

钢 筋 混 凝 土 力 学

宋启根 单炳梓 编著
金芷生 朱万福



南 京 工 学 院 出 版 社

内 容 提 要

本书应用现代力学理论和电子计算机技术研究分析钢筋混凝土结构和构件, 综述并介绍了国内外本学科的最新成就, 其中包括编著者近几年来的研究成果。内容有: 混凝土的弹塑性理论; 混凝土在单、双、三轴应力状态下的本构关系和破坏准则; 钢筋与混凝土之间的粘结滑移, 裂缝面剪力传递, 梁裂缝开展机理; 钢筋混凝土结构和构件的线性有限元分析、非线性有限元分析以及若干算例分析。

本书可供土建、水利类专业研究生、大专生学习, 也可作为有关教师、研究人员及工程技术人员的参考书。

钢 筋 混 凝 土 力 学

宋启根 单炳梓 金芷生 朱万福 编著

南京工学院出版社出版

南京四牌楼2号

江苏省新华书店发行 高淳印刷厂印刷

开本787×1092毫米 1/32 印张 7.25 字数 157千

1986年5月第1版 1986年5月第1次印刷

印数 1—8000册

书号: 15409·003 定价: 1.45元

责任编辑 施 恩

目 录

第一章 绪论	1
§ 1-1 研究内容和研究方法	1
§ 1-2 钢筋混凝土力学的发展和现状	4
§ 1-3 内容概要	9
第二章 混凝土塑性分析基础	11
§ 2-1 引言	11
§ 2-2 应力张量及其分解	13
§ 2-3 应力张量的不变量	15
§ 2-4 八面体上的应力及应力强度	20
§ 2-5 应变张量及其分解	22
§ 2-6 应变张量的不变量	24
§ 2-7 八面体上的应变及应变强度	26
§ 2-8 屈服准则	27
§ 2-9 加载和卸载准则	36
§ 2-10 全量理论(变形理论)的弹塑性应力-应变关系	40
§ 2-11 增量理论(流动理论)的弹塑性应力-应变关系	45
参考文献	59
第三章 混凝土的破坏准则及本构关系	60
§ 3-1 引言	60
§ 3-2 单轴应力下的性质	61
§ 3-3 双轴应力下的性质	68
§ 3-4 三轴应力下的性质	90
参考文献	114

第四章 钢筋、粘结及剪力传递·····	116
✓ § 4-1 钢筋的模拟及本构关系·····	116
§ 4-2 粘结作用及其试验研究·····	121
✓ § 4-3 粘结性能的分析模型·····	130
§ 4-4 开裂面剪力传递的试验研究·····	134
✓ § 4-5 剪力传递的理论模型与本构关系·····	140
参考文献·····	148
第五章 钢筋混凝土结构和构件的线性有限元	
分析·····	150
§ 5-1 引言·····	150
§ 5-2 有限元分析模型·····	151
§ 5-3 三角形单元刚度矩阵·····	153
§ 5-4 线形单元刚度矩阵·····	158
§ 5-5 连结单元刚度矩阵·····	161
§ 5-6 线性分析步骤及算例分析·····	166
参考文献·····	179
第六章 钢筋混凝土结构和构件的非线性有限	
元分析·····	180
§ 6-1 非线性问题的基本解法·····	180
§ 6-2 钢筋混凝土结构的非线性特点·····	186
✓ § 6-3 裂缝产生和开展的模拟·····	190
§ 6-4 非线性分析步骤·····	202
§ 6-5 非线性算例分析·····	208
参考文献·····	225

第一章 绪 论

§ 1 - 1 研究内容和研究方法

钢筋混凝土是一种广泛使用的建筑材料。长期以来，人们采用基于大量试验数据的经验公式，对钢筋混凝土构件和结构进行设计计算，并对其性能作了大量的研究工作。由于钢筋混凝土力学性能的复杂性，试验和量测手段的局限性，无法在试验中获得试件的全部结构性能。因此，就某一特定结构所得到的试验结果和经验公式，很难加以推广。随着科学技术的迅速发展，要求对钢筋混凝土结构的性能有更深入的了解，传统的试验研究方法就显得越来越不能适应。况且对于海洋平台、原子反应炉等新型结构，若要用传统的试验研究方法来获得合理的设计则几乎是无法想象的。

与上述传统方法不同，钢筋混凝土力学从更抽象和更一般的角度来研究钢筋混凝土结构和构件。它把混凝土和钢筋视为连续体，用连续体力学结合现代计算方法的方法来研究结构的性能。所研究的问题不再按具体结构形式如矩形梁、T 梁或柱等来划分，而是象弹性力学和塑性力学那样按平面问题和空间问题等来划分。所得的研究成果也不再是某一特定结构形式的一些指定的物理量，而是在一次计算中将得到结构或构件中任一点的应力、应变和位移，从而获得结构或构件的强度、刚度和抗裂度的全部计算结果。由于钢筋混凝土构件带着大尺寸裂缝工作，混凝土的力学性能、混凝土与钢筋

间相互作用等都非常复杂，因而，钢筋混凝土力学的研究内容和方法要比通常的弹性或塑性力学更为丰富。

例如，图 1-1 所示的两点受荷的钢筋混凝土简支梁的实际工作情况是：（1）当荷载很小时混凝土未开裂，梁的工作实质上 and 弹性构件相同。（2）随着荷载增加，首先在纯弯段(bc 段)内产生弯曲裂缝并导致应力重分布，钢筋应力突增，钢筋与混凝土之间逐渐出现相对滑移。（3）弯曲裂缝扩展，其数量和长度均增加，并出现斜裂缝。（4）荷载增加至一定值时，如梁的抗剪强度较高，则梁将因主钢筋屈服或受压区的混凝土压碎而破坏；如梁的抗剪强度较低，则由于对角斜裂缝逐步向受荷载点扩展，梁最后在复合应力状态下产生所谓“剪·压”破坏。

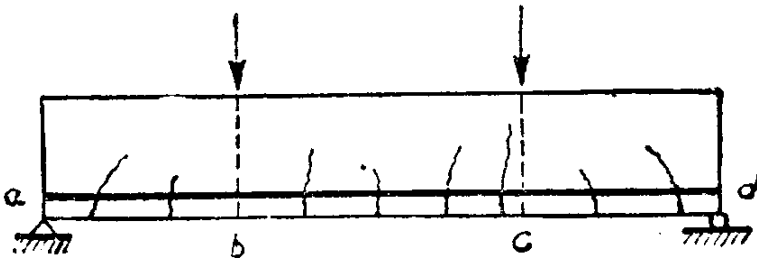


图1-1 简支梁

按照传统的研究方法，上述梁的问题被分为纯弯问题和抗剪问题，分别处理如下：

对于纯弯问题，由于在使用荷载下梁已出现裂缝，传统方法假定整个受拉区的混凝土不再承担任何拉应力，只承受按某一假定规律分布的压应力。虽然这一方法能得出满足设计精度要求的混凝土和钢筋的应力值，但不能求得梁的真正

应力分布。对于梁的挠度，按照上述假定是求不出足够准确的结果的，传统上只能重新根据大量试验数据拟合出经验计算公式。而且，用于矩形截面梁的公式并不适用于T形梁。而为了计算梁的裂缝分布和裂缝宽度，传统方法又得根据大量试验数据制定另一套经验公式。

梁的抗剪问题远比纯弯问题复杂。实践说明，梁的抗剪强度来自未开裂的混凝土、主钢筋的梢合作用，骨料咬合和腹筋等多种抗力。传统计算方法并不分别考虑这些因素，而只是用曲线拟合试验数据的方法得出经验计算公式。由于问题的复杂性，过去国内外虽然已就这一问题作过千百个试验研究，但仍未得到足够合理的计算方法。

按照钢筋混凝土力学的研究方法，图 1-1 所示梁的计算可以视为平面问题的一个特例。抗弯、抗剪强度及刚度、抗裂度等问题可以用统一的计算方法在一个计算过程中加以解决。

由此可见，钢筋混凝土力学的研究内容是：

1. 在合理地考虑混凝土的开裂、材料的非线性、钢筋与混凝土间的相互作用以及以往被略去或处理得很粗糙的其他因素的基础上，提供一个一般性的分析方法。用这一方法能根据已定的混凝土和钢筋的基本力学性能对结构或构件的整个工作状态作出全过程的计算。

2. 对于常用的结构和构件，对其中重要参数的影响作系统的研究，从而改进现有的设计计算方法。

3. 对一些受静载或动载的新型复杂结构，如海洋平台及核反应炉等结构作出合理的计算。这些结构是无法用传统方法来正确计算设计的。

4. 对在长期荷载或复杂环境下工作的结构，合理地考虑混凝土的收缩和徐变等时间效应的影响并作出准确的计算。

与上述研究内容相适应，钢筋混凝土力学的研究方法将是：

1. 进行必要的试验研究，对诸如材料力学性能、钢筋与混凝土的相互作用及裂缝的影响等主要因素取得更完整的试验数据，并对计算结果作出试验验证。当然，这些试验研究和过去不同，应当是典型的和更带基本性的。大型试验将大为减少。

2. 根据这些试验研究结果，制定相应的力学分析模型。这些模型应确切反映实际情况和便于应用。

3. 利用这些分析模型，将现代力学的分析方法，主要是有限元法的研究成果用于钢筋混凝土结构和构件的分析。

§ 1-2 钢筋混凝土力学的发展和现状

自从Ngo和Scordelis于1967年对钢筋混凝土梁作出有限元分析以来，钢筋混凝土力学便逐渐发展成为一门象土力学、岩石力学那样的新学科分支，并得到了迅速的发展。

一、钢筋混凝土构件的有限元分析

最早的研究课题是作为平面问题的梁的线性有限元分析。在分析中预先指定弯曲裂缝的位置（图1-2a），将混凝土及钢筋离散为二维有限单元，钢筋则用一维单元代表（图1-2c）。分析中还引入沿 h 及 v 方向具有两个自由度的连结单

元（双向键）（图1-2b），适当调整连结单元的刚度 k_h 及 k_v ，即可用以模拟钢筋与混凝土之间的粘结-滑移（图1-2a）和裂缝处的骨料咬合等作用（图1-2a）。主钢筋的梢合作用也可以类似地模拟。为了避免裂缝预先指定的缺点，也可以根据混凝土的开裂准则和分离结点来考虑裂缝的形成和逐步扩展（图1-2d）。这就是所谓“分离裂缝”的分析模型。

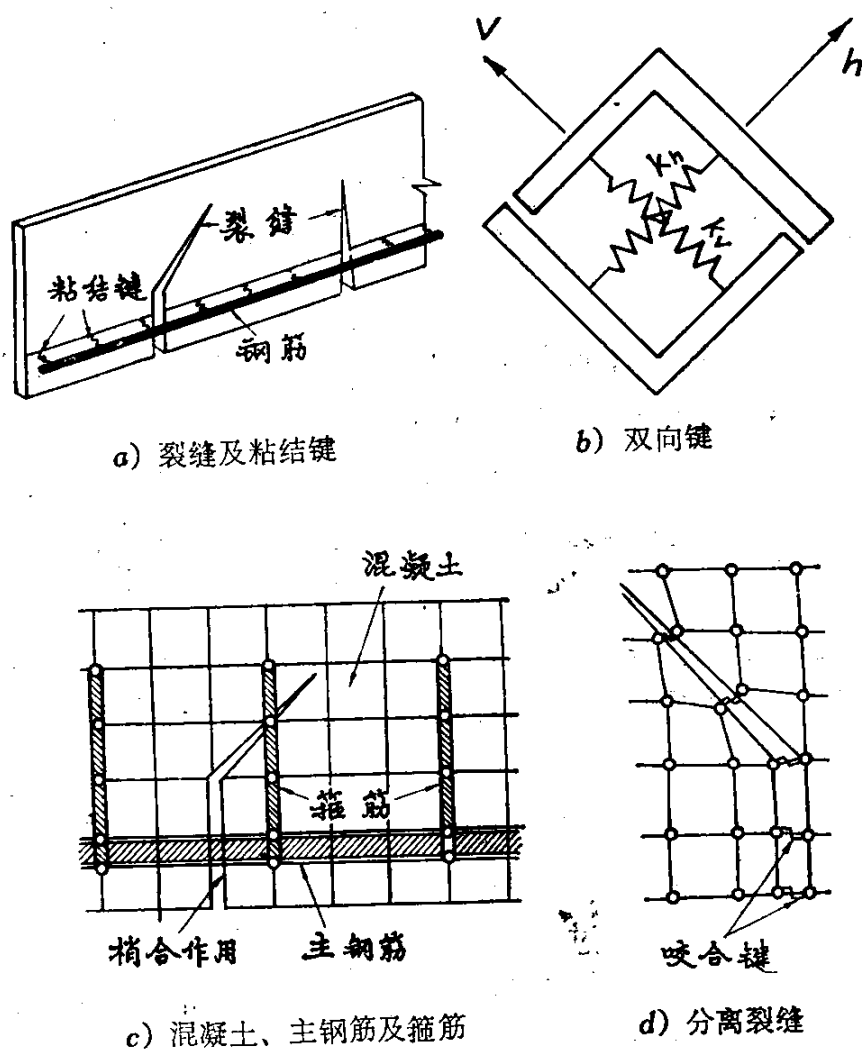


图1-2 钢筋混凝土梁

上述最早的研究工作为钢筋混凝土构件的有限元分析确立了基本指导思想。然而，按照“分离裂缝”的方法，必须随着裂缝扩展不断改变单元结点数和网格，这是很烦琐的。因此，在其后的工作中大都转而采用“分散裂缝”方法。在此，假定裂缝分布在整个单元内，分散钢筋的作用也可以与混凝土合并组成组合的单元刚度。在这一方法中，集中配置的钢筋仍然可以用专门的钢筋单元代表，也可以加入粘结键等等。

对于平面问题，除二维单元外，在梁和刚架等结构中也可以采用专门的一维单元来代表混凝土。有人采用这些单元来研究混凝土构件的徐变、收缩及荷载历史等时间效应的影响。

轴对称问题与平面问题非常相似，在同一时期它的有限元分析取得了与平面问题相应的发展。

钢筋混凝土板的弯曲问题的有限元分析从1970年开始。分析中采用分布裂缝方法并假定混凝土与钢筋刚性连接（即完全粘结），裂缝扩展的影响用逐步改变单元的抗弯刚度来考虑。也有人采用层状的板单元，用层的刚度变化来模拟裂缝的扩展。与此同时，时间效应和预应力对板工作的影响也有所研究。

壳体有限元分析的发展情况与板的弯曲问题大体类似，但由于壳体内薄膜作用与弯曲作用相互影响，问题比板复杂得多。在分析中采用过扁壳单元和层状单元。

由于对混凝土在三轴应力状态下的性能知之甚少，故钢筋混凝土的三维问题亦研究不多。

由此可见，在60年代末至70年代初短短几年间，由于将

有限元分析的一般方法大量引入钢筋混凝土结构和构件的分析，使得这些结构的有限元分析在分析方法上已相当成熟。然而，钢筋混凝土结构的力学分析至今仍远未能成为成熟的学科。这是由于：

1. 对于钢筋和混凝土的基本力学性能，如混凝土的本构关系，裂缝扩展机理，钢筋与混凝土之间的相互作用等了解得还远远不够。钢筋混凝土梁的抗剪问题就是一个最明显的例子。从计算角度看这一问题是比较简单的，但由于涉及很多如图1-2所示的基本力学性能问题尚未解决，抗剪问题至今还未能获得足够准确的有限元分析。

2. 由于钢筋混凝土的力学性能非常复杂，即使使用大型计算机，计算这一高度复杂的课题仍然非常费事。为了减少计算工作量，人们在分析中采用大单元或子结构。例如，对框架-剪力墙体系，可以设想把整个梁或柱视为一个弹性单元，将这些构件原有的非线性性能反映在连结单元或非线性弹簧中；每块墙体视为二维节间单元，与结构的其他部分用位于结点处的非线性连结单元联接。这些连结单元的应力-应变关系则可用细分的有限元分析确定。

二、钢筋混凝土的基本力学性能

主要包括：钢筋及混凝土的本构关系，混凝土中裂缝的形成及扩展机理，钢筋与混凝土之间的相互作用，骨料咬合及主钢筋的梢合作用，混凝土的徐变、收缩等时间效应。

1. 混凝土的本构关系

Saenz提出的混凝土在单轴压缩下的应力-应变关系式（1964年）和Kupfer等获得的混凝土在双轴应力状态下的

试验研究成果（1969年）是这一问题的基本工作。推广和利用这些成果，目前已提出了一些能用于双轴应力状态下的本构关系。然而，至今还没有哪一种被公认为是最好的。至于应力-应变关系的下降段、反复和动力荷载的影响等，则研究还很不够。

对于三轴应力状态，虽然近年来人们提出过不少本构关系，但由于混凝土在三轴应力下的试验研究很困难，可资应用的试验结果还很不够，这些本构关系还有待进一步验证。而且，有些本构关系看来虽较合理，但参数太多，应用过于复杂。因此，混凝土在三轴应力下的本构关系仍然是一个很不成熟而又亟待解决的问题。

2. 混凝土中裂缝的形成及扩展

混凝土的逐步开裂是钢筋混凝土构件的一个最主要非线性因素。目前所采用的最大主拉应力或最大主拉应变的开裂判断准则，在理论上和应用上还不够完善，以致产生裂缝开展的“客观性”问题。近年来有人试图将已有的断裂力学研究成果推广到钢筋混凝土以解决裂缝问题。这一想法很有价值。然而，断裂力学尽管已成功地用于金属等材料，但是否适用于一些常用的混凝土构件还是一个问题。而且从断裂力学出发所制定的开裂模型，其应用也必然非常复杂。

3. 钢筋与混凝土的相互作用（粘结-滑移）

这是一个非常复杂的问题。由于试验技术的困难，以往所得的试验结果是很分散的。目前对粘结-滑移的实际机理还很不清楚，今后应首先改进试验研究技术，以期确切了解问题的机理，从而制定合理的分析模型。此外，虽然粘结-滑移关系对裂缝开展有显著影响已得到公认，但对其他方面影

响程度的认识尚不够明确。

4. 骨料咬合及主钢筋的梢合作用

这一问题的研究较以上几个更不成熟，主要是试验技术上的困难和影响因素较多。

5. 时间效应

混凝土的徐变和收缩性能的研究虽然开展较早，但也还不成熟。主要问题在于一些有关材料参数的定值和反映徐变和收缩的本构关系的形式。

我国在钢筋混凝土力学方面的研究工作大体于1980年开始。虽然起步较晚，由于学习和吸取了国际上的先进成果，在短短几年内已取得了可喜的成绩。已有人对包括三维问题在内的钢筋混凝土构件作出过一些有限元分析；对混凝土的本构关系也作出了在试验和分析模型上的若干研究。在钢筋与混凝土相互作用这一问题上，我国已作出了一批有创见的和带有我国特色的试验和理论研究。此外，在裂缝开展和其他问题上也有人作过研究。本书编入了已在国内外公开发表的论文的某些内容，以飨读者。

我国钢材和木材比较缺乏，最大限度地采用着钢筋混凝土结构，这将极大地推动钢筋混凝土力学研究工作并为之提供很有利的客观条件。可以预言，随着四化建设的迅猛发展，钢筋混凝土力学这一新兴学科将在我国得到迅速发展。

§ 1—3 内 容 概 要

本书共分六章。除本章外，其他各章内容简述如下：

第二章讨论混凝土的弹塑性理论。简要介绍塑性力学中

的一些基本理论，为研究混凝土的本构关系打下必要的理论基础。

第三章研究混凝土的破坏准则和本构关系。结合典型的试验结果阐述混凝土在单轴、双轴及三轴应力状态下的本构关系和破坏准则。详细论证几种常用的双轴应力下的本构关系，对典型的三轴应力状态下的本构关系也将予以适当的讨论。

第四章研究钢筋与混凝土之间的相互作用，裂缝面剪力传递等问题。着重讨论试验研究、力学机理和分析模型等。并以相当篇幅介绍我国所取得的研究成果。

第五章介绍钢筋混凝土结构和构件的有限元线性分析。内容包括有限元分析模型、刚度矩阵的形成、分析步骤及算例。

第六章讨论钢筋混凝土结构和构件的有限元非线性问题的解法。包括裂缝开展的分析方法，梁的抗剪性能分析，深梁和粘结试件等在内的有限元算例分析。

限于篇幅，本书中提到的一些其它问题不拟专门分章论述，必要时将插入各章内作扼要说明。此外，从国外文献中引来的资料，仍保持了原著的计量单位。

第二章 混凝土塑性分析基础

§2-1 引言

有限元法和电子计算机的迅速发展,极大地推动着人们对钢筋混凝土结构和构件的非线性性能的研究。不论是梁还是其它钢筋混凝土结构,都存在着图2-1所示的钢筋混凝土荷载-位移非线性关系。一般可区分为三个阶段,即未开裂前的线弹性阶段,开裂阶段和塑性阶段。引起钢筋混凝土结构非线性性质的主要原因是混凝土的开裂以及钢筋和受压混凝土的塑性。此外,钢筋和混凝土之间的粘结滑移,开裂混凝土的骨料咬合,钢筋的销合作用,以及混凝土的收缩、徐变等也导致了钢筋混凝土的非线性反应。

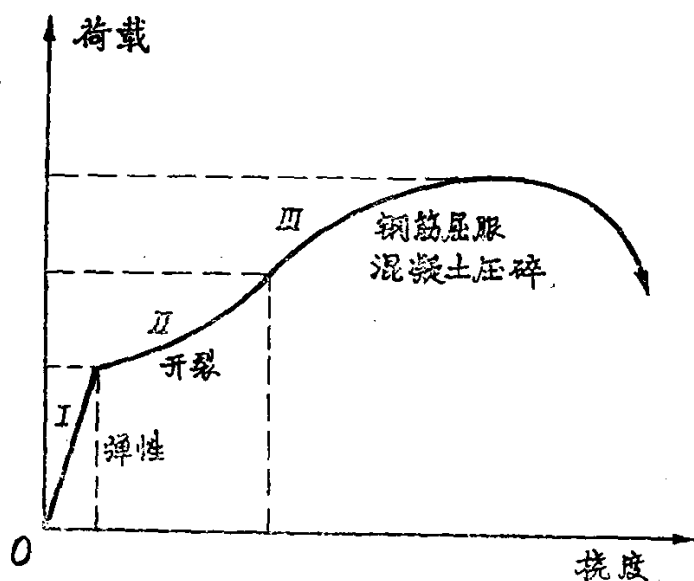


图2-1 钢筋混凝土构件的典型荷载-位移曲线

要进行钢筋混凝土非线性性能的研究，弄清混凝土的力学性质就显得异常重要。虽然混凝土的受力特性极为复杂，但近年来国内外不少学者通过在短期荷载下对混凝土进行微观观察和运用数理统计的方法，已经提供了许多关于混凝土的应力-应变曲线。图2-2所示为混凝土在单向拉伸和压缩下的典型曲线。拉伸时混凝土呈弹-脆性，强度极低。对单向受压，在A点以下应力应变几乎呈线性关系，并不产生不可恢复的塑性变形。随着载荷的增加，混凝土中的初始微裂缝便缓慢地发展，形成了以D点为末端的塑性流动区。在AD范围内如进行卸载，则弹性应变 ϵ^e 得到恢复而塑性应变 ϵ^p 仍有残留。

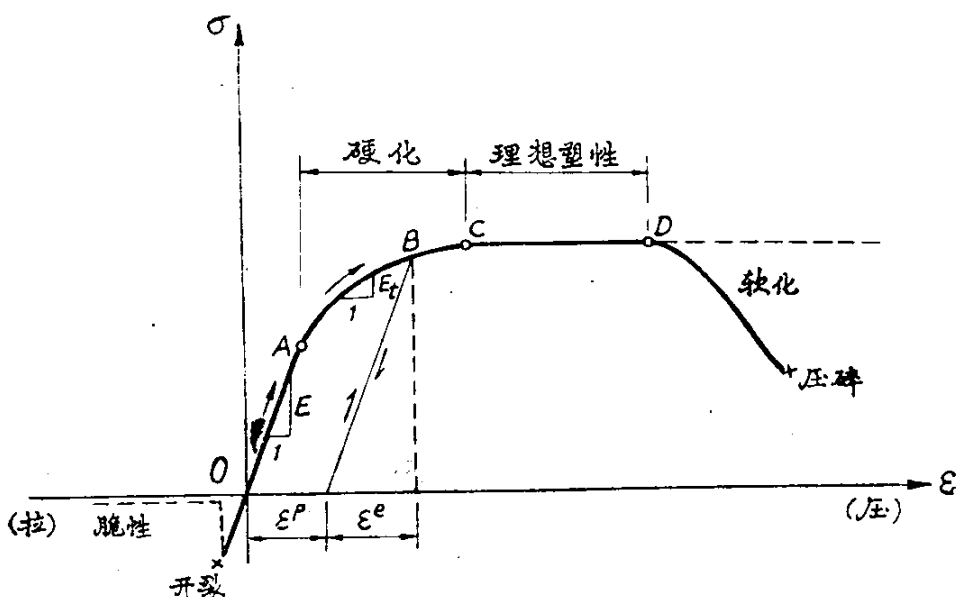


图2-2 混凝土单向受力的应力-应变曲线

目前通行的钢筋混凝土非线性研究，往往把单向受压时的混凝土简化为图2-3所示的理想弹塑性材料，把受拉或受压时的钢筋也同样看待。

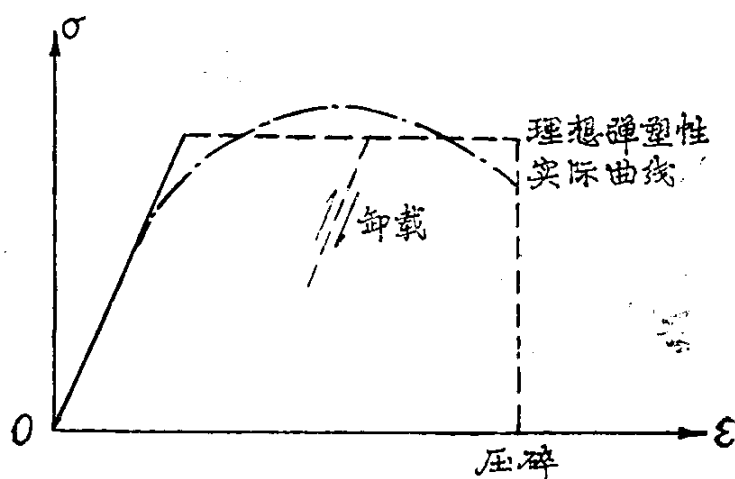


图2-3 混凝土受压时的理想弹塑性

§ 2 - 2 应力张量及其分解

在空间问题中，一点的应力状态可由 σ_x 、 σ_y 、 σ_z 、 τ_{xy} 、 τ_{yx} 、 τ_{yz} 、 τ_{zy} 、 τ_{zx} 、 τ_{xz} 这九个应力分量表示。这九个应力分量的大小不仅与该点的受力状态有关，而且还决定于 x 、 y 、 z 坐标轴方向的选择，由此引出了应力张量的概念。所谓张量，即某些依赖于坐标轴方向选择的量，随坐标的方向变换而以某种指定的形式作变换，则这些量总称为张量。物体内一点的各应力分量具有这样的性质，所以九个应力分量的总体称为应力张量。通常写成下面的形式

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \quad (2-1)$$