

高等学校教材

结构分析与 绘图微电脑程序

合肥工业大学 沈鹏程 苏甘龙 编



水利电力出版社

绘图软件，开发了参数绘图程序，该程序可直接在IBM-PC/XT及兼容机上运行，能够绘制出钢筋混凝土梁、柱及基础的施工图。以上各章中，均有若干实例，以供参考。

本书中的一部分内容曾在1986年7月，由国家教委结构力学课程指导小组委托清华大学土木系与合肥工业大学计算中心联合举办的“计算机在结构力学中的应用”讲习班上作为讲义使用过，收到良好的效果。

本书第一、第四、第五及第七章由沈鹏程编写；第二、第三及第六章由苏甘龙编写。在本书的编写过程中，李永霞同志设计了本书全部底图；范文莹同志，研究生王建国、黄大德等参加了一些程序的编写及调试工作，在此一并致谢。

清华大学龙驭球教授审阅了本书初稿，提出了许多宝贵意见，在此谨致以诚挚的谢意。

由于作者水平所限，书中难免存在缺点与不妥之处，请读者批评指正。

编著者

1988. 10

内 容 简 介

本书叙述了用微电脑进行结构分析与绘图的程序设计及应用。全书共七章。内容包括有限元法基础；桁架、刚架与多层多跨框架分析程序的设计；结构内力图的绘图程序的设计；钢筋混凝土框架施工图的绘图程序的设计。书中，编入较多的 BASIC 与 FORTRAN 程序，其中一些程序可在袖珍微电脑 PC-1500、CE-158，彩色绘图机 CE-515P、SR6602 上直接运行；另一些程序可在 IBM-PC/XT 及兼容机上直接运行。书中还介绍了 AUTOCAD 绘图软件在绘制钢筋混凝土梁、柱及基础施工图上的应用。

本书可作高等工科院校的水利、土木建筑、工程力学等专业的本科生、大專生的教学用书，亦可作有关工程技术人员的学习用书。

高 等 学 校 教 材

结构分析与绘图微电脑程序

合肥工业大学 沈鹏程 苏甘龙 编

水利电力出版社出版

(北京三里河路6号)

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

水利电力出版社印刷厂印刷

787×1092毫米 16开本 19印张 433千字

1989年11月第一版 1989年11月北京第一次印刷

印数0001—2610册

ISBN7-120-00766-1/TV·273

定价 3.80元

前 言

20世纪60年代,随着有限元法的诞生和发展,以及计算机的推广应用,使结构分析的方法发生了巨大变革。有限元法是一种有效的数值分析方法,对于形状复杂、非均质材料和承受复杂荷载的结构均能进行分析。随着有限元法的进展,有限元软件也不断更新和完善,国内外已有一批大型结构分析的有限元软件,广泛应用于工程实际。例如,国内已有一些单位引进了美国E·L·威尔逊^[4]等研制的SAP5程序系统,并装置在各种大中型计算机上,发挥了较好的经济效益;我国钟万勰^[5]等研制的结构分析通用程序系统JIGFEX亦已广泛用于土木建筑、机械制造、航空技术及海洋工程等领域中,已取得了明显的经济效益。近几年来,微电脑发展迅速,功能不断提高,且价廉物美,易于普及推广。过去,一般认为微电脑不能用于大型结构分析的科学计算,这主要是受到微电脑内存的限制。为了解决这个问题,我们可以从两个方面来考虑:一是采用一些特殊的数值分析方法,例如有限条法、样条有限元法、样条有限条法等半解析半数值方法来分析规则区域的结构计算问题,还有如加权残数法、边界元法等,上述这些方法未知量少,程序容易编制,适合在微电脑上求解工程实际问题;二是研究如何对程序结构进行数据管理,尽可能节省内存,使微电脑也能用于大中型结构分析。例如,SAP84微电脑通用结构分析程序、DDJ微电脑通用结构分析程序等,可以说明微型电脑在结构分析方面的典型应用。

这几年来,在国内许多高等院校中,有不少专业的高年级学生修读结构分析的程序设计课程,业已出版了有关书籍。但是,国内尚无同时包含有结构分析与绘图的微型电脑程序设计的书籍。为了使计算机输出成果的直观与形象化,便于工程设计应用,我们编写了这本教材,作为高等院校本科与专科学生的选修课之用。

本书尽可能通俗易懂、由浅入深地介绍有限元法、结构分析程序和绘图程序。本书共分七章。第一章,有限元法基础,介绍有限元法的基本知识,及其在桁架、刚架、连续梁及拱结构中的应用,并为后六章编写电脑程序提供基本算式。第二章,平面桁架分析微电脑程序,其中包括程序框图,有关程序段及其功能,编有两种可分别在PC-1500与IBM-PC/XT或兼容机上运行的BASIC和FORTRAN源程序。第三章,平面刚架分析微电脑程序,本章也编有两种分别可在PC-1500与IBM-PC机上运行的BASIC和FORTRAN源程序,对有关程序段亦作了较详细的说明。第四章,多层多跨框架分析微电脑程序,其中包括有在IBM-PC微型电脑直接运行的BASIC和FORTRAN源程序。第五章,多层多跨框架分析的子结构法微电脑程序。第六章,结构内力绘图微电脑程序,其中包括有关程序段及其功能说明,各种典型结构简图与内力图的绘制,编写有可直接在PC-1500、CE-158、CE-515P及SR6602彩色绘图机上运行的BASIC源程序。第七章,钢筋混凝土平面框架的微电脑绘图程序,其中包括分别绘制梁、柱及基础配筋图的BASIC源程序,该程序可直接在PC-1500、CE-158、CE-515P、SR6602彩色绘图机上运行;其次,应用AUTOCAD

目 录

前 言

第一章 有限元法基础	1
第一节 结构的单元分析——单元刚度方程	1
第二节 结构的总体分析——总刚度方程	9
第三节 单元等效结点荷载	25
第四节 具有斜支座情况下的边界条件的处理	33
第五节 混合结构、温度变化、支座沉陷等问题的处理	39
第六节 多层多跨框架分析的有限元法	46
第七节 多层多跨框架分析的子结构法	51
第二章 平面桁架分析微电脑程序	64
第一节 程序结构	65
第二节 变量、数组的安排及主程序	66
第三节 数据的输入和输出, 子程序SUB.1	69
第四节 荷载列阵的形成, 子程序SUB.2	70
第五节 坐标变换, 单刚的形成, 子程序SUB.7、SUB.8、SUB.9	71
第六节 总刚阵的组装, 子程序SUB.3	73
第七节 支承条件的引入, 子程序SUB.4	74
第八节 总刚度方程的求解, 子程序SUB.5	75
第九节 内力计算, 子程序SUB.6	76
第十节 BASIC 源程序及其使用说明	77
第十一节 数字算例	81
第十二节 FORTRAN 源程序及其使用说明	86
第三章 平面刚架分析微电脑程序	96
第一节 程序结构	96
第二节 变量及数组的安排	97
第三节 主程序、子程序SUB.1	101
第四节 荷载列阵的形成, 子程序SUB.2、SUB.3、SUB.8、SUB.9、SUB.10	102
第五节 总刚阵的形成, 子程序SUB.4、SUB.11、SUB.12	105
第六节 位移的求解, 子程序SUB.5、SUB.6	106
第七节 内力计算, 子程序SUB.7	107
第八节 BASIC 源程序及其使用说明	109
第九节 数字算例	121
第十节 FORTRAN 源程序及其使用说明	126
第四章 多层多跨框架分析微电脑程序	138
第一节 多层多跨框架中三种单元形式	138
第二节 总刚阵的存储技巧	139
第三节 程序框图	141
第四节 BASIC 源程序及其使用说明	146

第五节 FORTRAN 源程序及其使用说明..... 159

第五章 多层多跨框架分析的子结构法微电脑程序..... 171

第一节 框图..... 172

第二节 多层多跨框架分析的子结构法 FORTRAN 微电脑程序及其使用说明 178

第三节 数值算例..... 191

第六章 结构内力绘图微电脑程序..... 201

第一节 夏普微电脑 (PC-1500) 的绘图功能 201

第二节 平面桁架计算简图与内力绘图程序设计要点..... 204

第三节 平面刚架计算简图与内力绘图程序设计要点..... 210

第四节 结构计算简图与内力图绘制算例..... 226

第五节 桁架分析与绘图 BASIC 程序全文 242

第六节 刚架分析与绘图 BASIC 程序全文 249

第七章 钢筋混凝土平面框架的微电脑绘图程序..... 262

第一节 钢筋混凝土框架梁的绘图程序..... 262

第二节 钢筋混凝土框架柱的绘图程序..... 276

第三节 钢筋混凝土基础的绘图程序..... 283

第四节 应用 AUTOCAD 自动绘制钢筋混凝土框架施工图..... 292

参考文献..... 298



第一章 有限元法基础

有限元法是结构分析中的一种通用的数值解法, 由于它的解算过程较容易编制成电算程序, 能实现自动计算, 所以具有效率高、通用性强的优点, 因而得到广泛应用。本章, 应用最小总势能原理来导出杆系结构有限元法的基本方程, 如各种单元刚度矩阵方程 (以下简称单刚) 和结构总刚度矩阵方程 (以下简称总刚)。并通过算例来阐明有限元法在各种杆系结构中的具体应用, 并为后几章编制微电脑程序提供基本公式。

第一节 结构的单元分析——单元刚度方程

在工程结构中, 有一类杆系结构如桁架、刚架、连续梁和拱等, 属于一种自然的离散型结构。如图1-1(a)所示的桁架, 有8个结点和13根杆所组成, 其中杆就是桁架的单元。我们根据静力平衡条件, 变形协调性的几何条件及应变与应力间的物理条件来推导出单元结点力与其结点位移间的关系, 即单元刚度矩阵方程, 这一过程称为单元分析。

一、杆单元方程

假设在桁架中, 任取一个单元 e , 单元两个端点 i, j 称单元结点 i 和结点 j , 其单元坐标系 (或局部坐标系) 为 x_1y 。 x_1u_1 分别表示 i 结点处的结点力与结点位移; x_1u_j 分别表示 j 结点处的结点力与结点位移。

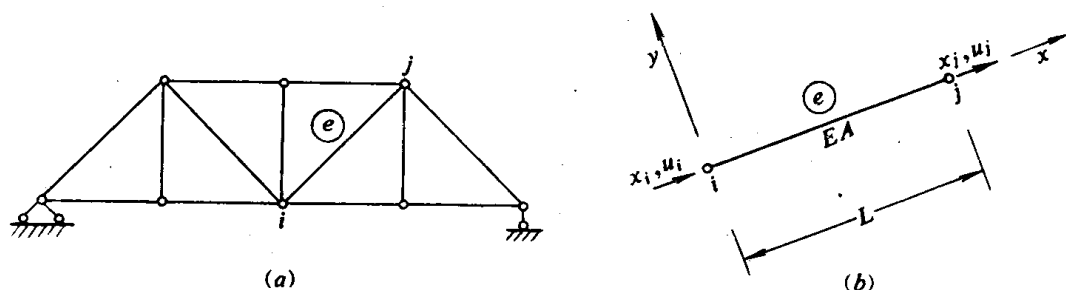


图 1-1

下面, 我们通过几何、物理、平衡三方面的条件来建立单元刚度矩阵方程。

1. 几何条件 假设杆元的位移函数 (或称局部函数) 为线性函数

$$u = c_1 + c_2x \tag{1}$$

用矩阵表示式 (1) 为

$$u = [1 \ x] \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{N}(x) \mathbf{C} \tag{2}$$

式中
$$\mathbf{N}(x) = \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\mathbf{C} = [C_1 \ C_2]^T$$

由式 (1), 当 $x = 0$ $u_i = C_1$

当 $x = L$ $u_j = C_1 + C_2 L$

将上面两式用矩阵表达, 有

$$\delta^e = \mathbf{b} \mathbf{c} \quad (4)$$

式中
$$\delta^e = [u_i \ u_j]^T \quad (5)$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & L \end{bmatrix} \quad (6)$$

由式 (2)、(4), 得

$$u = \mathbf{N}(x) \mathbf{b}^{-1} \delta^e = \mathbf{N} \delta^e \quad (7)$$

式中
$$\mathbf{N} = \mathbf{N}(x) \mathbf{b}^{-1} \quad (8)$$

现将式 (3)、(6) 代入式 (8), 得

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \quad (9)$$

$\mathbf{N}$ 称为杆元的形函数, 或称插值函数。

杆的应变分量

$$\epsilon = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \delta^e = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \delta^e$$

或写成
$$\epsilon = \mathbf{B} \delta^e \quad (10)$$

式中
$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \quad (11)$$

2. 物理条件

$$\sigma = E \epsilon = E \mathbf{B} \delta^e \quad (12)$$

3. 平衡条件 由于最小总势能原理等价于平衡条件。因此, 可应用最小总势能原理导出杆元刚度矩阵方程。

杆元总势能为

$$\pi_p = \int_V \frac{1}{2} \sigma^T \epsilon dv - \delta^{eT} \mathbf{F}^e \quad (13)$$

将 (10)、(12) 两式代入式 (13), 有

$$\pi_p = \int_0^L \frac{1}{2} A E \delta^{eT} \mathbf{B}^T \mathbf{B} \delta^e dx - \delta^{eT} \mathbf{F}^e \quad (14)$$

由总势能极小值, 得

$$\frac{\partial \pi_p}{\partial \delta^e} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{K}^e \delta^e = \mathbf{F}^e \quad (1-1)$$

式(1-1) 称杆元刚度矩阵方程。

其中, $\mathbf{K}^e$ 称杆元刚度矩阵,

$$\mathbf{K}^e = \int_0^L \mathbf{B}^T \mathbf{A} E \mathbf{B} dx \quad (1-2)$$

若将式 (11) 代入式 (1-2) 中, 可得杆元刚度矩阵的具体形式

$$\mathbf{K}^e = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (1-3)$$

在式 (1-1) 刚度方程中, $\delta^e = [u_i \ u_j]^T$ 为单元结点位移向量, $\mathbf{F}^e = [x_i \ x_j]^T$ 为单元结点力向量。

二、梁单元方程

取图1-2(a)中的梁单元, 单元坐标系为 xiy , 如图1-2(b)所示。

1. 几何条件 假设梁的位移函数为

$$v = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3 \quad (1)$$

$$\theta = \frac{dv}{dx} = c_2 + 2c_3 x + 3c_4 x^2 \quad (2)$$

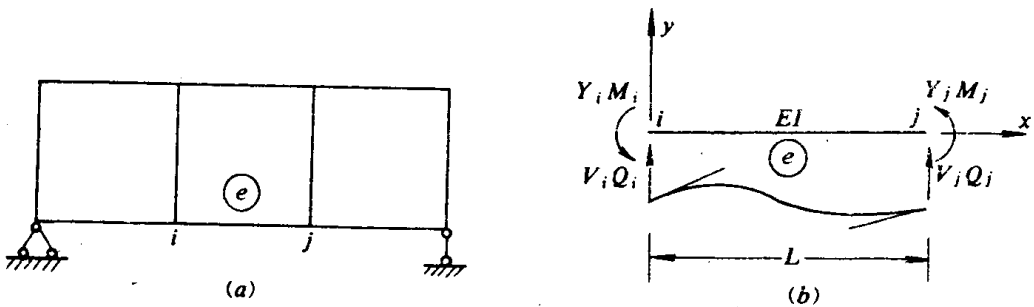


图 1-2

$$\text{当 } x = 0, \quad v_i = c_1$$

$$\theta_i = c_2$$

$$\text{当 } x = L, \quad v_j = c_1 + c_2 L + c_3 L^2 + c_4 L^3$$

$$\theta_j = c_2 + 2c_3 L + 3c_4 L^2$$

将上述式子用矩阵形式表达, 有

$$\begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{Bmatrix}$$

或缩写为

$$\delta^e = \mathbf{b} \mathbf{c} \quad (3)$$

式中 $\delta^e = [V_i \ \theta_i \ V_j \ \theta_j]^T$ 为梁单元结点位移向量。

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\mathbf{C} = [c_1 \ c_2 \ c_3 \ c_4]^T \quad (5)$$

由式 (3) 解得常量为

$$\mathbf{C} = \mathbf{b}^{-1} \delta^e \quad (6)$$

将式 (1) 中的 v 写成矩阵形式, 有

$$v = [1 \ x \ x^2 \ x^3] \mathbf{C} \quad (7)$$

现将式 (6) 代入 (7), 得

$$\begin{aligned} v &= [1 \ x \ x^2 \ x^3] \mathbf{b}^{-1} \delta^e \\ &= \mathbf{N} \delta^e \end{aligned} \quad (1-4)$$

式中

$$\mathbf{N} = [1 \ x \ x^2 \ x^3] \mathbf{b}^{-1} \quad (8)$$

式(1-4)中, $\mathbf{N}$ 称梁单元的形函数, 或插值函数或局部函数。

由式 (4) 求逆, 得

$$\mathbf{b}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{L^2} & -\frac{2}{L} & \frac{3}{L^2} & -\frac{1}{L} \\ \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} & -\frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix} \quad (9)$$

这样, 由式 (8) 求得梁单元形函数的具体形式为

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= [1 \ x \ x^2 \ x^3] \mathbf{b}^{-1} \\ &= \left[\left(1 - 3\frac{x^2}{L^2} + 2\frac{x^3}{L^3}\right) \left(x - 2\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}\right) \left(3\frac{x^2}{L^2} - 2\frac{x^3}{L^3}\right) \left(-\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}\right) \right] \end{aligned} \quad (1-5)$$

由材料力学理论可知

$$\epsilon = -\frac{y}{R} = -\frac{d^2 v}{dx^2} y \quad \left(\text{因为 } \frac{1}{R} = \frac{d^2 V}{dx^2} \text{ 称曲率} \right)$$

将式(1-4)代入上式, 有

$$\epsilon = -\frac{d^2 \mathbf{N}}{dx^2} y \delta^e = \mathbf{B} y \delta^e \quad (10)$$

$$\text{其中, } \mathbf{B} = -\frac{d^2 \mathbf{N}}{dx^2} = \left[\left(\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3}\right) \left(\frac{4}{L} - \frac{6x}{L^2}\right) \left(-\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3}\right) \left(\frac{2}{L} - \frac{6x}{L^2}\right) \right] \quad (1-6)$$

2. 物理条件

$$\sigma = E \epsilon = E \mathbf{B} y \delta^e \quad (1-7)$$

3. 平衡条件 梁单元的总势能

$$\pi_p = \int_V \frac{1}{2} \sigma^T \epsilon dv - \delta^{eT} \mathbf{F}^e$$

现将 (10)、(1-7) 两式代入上式, 就有

$$\pi_p = \int_V \frac{1}{2} (E \mathbf{B} y \delta^e)^T (\mathbf{B} y \delta^e) dV - \delta^{eT} \mathbf{F}^e$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^L \delta^{eT} \mathbf{B}^T E I \mathbf{B} \delta^e dx - \delta^{eT} \mathbf{F}^e$$

由最小总势能原理

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi_p}{\partial \delta^e} &= 0 \quad \text{得} \\ \mathbf{K}^e \delta^e &= \mathbf{F}^e \end{aligned} \quad (1-8)$$

式中

$$\mathbf{K}^e = \int_0^L \mathbf{B}^T E I \mathbf{B} dx \quad (1-9)$$

式(1-8)和(1-9)分别为梁单元刚度矩阵方程和单元刚度矩阵。其中 δ^e 和 $\mathbf{F}^e$ 分别为梁单元的结点位移向量和结点内力向量。单元结点位移向量 δ^e 见式(3),单元结点力向量为 $\mathbf{F}^e = [Y_i, M_i, Y_j, M_j]^T$ 。

单元刚度矩阵的具体公式,可通过式(1-6)代入式(1-9)进行积分后得

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^e &= \int_0^L \mathbf{B}^T E I \mathbf{B} dx \\ &= EI \int_0^L \begin{bmatrix} \left(\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3}\right) \\ \left(\frac{4}{L} - \frac{6x}{L^2}\right) \\ \left(-\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3}\right) \\ \left(\frac{2}{L} - \frac{6x}{L^2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3}\right) & \left(\frac{4}{L} - \frac{6x}{L^2}\right) & \left(-\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3}\right) & \left(\frac{2}{L} - \frac{6x}{L^2}\right) \end{bmatrix} dx \\ \mathbf{K}^e &= \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \text{对称} \\ 4 \times 4 \end{matrix} \end{aligned} \quad (1-10)$$

对于一般平面刚架,可把桁架杆元(即轴力单元)与梁单元的刚度矩阵组合,即得刚架单元刚度矩阵,它是 6×6 阶。

$$\mathbf{K}^e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \text{对 称} \\ 6 \times 6 \end{matrix} \quad (1-11)$$

三、坐标变换

上述单元刚度方程是以杆元轴线为 x 轴，垂直于杆元轴线方向为 y 轴的坐标系内推导出来的，这样的坐标系在有限元法中一般称为局部坐标系（或单元坐标系）。但因杆系结构是由各种不同方向的杆件组成的，因此各杆的局部坐标系各不相同。在研究整体结构的平衡与几何条件时，必须采用一个统一的坐标系，即结构的总体坐标系，用 xy 表示总体坐标系， $\bar{x}\bar{y}$ 表示局部坐标系（如图1-3所示）。作这样的规定后，单元结点位移与结点力在局部坐标系与总体坐标系间存在着彼此相互变换的关系。

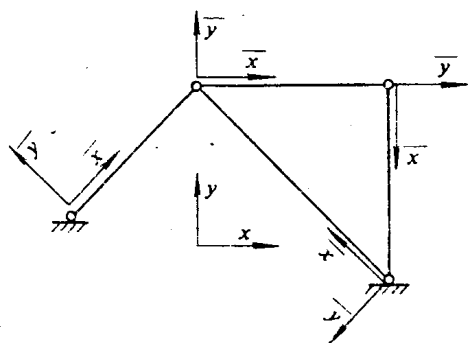


图 1-3

点处的位移在局部坐标系中表示为 $\bar{u}_i, \bar{v}_i$ ，在总体坐标系中表示为 u_i, v_i ；杆元 j 结点处的位移同样可表示为 $\bar{u}_j, \bar{v}_j$ 与 u_j, v_j ；如图1-4所示。

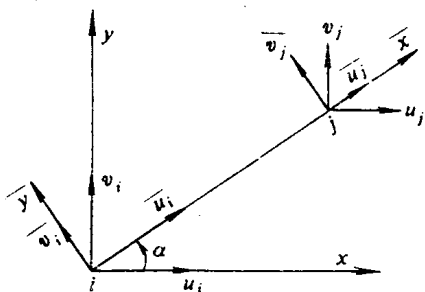


图 1-4

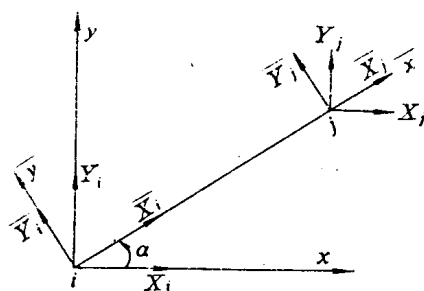


图 1-5

由解析几何可知

$$\bar{u}_i = u_i \cos \alpha + v_i \sin \alpha$$

$$\bar{v}_i = -u_i \sin \alpha + v_i \cos \alpha$$

$$\bar{u}_j = u_j \cos \alpha + v_j \sin \alpha$$

$$\bar{v}_j = -u_j \sin \alpha + v_j \cos \alpha$$

当总体坐标系向局部坐标系旋转叠合时，如逆转， α 取正号，反之，取负号。

将上式写成矩阵形式，有

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{u}_j \\ \bar{v}_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix}$$

或缩写成

$$\bar{\delta}^e = R \delta^e \quad (1-12)$$

在式(1-12)中, $\bar{\delta}^e = [\bar{u}_i \bar{v}_i \bar{u}_j \bar{v}_j]^T$

$$(1-13)$$

为在局部坐标系中的单元结点位移向量。

$$\delta^e = [u_i v_i u_j v_j]^T$$

$$(1-14)$$

为在总体坐标系中的单元结点位移向量。

$$R = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (1-15)$$

式(1-15) R 称坐标变换矩阵。

2. 杆元结点力坐标变换 同样, 杆元结点内力亦有坐标变换关系式, 即

$$\bar{F}^e = R F^e \quad (1-16)$$

在(1-16)式中, $\bar{F}^e = [\bar{X}_i \bar{Y}_i \bar{X}_j \bar{Y}_j]^T$

$$(1-17)$$

为在局部坐标系中的单元结点内力向量。

$$F^e = [\bar{X}_i \bar{Y}_i \bar{X}_j \bar{Y}_j]^T \quad (1-18)$$

为在总体坐标系中的单元结点内力向量。

下面, 我们来讨论, 局部坐标系的单元刚度矩阵与总体坐标系中的单元刚度矩阵间的变换关系式。

设单元 $i j$ 在局部坐标系中的刚度方程为

$$\bar{F}^e = \bar{K}^e \bar{\delta}^e \quad (1-19)$$

现将(1-12)与(1-16)两式代入式(1-19), 得

$$R F^e = \bar{K}^e R \delta^e$$

将上式两边各乘以 R^{-1} , 有

$$R^{-1} R F^e = R^{-1} \bar{K}^e R \delta^e$$

由式(1-15)可以验证得 $R^{-1} = R^T$, 又有 $R^{-1} R = I$ 的性质, 上式变为

$$F^e = R^T \bar{K}^e R \delta^e = K^e \delta^e \quad (1-20)$$

在式(1-20)中, $K^e = R^T \bar{K}^e R$

$$(1-21)$$

式(1-21)表示 $i j$ 杆单元刚阵在两个不同坐标内, 即在局部坐标系内与总体坐标系内的变换关系式。式(1-21)中, K^e 是 $i j$ 杆元在总体坐标系内的单元刚阵; $\bar{K}^e$ 是 $i j$ 杆元在局部坐标系内的单元刚阵。

由(1-15), (1-3) 两式代入式(1-21), 有

$$K^e = R^T \bar{K}^e R = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& \times \begin{bmatrix} \cos a & \sin a & & 0 \\ -\sin a & \cos a & & \\ & & \cos a & \sin a \\ & & -\sin a & \cos a \end{bmatrix} \\
& = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} \cos^2 a & \cos a \sin a & -\cos^2 a & -\cos a \sin a \\ \sin a \cos a & \sin^2 a & -\sin a \cos a & -\sin^2 a \\ -\cos^2 a & -\cos a \sin a & \cos^2 a & \cos a \sin a \\ -\sin a \cos a & -\sin^2 a & \sin a \cos a & \sin^2 a \end{bmatrix} \\
& = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^e & \mathbf{K}_{12}^e \\ \mathbf{K}_{21}^e & \mathbf{K}_{22}^e \end{bmatrix} \quad (1-22)
\end{aligned}$$

式 (1-22) 表示桁架单元在总体坐标系中的单元刚度矩阵的一般表达式, 它是一个对称矩阵, 利用上述表达式可建立结构总刚度矩阵。

对杆 ij 的单元刚度矩阵方程, 一般表达式为

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_{ix} \\ P_{iy} \\ P_{jx} \\ P_{jy} \end{Bmatrix} \quad (1-23)$$

在式 (1-22) 及 (1-23) 中

$$\mathbf{K}_{11}^e = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \cos^2 a & \cos a \sin a \\ \sin a \cos a & \sin^2 a \end{bmatrix} \quad (1-24)$$

$$\mathbf{K}_{12}^e = \begin{bmatrix} k_{13} & k_{14} \\ k_{23} & k_{24} \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} -\cos^2 a & -\cos a \sin a \\ -\sin a \cos a & -\sin^2 a \end{bmatrix} \quad (1-25)$$

$$\mathbf{K}_{22}^e = \begin{bmatrix} k_{33} & k_{34} \\ k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \cos^2 a & \cos a \sin a \\ \sin a \cos a & \sin^2 a \end{bmatrix} \quad (1-26)$$

$$\mathbf{K}_{21}^e = \mathbf{K}_{12}^{eT} \quad (1-27)$$

3. 刚架单元的坐标变换 由解析几何, 单元结点位移向量在局部坐标系和总体坐标系间的变换关系式如下

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{\theta}_i \\ \bar{u}_j \\ \bar{v}_j \\ \bar{\theta}_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos a & \sin a & 0 & & & \\ -\sin a & \cos a & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ & & & \cos a & \sin a & 0 \\ & & & -\sin a & \cos a & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \quad (1-28)$$

或写成

$$\bar{\delta}^e = R \delta^e \tag{1-29}$$

同样，对结点力内向量的变换关系式为

$$\bar{F}^e = R F^e \tag{1-30}$$

在式(1-29)与(1-30)中

$$\bar{\delta}^e = [\bar{u}_i \bar{v}_i \bar{\theta}_i \bar{u}_j \bar{v}_j \bar{\theta}_j]^T \tag{1-31}$$

$$\delta^e = [u_i v_i \theta_i u_j v_j \theta_j]^T \tag{1-32}$$

$$\bar{F}^e = [X_i \bar{Y}_i \bar{M}_i X_j \bar{Y}_j \bar{M}_j]^T \tag{1-33}$$

$$F^e = [X_i Y_i M_i X_j Y_j M_j]^T \tag{1-34}$$

$$R = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \cos a & \sin a & 0 & & & \\ -\sin a & \cos a & 0 & & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ \hline & & & \cos a & \sin a & 0 \\ & 0 & & -\sin a & \cos a & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \tag{1-35}$$

(1-35) 式中 $\bar{\delta}^e$ 与 $\bar{F}^e$ 分别为在局部坐标系中的结点位移向量和结点内力向量； δ^e 与 F^e 分别为在总体坐标系内结点位移向量和结点内力向量； R 为坐标变换矩阵。

● 总体坐标系与局部坐标系中的刚架元、梁元的刚度矩阵的变换关系式与桁架单元的刚度矩阵的变换关系式在形式上完全相同。即

$$K^e = R^T \bar{K}^e R \tag{1-36}$$

在式(1-36)中，刚架单元的 $\bar{K}^e$ 、 K^e 、 R 均为 6×6 阶矩阵。

第二节 结构的总体分析——总刚度方程

当单元刚度方程建立之后，可以建立总刚度方程，这一过程称为总体分析。

一、桁架的总刚度方程

1. 应用最小总势能原理导出总刚度方程 在导出了杆元刚阵，并进行了坐标转置之后，就可以对结构进行总体分析，建立总刚度方程。在这里，可应用最小总势能原理导出总体方程如下。

若对结构划分 m 个单元，则总的应变能为

$$U = \sum_{i=1}^m U_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \delta^{(i)T} K^{(i)} \delta^{(i)}$$

将上式展开，有

$$U = \frac{1}{2} [\delta^{(1)T} \delta^{(2)T} \dots \delta^{(i)T} \dots \delta^{(m)T}]^T \left[\begin{array}{cccc} K^{(1)} & & & \\ & K^{(2)} & & \\ & & K^{(i)} & \\ & & & K^{(m)} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \delta^{(1)} \\ \delta^{(2)} \\ \delta^{(i)} \\ \delta^{(m)} \end{array} \right]$$

或

$$U = \frac{1}{2} \delta^T \hat{K} \delta \quad (1)$$

在式(1)中,

$$\delta = \begin{Bmatrix} \delta^1 \\ \delta^2 \\ \delta^i \\ \delta^m \end{Bmatrix} \quad (2)$$

δ 为结构各单元位移向量顺序排列的向量。

$$\hat{K} = \begin{bmatrix} K^1 & & & \\ & K^2 & & \\ & & K^i & \\ & & & K^m \end{bmatrix} \quad (3)$$

$\hat{K}$ 为结构各单元刚度矩阵组成一对角阵。

若结构有 S 个结点位移向量为

$$d = [d_1 d_2 \cdots d_i \cdots d_s] \quad (4)$$

根据单元结点位移向量与结构结点位移向量间的协调性条件,有

$$\delta = A d \quad (5)$$

其中, A 为单元结点位移与结构结点位移间保持协调性的联系矩阵。具体形式,可见例题。

现将式(5)代入式(1),有

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} (A d)^T \hat{K} (A d) \\ &= \frac{1}{2} d^T A^T \hat{K} A d \end{aligned} \quad (6)$$

这样,结构的总势能为

$$\pi_p = \frac{1}{2} d^T A^T \hat{K} A d - d^T P \quad (1-37)$$

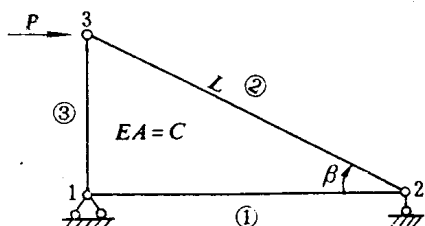


图 1-6

应用最小总势能原理,有

$$\frac{\partial \pi_p}{\partial d} = 0, \quad K d = P \quad (1-38)$$

$$\text{其中} \quad K = A^T \hat{K} A \quad (1-39)$$

式(1-38)为结构总刚度方程,式(1-39)为结构总刚度矩阵, d 为结构结点位移向量, P 为结构结点荷载向量。

下面,通过图1-6所示简单桁架来说明总刚度矩阵的形成过程。

设单元编号①②③,结点编号1、2、3。首先应用位移协调性条件,建立单元结点

位移与结构结点位移间协调关系，从而求得联系矩阵 $\mathbf{A}$ 。

由位移协调性，得

$$\hat{\delta} = \begin{Bmatrix} \delta_1^1 \\ \delta_2^1 \\ \delta_2^2 \\ \delta_3^2 \\ \delta_3^3 \\ \delta_1^3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta_1^1 \\ \delta_2^1 \\ \delta_2^2 \\ \delta_3^2 \\ \delta_3^3 \\ \delta_1^3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} \quad (7)$$

在 (7) 式中左边 $\delta_1 \delta_2 \cdots \delta_3 \delta_1$ 为各单元结点位移向量依单元码顺序排列成列阵，右边项位移向量 $d_1 d_2 d_3$ 表示结构各结点位移向量顺序排列成列阵。根据单元结点位移与结构结点位移的协调性要求，形成了联系矩阵 $\mathbf{A}$ ，由 (7) 式可知联系矩阵为

$$\mathbf{A} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \quad (8)$$

再写出 $\hat{\mathbf{K}}$ 对角阵为

$$\hat{\mathbf{K}} = \begin{Bmatrix} \mathbf{K}^1 & & 0 \\ & \mathbf{K}^2 & \\ 0 & & \mathbf{K}^3 \end{Bmatrix} \quad (9)$$

在 (9) 式中的各单元刚度矩阵一般为 4×4 阶，用分块形式表示则为 2×2 阶矩阵。如式 (1-22) 所示。

从式 (8)、(9)、(1-22) 和 (1-39)，可得图 1-6 桁架的总刚度矩阵为

$$\mathbf{K} = \mathbf{A}^T \hat{\mathbf{K}} \mathbf{A} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 \end{matrix}} & & 0 \\ & \boxed{\begin{matrix} K_{22}^2 & K_{23}^2 \\ K_{32}^2 & K_{33}^2 \end{matrix}} & \\ 0 & & \boxed{\begin{matrix} K_{33}^3 & K_{31}^3 \\ K_{13}^3 & K_{11}^3 \end{matrix}} \end{bmatrix} \\ \times \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} K_{11}^1 + K_{11}^3 & K_{12}^1 & K_{13}^3 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 + K_{22}^2 & K_{23}^2 \\ K_{31}^3 & K_{32}^2 & K_{33}^2 + K_{33}^3 \end{Bmatrix} \quad (10)$$