题.与椭圆函数相关的格点模型的极限既能给出三角型和有理型的格点模型,又能包含更多的参量,因此受到了特殊的重视.本书详细介绍了杨-Baxter 方程等格点模型的基础知识,同时重点介绍了两种等价的椭圆型格点模型: Z_n Belavin 模型和 A_{n-1}^1 IRF 面模型,旨在分析 Jacobi θ 函数在研究这些模型中的处理方法.书中广泛应用图示法进行推导,这种直观、便于掌握的方法是学习格点模型和可积场论时常用的.

本书推导详细,便于初学者阅读,可作为学习理论物理的大学生、研究生及相关领域的科技工作者学习格点统计模型的教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

椭圆函数相关凝聚态物理模型与图表示/石康杰,杨文力,李广良编著. —北京:科学出版社,2019.5

(21 世纪理论物理及其交叉学科前沿丛书)

ISBN 978-7-03-061286-1

I. ① 椭… II. ① 石… ② 杨… ③ 李… III. ① 椭圆函数-凝聚态-物理模型-图表法 IV. ① O174.54

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2019) 第 100076 号

责任编辑:刘凤娟/责任校对:彭珍珍
责任印制:吴兆东/封面设计:无极书装

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

北京虎彩文化传播有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2019 年 5 月第 一 版 开本:720 × 1000 1/16

2019 年 5 月第一次印刷 印张:22 3/4

字数:446 000

定价:149.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

《21 世纪理论物理及其交叉学科前沿丛书》编委会
(第二届)

主 编: 孙昌璞

执行主编: 常 凯

编 委: (按姓氏拼音排序)

蔡荣根	段文晖	方 忠	冯世平
李 定	李树深	梁作堂	刘玉鑫
卢建新	罗民兴	马余刚	任中洲
王 炜	王建国	王玉鹏	向 涛
谢心澄	邢志忠	许甫荣	尤 力
张伟平	郑 杭	朱少平	朱世琳
庄鹏飞	邹冰松		

《21 世纪理论物理及其交叉学科前沿丛书》

出版前言

物理学是研究物质及其运动规律的基础科学。其研究内容可以概括为两个方面：第一，在更高的能量标度和更小的时空尺度上，探索物质世界的深层次结构及其相互作用规律；第二，面对由大量个体组元构成的复杂体系，探索超越个体特性“演生”出来的有序和合作现象。这两个方面代表了两种基本的科学观——还原论 (reductionism) 和演生论 (emergence)。前者把物质性质归结为其微观组元间的相互作用，旨在建立从微观出发的终极统一理论，是一代又一代物理学家的科学梦想；后者强调多体系统的整体有序和合作效应，把不同层次“演生”出来的规律当成自然界的基本规律加以探索。它涉及从固体系统到生命软凝聚态等各种多体系统，直接联系关乎日常生活的实际应用。

现代物理学通常从理论和实验两个角度探索以上的重大科学问题。利用科学实验方法，通过对自然界的主动观测，辅以理论模型或哲学上思考，先提出初步的科学理论假设，然后借助进一步的实验对此进行判定性检验。最后，据此用严格的数学语言精确、定量表达一般的科学规律，并由此预言更多新的、可以被实验再检验的物理效应。当现有的理论无法解释一批新的实验发现时，物理学就要面临前所未有的挑战，有可能产生重大突破，诞生新理论。新的理论在解释已有实验结果的同时，还将给出更一般的理论预言，引发新的实验研究。物理学研究这些内禀特征，决定了理论物理学作为一门独立学科存在的必要性以及在当代自然科学中的核心地位。

理论物理学立足于科学实验和观察，借助数学工具、逻辑推理和观念思辨，研究物质的时空存在形式及其相互作用规律，从中概括和归纳出具有普遍意义的基本理论。由此不仅可以描述和解释自然界已知的各种物理现象，而且还能够预言此前未知的物理效应。需要指出，理论物理学通过当代数学语言和思想框架，使得物理定律得到更为准确的描述。沿循这个规律，作为理论物理学最基础的部分，20 世纪初诞生的相对论和量子力学今天业已成为当代自然科学的两大支柱，奠定了理论物理学在现代科学中的核心地位。统计物理学基于概率统计和随机性的思想处理多粒子体系的运动，是二者的必要补充。量子规范场论从对称性的角度描述微观粒子的基本相互作用，为自然界四种基本相互作用的统一提供坚实的基础。

关于理论物理的重要作用 and 学科发展趋势，我们分六点简述。

1. 理论物理研究纵深且广泛, 其理论立足于全部实验的总和之上。由于物质结构是分层次的, 每个层次上都有自己的基本规律, 不同层次上的规律又是互相联系的。物质层次结构及其运动规律的基础性、多样性和复杂性不仅为理论物理学提供了丰富的研究对象, 而且对理论物理学家提出巨大的智力挑战, 激发出人类探索自然的强大动力。因此, 理论物理这种高度概括的综合性研究, 具有显著的多学科交叉与知识原创的特点。在理论物理中, 有的学科 (诸如粒子物理、凝聚态物理等) 与实验研究关系十分密切, 但还有一些更加基础的领域 (如统计物理、引力理论和量子基础理论), 它们一时并不直接涉及实验。虽然物理学本身是一门实验科学, 但物理理论是立足于长时间全部实验总和之上, 而不是只针对个别实验。虽然理论正确与否必须落实到实验检验上, 但在物理学发展过程中, 有的阶段性理论研究和纯理论探索性研究, 开始不必过分强调具体的实验检验。其实, 产生重大科学突破甚至科学革命的广义相对论、规范场论和玻色-爱因斯坦凝聚就是这方面的典型例证, 它们从纯理论出发, 实验验证却等待了几十年, 甚至近百年。近百年前爱因斯坦广义相对论预言了一种以光速传播的时空波动——引力波。直到 2016 年 2 月, 美国科学家才宣布人类首次直接探测到引力波。引力波的预言是理论物理发展的里程碑, 它的观察发现将开创一个崭新的引力波天文学研究领域, 更深刻地揭示宇宙奥秘。

2. 面对当代实验科学日趋复杂的技术挑战和巨大经费需求, 理论物理对物理学的引领作用必不可少。第二次世界大战后, 基于大型加速器的粒子物理学开创了大科学工程的新时代, 也使得物理学发展面临经费需求的巨大挑战。因此, 伴随着实验和理论对物理学发展发挥的作用有了明显的差异变化, 理论物理高屋建瓴的指导作用日趋重要。在高能物理领域, 轻子和夸克只能有三代是纯理论的结果, 顶夸克和最近在大型强子对撞机 (LHC) 发现的 Higgs 粒子首先来自理论预言。当今高能物理实验基本上都是在理论指导下设计进行的, 没有理论上的动机和指导, 高能物理实验如同大海捞针, 无从下手。可以说, 每一个大型粒子对撞机和其他大型实验装置, 都与一个具体理论密切相关。天体宇宙学的观测更是如此。天文观测只会给出一些初步的宇宙信息, 但其物理解释必依赖于具体的理论模型。宇宙的演化只有一次, 其初态和末态迄今都是未知的。宇宙学的研究不能像通常的物理实验那样, 不可能为获得其演化的信息任意调整其初末态。因此, 仅仅基于观测, 不可能构造完全合理的宇宙模型。要对宇宙的演化有真正的了解, 建立自洽的宇宙学模型和理论, 就必须立足于粒子物理和广义相对论等物理理论。

3. 理论物理学本质上是一门交叉综合科学。大家知道, 量子力学作为 20 世纪的奠基性科学理论之一, 是人们理解微观世界运动规律的现代物理基础。它的建立, 带来了以激光、半导体和核能为代表的新技术革命, 深刻地影响了人类的物质、精神生活, 已成为社会经济发展的原动力之一。然而, 量子力学基础却存在诸

多的争议,哥本哈根学派对量子力学的“标准”诠释遭遇诸多挑战。不过这些学术争论不仅促进了量子理论自身发展,而且促使量子力学走向交叉科学领域,使得量子物理从观测解释阶段进入自主调控的新时代,从此量子世界从自在之物变成为我之物。近二十年来,理论物理学在综合交叉方面的重要进展是量子物理与信息计算科学的交叉,由此形成了以量子计算、量子通信和量子精密测量为主体的量子信息科学。它充分利用量子力学基本原理,基于独特的量子相干进行计算、编码、信息传输和精密测量,探索突破芯片极限、保证信息安全的新概念和新思路。统计物理学为理论物理研究开拓了跨度更大的交叉综合领域,如生物物理和软凝聚态物理。统计物理的思想和方法不断地被应用到各种新的领域,对其基本理论和自身发展提出了更高的要求。由于软物质是在自然界中存在的最广泛的复杂凝聚态物质,它处于固体和理想流体之间,与人们的日常生活及工业技术密切相关。例如,水是一种软凝聚态物质,其研究涉及的基础科学问题关乎人类社会今天面对的水资源危机。

4. 理论物理学在具体系统应用中实现创新发展,并在基本层次上回馈自身。从量子力学和统计物理对固体系统的具体应用开始,近半个世纪以来凝聚态物理学已发展成当代物理学最大的一个分支。它不仅是材料、信息和能源科学的基础,也与化学和生物等学科交叉与融合,而其中发现的新现象、新效应,都有可能导致凝聚态物理一个新的学科方向或领域的诞生,为理论物理研究展现了更加广阔的前景。一方面,凝聚态物理自身理论发展异常迅猛和广泛,描述半导体和金属的能带论和费米液体理论为电子学、计算机和信息等学科的发展奠定了理论基础;另一方面,从凝聚态理论研究提炼出来的普适的概念和方法,对包括高能物理在内的其他物理学科的发展也起到了重要的推动作用。BCS 超导理论中的自发对称破缺概念,被应用到描述电弱相互作用统一的 Yang-Mills 规范场论,导致了中间玻色子质量演生的 Higgs 机制,这是理论物理学发展的又一个重要里程碑。近二十年来,在凝聚态物理领域,有大量新型低维材料的合成和发现,有特殊功能的量子器件的设计和实现,有高温超导和拓扑绝缘体等大量新奇量子现象的展示。这些现象不能在以单体近似为前提的费米液体理论框架下得到解释,新的理论框架建立已迫在眉睫,如果成功将使凝聚态物理的基础及应用研究跨上一个新的历史台阶,也将理论物理的引领作用发挥到极致。

5. 理论物理的一个重要发展趋势是理论模型与强大的现代计算手段相结合。面对纷繁复杂的物质世界(如强关联物质和复杂系统),简单可解析求解的理论物理模型不足以涵盖复杂物质结构的全部特征,如非微扰和高度非线性。现代计算机的发明和快速发展提供了解决这些复杂问题的强大工具。辅以面向对象的科学计算方法(如第一原理计算、蒙特卡罗方法和精确对角化技术),复杂理论模型的近似求解将达到极高的精度,可以逐渐逼近真实的物质运动规律。因此,在解析手段无

法胜任解决复杂问题任务时,理论物理必须通过数值分析和模拟的办法,使得理论预言进一步定量化和精密化。这方面的研究导致了计算物理这一重要学科分支的形成,成为连接物理实验和理论模型必不可少的纽带。

6. 理论物理学将在国防安全等国家重大需求上发挥更多作用。大家知道,无论决胜第二次世界大战、冷战时代的战略平衡,还是中国国家战略地位提升,理论物理学在满足国家重大战略需求方面发挥了不可替代的作用。爱因斯坦、奥本海默、费米、彭桓武、于敏、周光召等理论物理学家也因此彪炳史册。与战略武器发展息息相关,第二次世界大战后开启了物理学大科学工程的新时代,基于大型加速器的重大科学发现反过来为理论物理学提供广阔的用武之地,如标准模型的建立。国防安全方面等国家重大需求往往会提出自由探索不易提出的基础科学问题,在对理论物理提出新挑战的同时,也为理论物理研究提供了源头创新的平台。因此,理论物理也要针对国民经济发展和国防安全方面等国家重大需求,凝练和发掘自己能够发挥关键作用的科学问题,在实践应用和理论原始创新方面取得重大突破。

为了全方位支持我国理论物理事业长足发展,1993 年国家自然科学基金委员会设立“理论物理专款”,并成立学术领导小组(首届组长是我国著名理论物理学家彭桓武先生)。多年来,这个学术领导小组凝聚了我国理论物理学家集体智慧,不断探索符合理论物理特点和发展规律的资助模式,培养理论物理优秀创新人才做出杰出的研究成果,对国民经济和科技战略决策提供指导和咨询。为了更全面地支持我国的理论物理事业,“理论物理专款”持续资助我们编辑出版这套《21 世纪理论物理及其交叉学科前沿丛书》,目的是要系统全面介绍现代理论物理及其交叉领域的基本内容及其学科前沿发展,以及中国理论物理学家科学贡献和所取得的主要进展。希望这套丛书能帮助大学生、研究生、博士后、青年教师和研究人员全面了解理论物理学研究进展,培养对物理学研究的兴趣,迅速进入理论物理前沿研究领域,同时吸引更多的年轻人献身理论物理学事业,为我国的科学研究在国际上占有一席之地作出自己的贡献。

孙昌璞

中国科学院院士,发展中国家科学院院士

国家自然科学基金委员会“理论物理专款”学术领导小组组长

前 言

本书研究与椭圆函数相关的格点统计模型, 广泛介绍和应用图示表象 (graphic representation) 进行分析和推导. 精确可解统计模型可以给出解析的精确结果, 为凝聚态物理相变现象提供可信的物理机制, 它们又与动力学体系中的可积系统相互对应, 并且在数学上与量子群、纽结理论等有密切关系. 因此这个领域的研究受到广泛的重视, 成为理论物理的前沿分支.

对格点模型的研究通常是把体系参数化, 使物理系统处在特殊的参数值上, 参数化后可以把体系看成具有无穷多互相对易的守恒量的可积动力学系统, 从而为求解体系的精确解提供方便. 这样的动力学体系, 由于有足够多的独立的守恒量, 它的运动是规则的, 不会出现混沌现象, 所以才有可能有数学上的解析结果. 在一般动力学体系中, 可积体系是非常稀少的, 精确可解的统计物理体系也是一样. 因此能够为有一定对称性的格点模型提供参数化是非常困难的. 根据体系玻尔兹曼权对于谱参数的依赖形式, 我们把模型分为有理型、三角型和椭圆型. 椭圆型模型可以退化为三角型和有理型, 因此有些结果的适用性特别普遍, 受到学术界的格外重视. 在参数化后的格点模型中, 杨-Baxter 方程以及反射方程能为格点模型的可积性提供局部的证据, 从局部的结构给出整体可积 (可解) 的性质, 这些方程和判据成为建立格点模型的关键.

本书详细介绍了椭圆型格点模型—— Z_n Belavin 模型和 A_{n-1}^1 IRF 面模型, 讨论杨-Baxter 方程及相关课题和反射方程, 为进一步学习关于贝特拟设 (Bethe ansatz) 方法、 $T-Q$ 关系以及热力学极限的书籍和文献打下了坚实的基础. 在格点模型的研究中经常用到的推导方式是写出拉丁字母或希腊字母的式子, 这些字母代表算符或者矩阵, 这样做的优点是容易打印或作为电子邮件传送, 在一些推导中也显得简单明了. 本书还着重使用了另一种方法, 就是指标法和图示法. 指标法的优点是把算符作为矩阵的矩阵元直接写出, 处理的是可以相互对易的数字. 图示法与指标法等价, 在图的线上标上指标, 可以直接翻译成带指标的式子. 图的优点是直观性强, 有些公式比如杨-Baxter 方程有明确的几何解释. 这样一来, 在某些推导中很容易看出关键步骤是什么. 图示法在统计模型和量子群中也广泛为学者使用, 缺点是画图打印成电子版本比较麻烦, 所以在文献中使用得比较少. 但是, 在研究和思考问题特别是获得一些原始想法的过程中掌握图示法还是非常有益的, 这是作者介绍这种方法的初衷.

本书的第 1 章和第 2 章是关于 Jacobi θ 函数的数学基础和格点模型的物理基

础介绍, 第 3 章杨-Baxter 方程和杨-Baxter 关系、第 6 章聚合和量子行列式及第 9 章带反射边模型都是关于格点模型普遍适用的基本内容. 其余的 4、5、7、8 章分别介绍 $SU_q(n|m)$ 模型 (三角型)、 Z_n Belavin 模型及等价的 A_{n-1}^1 面模型 (椭圆型), 本书重点介绍 Z_n Belavin 模型及 A_{n-1}^1 面模型的研究. 第 10 章用实例介绍图示法推导算子恒等式, 尽管本书其余部分也经常使用图示法推导公式, 但是这一章的推导可以让读者更进一步地了解这种方法的直观性, 以便多掌握一种思维用的形象化工具. 第 11 章介绍带边 A_{n-1}^1 模型的贝特拟设方法, 给出一个如何求解可解模型的实例. 我们写下这个比较复杂的系统的计算详尽细节, 以便查考.

本书是根据教学讲义编写而成的, 推导力求详细, 虽然不简洁, 但是为有兴趣的初学者提供了方便. 对于文献和书籍, 其困难往往在于还原作者的原始推导, 我们希望本书能帮助读者绕过这重困难. 只要有足够的耐心, 任何掌握高等数学、复变函数、线性代数和大学普通物理的学生都可以掌握本书内容. 在数学推导上, 本书注重精确, 即给出的结果是精准的解析形式的解, 不是近似解或者数值解, 但不是数学意义上的严格推导, 因为在统计模型中, 严格推导有时过于烦琐, 甚至无法达到, 这种处理方法是在精确可解模型研究中常见的.

感谢侯伯宇老师, 是他把我们带进了精确可解的统计模型这个领域, 本书的大部分内容都是他为配合他和他的学生们的研究工作而收集的. 感谢王珮老师、侯伯元老师和文振翼老师的指导. 岳瑞宏、杨仲侠、范桁、丁祥茂和王延申教授的研究对教材有多方面的贡献, 赵柳教授曾看过本书部分内容并给出了中肯的指导和鼓励. 陈一新、李卫、周玉魁、张耀中教授的重要工作带给了我们很多启迪和帮助. 我们再次对他们表示衷心的感谢. 近几年来, 我们有幸参与王玉鹏研究员、曹俊鹏研究员和他们团队的科研工作, 他们敏锐的物理洞察力和创新能力使我们很受启发, 对他们们的热情接待和指导, 我们深表感谢! 感谢西北大学物理学院老师的关心和支持. 特别感谢科学出版社编辑在写书过程中的鼓励指导和帮助. 本书原稿的打印和绘图是繁重而细致的工作, 为此感谢杨战营教授、张明博士的辛勤劳动. 我们在学习和研究中, 曾得到很多师长、朋友和同学的真诚关怀、热心指导和无私帮助, 在这里未能一一致谢, 但对他们我们总是心存感激.

书中不当之处在所难免, 恳请读者批评、指正.

石康杰 杨文力 李广良

2018 年 10 月于西安

目 录

第 1 章	Jacobi θ 函数	1
1.1	刘维尔定理与准双周期全纯函数	1
1.2	Jacobi θ 函数	4
1.2.1	θ 函数的零点	5
1.2.2	零点定理的应用, 加法定理	7
1.3	黎曼恒等式	9
1.4	θ 函数的无穷积表示	11
1.5	模变换	14
第 2 章	统计模型与相变的普适指数	18
2.1	临界指数与普适性	19
2.2	Ising 模型	20
2.3	六顶角模型与八顶角模型	21
2.4	能量和玻尔兹曼权	24
2.5	矩阵的一些知识	26
2.6	R 矩阵和转移矩阵	27
2.6.1	转移矩阵	27
2.6.2	t 矩阵的本征值与配分函数 Z	31
第 3 章	杨-Baxter 方程和 R 矩阵	32
3.1	杨-Baxter 方程和 R 矩阵的么正性	32
3.1.1	杨-Baxter 方程	32
3.1.2	R 矩阵的么正性	34
3.2	R 矩阵的写法和图示	37
3.3	有理 R 矩阵	39
3.4	L 算子与杨-Baxter 关系	41
3.5	R 矩阵的交叉逆矩阵	43
3.6	由 R 矩阵形成的 L 矩阵	46
3.7	由 L 矩阵构造可积体系	49
3.8	L 矩阵的余积	50

第 4 章	超对称 $SU_q(n/m)$ 模型的 R 矩阵	52
4.1	R 矩阵的矩阵元	52
4.2	YBE 的证明	53
4.3	退化情形	60
第 5 章	Z_n 对称的 Belavin 模型	63
5.1	Z_n 对称的 Belavin 模型 R 矩阵	63
5.2	YBE 的推导	66
5.3	Z_n 对称的 Belavin 模型 R 矩阵的矩阵元	69
5.4	R 矩阵的退化情形	72
5.5	R 矩阵的三角极限和有理极限	73
5.6	么正关系	75
第 6 章	反对称化、对称化、聚合和量子行列式	78
6.1	置换与全反对称、全对称算子及其与其他算子的乘法	78
6.2	Cherednik 算子	80
6.3	全反对称或全对称算子对 L 矩阵乘积的穿透	83
6.4	R 矩阵的聚合和 YBR	86
6.5	量子行列式	87
6.6	由 R 矩阵形成的量子行列式	93
第 7 章	面模型和面顶对应关系	100
7.1	面模型的玻尔兹曼权	100
7.2	面顶对应关系	103
7.3	另外两种三顶点算子 $\bar{\varphi}$ 和 $\tilde{\varphi}$	109
7.4	面模型的 YBE	114
7.5	$\bar{\varphi}$ 的存在条件	117
7.6	A_{n-1}^1 面模型的退化情形和三角极限	120
7.7	三顶点算子的变化和 $R(a z)$ 的规范变换	122
第 8 章	Z_n 对称模型和 A_{n-1}^1 模型的交叉么正条件	126
8.1	Z_n Belavin 模型的交叉么正条件	126
8.2	A_{n-1}^1 面模型的量子行列式	135
第 9 章	反射方程和带反射边的可解模型	152
9.1	可解模型中 $t(u)$ 对应的自旋链	152
9.2	反射方程和对偶反射方程	154
9.3	L 矩阵的逆矩阵	156
9.4	反射方程的解的余模	159
9.5	带反射边的可解模型	160

9.6	面模型的反射方程	162
9.7	带反射边模型的聚合	171
9.8	带反射边模型的反对称聚合	175
9.9	反对称化的带反射边 $t_-^{(l)}(z)$ 的性质	180
9.10	A_{n-1}^1 模型的聚合反射边	184
第 10 章	用图示法推导算子恒等式	196
10.1	图例	196
10.2	类反射矩阵 $U(z)$	198
10.3	公式 $t(\theta_i)t(-\theta_i) \sim \text{id}$ 的推导	203
10.4	A_{n-1}^1 模型的类反射矩阵	205
第 11 章	带边 A_{n-1}^1 模型的代数贝特拟设	216
11.1	A_{n-1}^1 模型的转移矩阵	216
11.2	算子交换关系	223
11.3	真空态 $ \Omega\rangle$	229
11.4	嵌套贝特拟设	242
11.5	关于 unwanted 项的分析	254
11.5.1	$t(u)$ 与 $B^i(v)$ 交换得到的 unwanted 项	254
11.5.2	有理模型的 unwanted 项	263
11.5.3	对 unwanted 项的进一步分析	267
11.5.4	关于不同谱的 $ v_1, \dots, u_{N_1}, F\rangle$ 的线性独立	278
参考文献		292
附录 一些公式的推导		294
附录 1	带反射边模型代数贝特拟设的补偿项	294
附录 2	$D_k^k(u)B^l(v)$ 的交换关系 ($k \neq l$)	302
附录 3	$D_l^k(u)B^l(v)$ 的交换关系	318
附录 4	$D_k^k(u)B^k(v)$ 的交换关系	328
附录 5	$D_l^k(u)B^J(v)$ 的交换关系	336
附录 6	$A(u)B^i(v)$ 的交换关系	339
附录 7	公式 (8.2.8) 的推导	341
索引		346
《21 世纪理论物理及其交叉学科前沿丛书》已出版书目		348

第1章 Jacobi θ 函数

本书重点介绍与椭圆函数有关的凝聚态物理模型. 为此, 我们先介绍一些关于 Jacobi θ 函数的知识. 首先引入解析函数论中的刘维尔定理, 然后再介绍准双周期全纯函数.

1.1 刘维尔定理与准双周期全纯函数

刘维尔定理 在全平面上解析的函数 $f(z)$ (全纯函数), 如果 $|f(z)| < M$ 总成立, 则 $f(z) = c$.

证明 根据解析函数论中的柯西积分公式

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_z} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z},$$

其中, c_z 为围绕 z 点的回路. 对 z 微分得

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_z} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z)^2},$$
$$|f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \oint_{c_z} \frac{|f(\xi)| |d\xi|}{|\xi - z|^2}.$$

取 c_z 为以 z 点为圆心、以 r 为半径的圆, 则有

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \oint_{c_z} \frac{M r d\theta}{r^2} = \frac{M}{r}.$$

由于 r 可以任意大, 所以有 $|f'(z)| = 0$, 也就是 $f(z) = c$. 下面考虑准双周期全纯函数. 不失一般性, 令

$$f(z+1) = e^{ig_1(z)} f(z),$$

$$f(z+\tau) = e^{ig_2(z)} f(z),$$

其中, $g_1(z), g_2(z)$ 是全纯函数, τ 为虚部大于 0 的复数, $i = \sqrt{-1}$. 我们可以考虑

$$F(z) = e^{ig(z)} f(z),$$

则得

$$F(z+1) = e^{ig(z+1)} f(z+1) = e^{ig(z+1)} e^{ig_1(z)} f(z)$$

$$\begin{aligned}
 &= e^{ig(z+1)-ig(z)} e^{ig_1(z)} F(z), \\
 F(z+\tau) &= e^{ig(z+\tau)} f(z+\tau) = e^{ig(z+\tau)} e^{ig_2(z)} f(z) \\
 &= e^{ig(z+\tau)-ig(z)} e^{ig_2(z)} F(z).
 \end{aligned}$$

可以构造 g , 使满足

$$g(z+1) - g(z) = -g_1(z).$$

这样就有

$$\begin{aligned}
 F(z+1) &= F(z), \quad F(z+\tau) = e^{iG(z)} F(z), \\
 G(z) &= g(z+\tau) - g(z) + g_2(z).
 \end{aligned}$$

我们以下只考虑 $G(z)$ 为 z 的线性函数的准双周期函数, 原因是这种函数具有很好的性质.

我们考虑 $f(z)$ 在 $z \rightarrow z+\tau$ 时获得的因子 $g_2(z)$ 是 z 的线性函数, $g_1(z)$ 是常数的情形. 在这种情况下 $G(z)$ 是 z 的线性函数, 有如下定理:

定理一 全平面的全纯函数 $f(z)$ 如果满足

$$f(z+\tau) = e^{-2\pi i(A_1+A_2z)} f(z), \quad \text{Im}\tau > 0, \quad (1.1.1)$$

$$f(z+1) = e^{-2\pi iB} f(z), \quad (1.1.2)$$

则 A_2 是正整数, 它等于在 Λ_τ 中的零点个数, 这些零点 z_i 满足

$$\sum z_i = \frac{1}{2}A_2 - A_1 + B\tau \pmod{\Lambda_\tau}, \quad (1.1.3)$$

所谓 $A = B \pmod{\Lambda_\tau}$, 指的是 $A - B = m + n\tau$, m, n 为整数. Λ_τ 是图 1.1.1 中所示的区域.

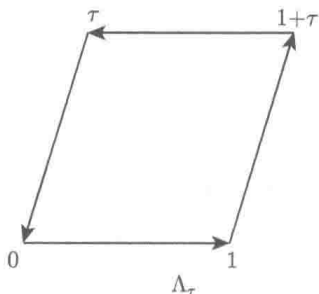


图 1.1.1 Λ_τ 在复平面上的图示

证明 由解析函数论, 在闭区域中解析函数 $f(z)$ 的零点数为 (在以下推导中, 等号指 $(\text{mod } \Lambda_\tau)$ 意义下的相等)

$$\begin{aligned}
 \text{零点数} &= \frac{1}{2\pi i} \oint d \ln f(z) \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \left(\int_0^1 + \int_1^{1+\tau} + \int_{1+\tau}^\tau + \int_\tau^0 \right) d \ln f(z) \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \left(\int_0^1 - \int_\tau^{1+\tau} - \int_0^\tau + \int_1^{1+\tau} \right) d \ln f(z) \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \left[\int_0^1 (d \ln f(z) - d \ln f(z + \tau)) - \int_0^\tau (d \ln f(z) - d \ln f(z + 1)) \right] \\
 &= \frac{1}{2\pi i} [2\pi i (A_1 + A_2 z)|_0^1 - 2\pi i B|_0^\tau] \\
 &= A_2.
 \end{aligned}$$

零点之和为

$$\begin{aligned}
 \sum z_i &= \frac{1}{2\pi i} \oint z d \ln f(z) \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \left(\int_0^1 - \int_\tau^{1+\tau} - \int_0^\tau + \int_1^{1+\tau} \right) z d \ln f(z) \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \left[\int_0^1 (z d \ln f(z) - (z + \tau) d \ln f(z + \tau)) \right. \\
 &\quad \left. - \int_0^\tau (z d \ln f(z) - (z + 1) d \ln f(z + 1)) \right] \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \left[\int_0^1 (z d \ln f(z) - (z + \tau) d (\ln f(z) - 2\pi i (A_1 + A_2 z))) \right. \\
 &\quad \left. - \int_0^\tau (z d \ln f(z) - (z + 1) d (\ln f(z) - 2\pi i B)) \right] \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \left[\int_0^1 ((-\tau) d \ln f(z) - (z + \tau)(-2\pi i) d (A_1 + A_2 z)) \right. \\
 &\quad \left. - \int_0^\tau ((-1) d \ln f(z) - (z + 1) d (-2\pi i B)) \right] \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \left[(-\tau) \ln f(z)|_0^1 + \int_0^1 (2\pi i)(z + \tau) A_2 dz + \ln f(z)|_0^\tau \right] \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \left[(-\tau)(-2\pi i B) + 2\pi i A_2 \left(\frac{z^2}{2} + \tau z \right) \Big|_0^1 + \ln f(z)|_0^\tau \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi i} \left[(2\pi i)B\tau + (2\pi i)A_2 \left(\frac{1}{2} + \tau \right) + (-2\pi i)(A_1 + A_2 \cdot 0) \right] \\
&= B\tau + \frac{1}{2}A_2 + A_2\tau - A_1 \\
&= B\tau + \frac{1}{2}A_2 - A_1 \pmod{\Lambda_\tau}.
\end{aligned}$$

1.2 Jacobi θ 函数

Jacobi θ 函数就是以无穷级数给出的准双周期函数的规范化形式. 我们定义 Jacobi θ 函数为

$$\theta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (z, \tau) = \sum_m e^{\pi i(m+a)^2 \tau + 2\pi i(m+a)(z+b)}, \quad (1.2.1)$$

其中, a, b 是指标. 由上面定义可以得到如下定理.

定理二 Jacobi θ 函数满足

$$\theta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (z + \alpha\tau + \beta, \tau) = e^{-2\pi i\alpha(\frac{\alpha\tau}{2} + z + b + \beta)} \theta \begin{bmatrix} a + \alpha \\ b + \beta \end{bmatrix} (z, \tau). \quad (1.2.2)$$

证明如下:

$$\begin{aligned}
&\theta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (z + \alpha\tau + \beta, \tau) \\
&= \sum_m e^{\pi i(m+a)^2 \tau + 2\pi i(m+a)(z + \alpha\tau + \beta + b)} \\
&= \sum_m e^{\pi i[(m+a)^2 + 2\alpha(m+a)]\tau + 2\pi i(m+a)(z + \beta + b)} \\
&= \sum_m e^{\pi i[(m+a+\alpha)^2 - \alpha^2]\tau + 2\pi i(m+a+\alpha-\alpha)(z + \beta + b)} \\
&= e^{-\pi i\alpha^2 \tau - 2\pi i\alpha(z + \beta + b)} \sum_m e^{\pi i[(m+a+\alpha)^2]\tau + 2\pi i(m+a+\alpha)(z + \beta + b)} \\
&= e^{-2\pi i\alpha(\frac{\alpha\tau}{2} + z + b + \beta)} \theta \begin{bmatrix} a + \alpha \\ b + \beta \end{bmatrix} (z, \tau).
\end{aligned}$$

对于整数 n 有

$$\theta \begin{bmatrix} a + n \\ b \end{bmatrix} (z, \tau) = \theta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (z, \tau), \quad (1.2.3)$$

$$\theta \begin{bmatrix} a \\ b + n \end{bmatrix} (z, \tau) = e^{2\pi ian} \theta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (z, \tau). \quad (1.2.4)$$