TESHU HANSHU YU SHUXUE WULI FANGCHENG

特殊函数与数学物理方程

上海交通大学应用数学系编

工程数学丛书

上海交通大学出版社

·工程数学丛书·

特殊函数与数学物理方程

上海交通大学应用数学系编

上海交通大学出版社

内 容 提 要

本书是工程数学丛书之一。主要介绍工程技术中常见的两类特殊函数——贝塞尔函数和勒让德函数，以及三类典型的数学物理方程——波动方程、热传导方程和拉普拉斯方程，此外，还专辟一章介绍求解数学物理方程的数值方法——差分方法。每章配有精选的例题和习题，书末附有习题答案。可供高等院校理工科各专业用作教材，也可供工程技术人员参考及自学者选用。

特殊函数与数学物理方程

上海交通大学出版社出版

(淮海中路1984弄19号)

新华书店上海发行所发行

常熟市印刷二厂印装

开本787×1092毫米 1/32 印张6 字数133,000

1988年12月第1版 1989年1月第1次印刷

印数：1—3,450

ISBN7-313-00240-8/O·174 科技书目：188—239

定价：1.20元

序　言

目前，高等院校的工程数学课程，由于内容多、进度快，因此有些重要的内容不得不一带而过，或者删掉，尤其没有足够多的演题时间，从而使学生对课程内容的理解往往只浮于表面。为了弥补这些不足，编者吸取我校在工程数学教学中积累的有益经验，根据高等学校工科数学课程教学指导委员会（原工科数学教材编委会）的编写要求，针对工科院校的具体特点，编写了一套工程数学教材，并拟配以一册这套教材的习题解答，合称《工程数学丛书》。

丛书中的教材共有5册：《线性代数》、《复变函数》、《积分变换》、《概率论与数理统计初步》和《特殊函数与数学物理方程》。这套教材的特点是：内容丰富，说理清楚，重点突出，深浅得当，通俗易懂；对工程数学中的基本概念、基本理论和基本方法的叙述，力求深入浅出、清晰、准确；并配有大量典型例题和类型齐全的习题。本着循序渐进的原则，对全部内容由易到难，由浅入深地作了统筹安排，书中加有“*”号的内容可根据不同情况予以取舍。这对读者逐步地系统掌握工程数学的基本内容，进一步提高分析问题和解决问题的能力均有裨益。

由于上述特点，这套教材具有比较广泛的适用性。除了全日制高等院校以外，函授大学、电视大学、职工业余大学等都可用来作为教材，自学工程数学的广大读者也可选用，从事科研生产的工程师也可参考。

本套丛书主编袁公英，编委有张建元、贺才兴、武霞敏、吴登益、童品苗、陈茵、唐济楫等同志。《特殊函数与数学物理方程》由袁公英、陈茵同志执笔编写。在全套教材编写过程中得到校、系领导的关心、帮助和我系广大教师的大力支持，编者在此一并致以衷心的感谢。

由于编者水平有限，加之时间仓促，疏漏与不当之处在所难免，恳请读者和使用本套教材的教师批评指正。

编　者
于上海交通大学
1988年10月25日

《工程数学丛书》编委会

《线性代数》	张建元　编
《复变函数》	贺才兴　编
《积分变换》	武霞敏　编
《概率论与数理统计初步》	吴登益　童品苗　编
《特殊函数与数学物理方程》	袁公英　陈　茵　编
《工程数学丛书习题解答》	即　出

0114502

上海交通大学出版社

向您推荐部分图书

目　录

第一章　贝塞尔函数

在物理学和工程技术科学中，有很多理论和应用问题，均可归结为偏微分方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0。\tag{1.1}$$

此方程即著名的拉普拉斯方程。

在解方程(1.1)时，根据区域的边界形状经常要把它变换成圆柱坐标系下的方程来求解，这样要方便得多。

(1.1)式在圆柱坐标

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi,\quad z=z$$

的变换下变为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0。\tag{1.2}$$

应用所谓分离变量法(在第三章中详细介绍)：设(1.2)式的解为

$$u=R(r)\Phi(\varphi)Z(z),$$

代入(1.2)式化简后就可得到关于 $R(r)$ 的一个线性常微分方程

$$r^2\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}r^2}+r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}+(k^2r^2-\lambda^2)R=0,\tag{1.3}$$

其中 k、λ 为常数。方程(1.3)称为贝塞尔(Bessel)方程，它的解就是贝塞尔函数。

由于贝塞尔函数在工程技术中经常用到，在解偏微分方程中也不可缺少，因而，首先求解(1.3)式，并对它的性质进行研究。

§1 贝塞尔方程的级数解

把贝塞尔方程

$$r^2\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}r^2}+r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}+(k^2r^2-\lambda^2)R=0$$

改写成如下形式：

$$t^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+t\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+(k^2t^2-\lambda^2)y=0。\tag{1.4}$$

此方程称为具有参数 k 的 λ 阶贝塞尔方程。

为了求解方程(1.4)，设 $x=kt$，方程(1.4)就变为

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+(x^2-\lambda^2)y=0。\tag{1.5}$$

此方程称为 λ 阶贝塞尔方程。由于方程中以 λ^2 的形式出现，不妨先假定 $\lambda\geqslant0$。

现设方程(1.5)有一个广义幂级数解，试求形式为

$$\begin{aligned}y&=x^\rho(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_kx^k+\cdots)\\&=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\,x^{\rho+k}\qquad(a_0\neq0),\end{aligned}\tag{1.6}$$

将其代入(1.5)式来确定常数 ρ 和 $a_k(k=0,1,2,\cdots)$ 等系数。我们得到

$$\sum_{k=0}^{\infty}[(\rho+k)(\rho+k-1)+(\rho+k)+(x^2-\lambda^2)]a_kx^{\rho+k}=0。$$

由此可见欲要(1.6)式是方程(1.5)的解，则当且仅当上式中 x 各次幂的系数都等于零时，得下列各式：

$$a_0(\rho^2-\lambda^2)=0,\tag{1.7}$$

$$a_1[(\rho+1)^2-\lambda^2]=0,\tag{1.8}$$

$$[(\rho+k)^2-\lambda^2]a_k+a_{k-2}=0 \quad (k=2,3,\cdots)。 \tag{1.9}$$

由(1.10)式，当 $a_0 \neq 0$ 时，得 $\rho=\pm\lambda$，代入(1.8)式，得$a_1=0$。先取 $\rho=\lambda$，代入(1.9)式，得

$$a_k=-\frac{a_{k-2}}{k(2\lambda+k)}, \tag{1.10}$$

因为 $a_1=0$，由(1.10)式知 $a_3=a_5=\cdots=0$，而 a_2，a_4，$\cdots$ 都可以用 a_0 表示，即

$$a_2=-\frac{a_0}{2(2\lambda+2)}=-\frac{a_0}{2^2\cdot 1!(\lambda+1)},$$

$$a_4=-\frac{a_2}{4(2\lambda+4)}=-\frac{a_2}{2^2\cdot 2(\lambda+2)}$$

$$=\frac{a_0}{2^4\cdot 2!(\lambda+2)(\lambda+1)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

一般地

$$a_{2m}=(-1)^m\frac{a_0}{2^{2m}\cdot m!(\lambda+m)\cdots(\lambda+2)(\lambda+1)}。$$

由此可知(1.6)式的一般项为

$$(-1)^m\frac{a_0x^{\lambda+2m}}{2^{2m}\cdot m!(\lambda+1)(\lambda+2)\cdots(\lambda+m)},$$

其中 a_0 是一个任意常数，取定后就得(1.6)式的一个特解。我们把 a_0 取为一个分数：

$$a_0=\frac{1}{2^\lambda\Gamma(\lambda+1)},$$

因为这样使一般项的系数中 2 的次数与 x 的次数相同，又

$$(\lambda+m)(\lambda+m-1)\cdots(\lambda+2)(\lambda+1)\Gamma(\lambda+1)$$
$$=\Gamma(\lambda+m+1)。$$

于是一般项的系数就化成如下简洁的形式：

$$(-1)^m \frac{1}{2^{\lambda+2m}\cdot m!\Gamma(\lambda+m+1)}。$$

因此(1.5)式的一个特解为

$$\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \frac{x^{\lambda+2m}}{2^{\lambda+2m}\cdot m!\Gamma(\lambda+m+1)} \quad (\lambda \geqslant 0)。$$

这个级数用比值法可以判定它在整个数轴上收敛。由**这个无穷级数来定义的函数称为第一类 λ 阶贝塞尔函数。并记作**

$$J_\lambda(x)=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \frac{x^{\lambda+2m}}{2^{\lambda+2m}\cdot m!\Gamma(\lambda+m+1)} \quad (\lambda \geqslant 0)。 \tag{1.11}$$

再取 $\rho=-\lambda$ 时，用同样方法可得方程(1.5)的另一特解

$$J_{-\lambda}(x)=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \frac{x^{-\lambda+2m}}{2^{-\lambda+2m}\cdot m!\Gamma(-\lambda+m+1)}。 \tag{1.12}$$

由此可见，$J_{-\lambda}(x)$相当于在(1.11)式中把 λ 换成 $-\lambda$，因此不论假定方程 (1.5) 式的 λ 是正数还是负数，由 $\rho=\pm\lambda$ 总可以得(1.11)式与(1.12)式。

1° 当 λ 不是整数时，$\Gamma(-\lambda+m+1)\neq\infty$，由于 $J_{-\lambda}(x)$的级数中 x 的最低次幂为 $x^{-\lambda}$，而 $J_\lambda(x)$ 的级数中 x 的最低次幂为 x^λ，显然可知在原点的邻域内 $J_{-\lambda}(x)$ 是无界的，而 $J_\lambda(x)$ 是有界的，因此 $J_\lambda(x)$ 与 $J_{-\lambda}(x)$ 线性无关，由齐次线性方程的通解结构定理知道方程(1.5)式的通解为

$$y=AJ_\lambda(x)+BJ_{-\lambda}(x), \tag{1.13}$$

其中 A、B 为任意常数。

2° 当 λ 为整数时，不妨设 λ 为正整数 n (这不失一般性，因为 λ 为负整数，会得到同样的结果)，在 $J_{-n}(x)$ 中的系数 $\Gamma(-n+m+1)$ 当 $m=0,1,2,\cdots,n-1$ 时为无穷大，这时

$J_{-n}(x)$ 前 n 项的系数可定义为零，直到 $m=n$ 时才开始出现非零项，于是(1.12)式可写成

$$J_{-n}(x)=\sum_{m=n}^{\infty}(-1)^m\frac{1}{m!\Gamma(-n+m+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m-n}。$$

在此，设求和变数用置换 $m=n+k$，于是

$$\begin{aligned}J_{-n}(x)&=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{n+k}\frac{1}{(n+k)!\Gamma(k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}\\&=(-1)^n\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(n+k)!\Gamma(k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}\\&=(-1)^nJ_n(x)。\end{aligned}$$

这就说明了当 λ 为整数 n 时，$J_n(x)$ 与 $J_{-n}(x)$ 是线性相关的，这时要求方程(1.5)式的通解，就必须找出与 $J_n(x)$ 线性无关的另一个特解。

§2　第二类贝塞尔函数

在(1.13)式中选取 $A=\operatorname{ctg}\lambda\pi$，$B=-\csc\lambda\pi$，得函数

$$\begin{aligned}Y_\lambda(x)&=\operatorname{ctg}\lambda\pi\cdot J_\lambda(x)-\csc\lambda\pi\cdot J_{-\lambda}(x)\\&=\frac{J_\lambda(x)\cos\lambda\pi-J_{-\lambda}(x)}{\sin\lambda\pi},\end{aligned}\tag{1.14}$$

作为贝塞尔方程(1.5)的第二个特解，这个函数称为第二类 λ 阶贝塞尔函数。

当 λ 不是整数时，显然(1.14)式是方程(1.5)的解；当 λ 为整数 n 时，由于 $J_{-n}(x)=(-1)^nJ_n(x)=J_n(x)\cos n\pi$ 的关系，(1.14) 式变成不定式"$\frac{0}{0}$"的形式。在这情况下，**定义**

$$Y_n(x)=\lim_{\lambda\to n}Y_\lambda(x)=\lim_{\lambda\to n}\frac{J_\lambda(x)\cos\lambda\pi-J_{-\lambda}(x)}{\sin\lambda\pi},$$

应用罗彼塔法则得

$$Y_n(x)=\lim_{\lambda\to n}\frac{-\pi\sin\lambda\pi\cdot J_\lambda(x)+\cos\lambda\pi\cdot\frac{\partial}{\partial\lambda}J_\lambda(x)-\frac{\partial}{\partial\lambda}J_{-\lambda}(x)}{\pi\cos\lambda\pi}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}J_\lambda(x)\right)\Big|_{\lambda=n}-(-1)^n\cdot\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}J_{-\lambda}(x)\right)\Big|_{\lambda=n}\right],$$

再经过复杂的计算，并利用 Γ 函数的一些性质得

$$Y_n(x)=\frac{2}{\pi}\left(\ln\frac{x}{2}+C\right)J_n(x)-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k}$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}}{k!\cdot(n+k)!}\left(\sum_{m=1}^{k}\frac{1}{m}+\sum_{m=1}^{n+k}\frac{1}{m}\right)$$

$$(n=1,2,\cdots),$$

其中 C 称为欧拉常数，其值为

$$C=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)=0.5772157\cdots,$$

根据这个函数的定义，$Y_n(x)$ 确实是贝塞尔方程 (1.5) 的一个特解，而且与 $J_n(x)$ 是线性无关的；这是因为当 $x=0$ 时 $J_n(x)$ 为有限值，而 $Y_n(x)$ 为无穷大。

综上所述，不论 λ 为何数，贝塞尔方程(1.5)的通解都可表示为

$$y=AJ_\lambda(x)+BY_\lambda(x),$$

其中 A、B 为任意常数。

§3 贝塞尔函数的递推公式

由 $J_\lambda(x)$ 的幂级数表达式 (1.11)，可导出下述两个递推公

式：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^{\lambda}J_{\lambda}(x)]=x^{\lambda}J_{\lambda-1}(x), \tag{1.15}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^{-\lambda}J_{\lambda}(x)]=-x^{-\lambda}J_{\lambda+1}(x)。 \tag{1.16}$$

证明

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^{\lambda}J_{\lambda}(x)]&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[2^{\lambda}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(\lambda+m+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2(m+\lambda)}\right]\\&=2^{\lambda}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(m+\lambda)}{m!\Gamma(\lambda+m+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2(m+\lambda)-1}\\&=x^{\lambda}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(\lambda+m)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\lambda-1}\\&=x^{\lambda}J_{\lambda-1}(x),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^{-\lambda}J_{\lambda}(x)]&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(\lambda+m+1)}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m+\lambda}x^{2m}\right]\\&=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m 2m}{m!\Gamma(\lambda+m+1)}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m+\lambda}x^{2m-1},\end{aligned}$$

令 $m=k+1$，则

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^{-\lambda}J_{\lambda}(x)]&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}2(k+1)}{(k+1)!\Gamma(\lambda+k+2)}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+2+\lambda}x^{2k+1}\\&=-x^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\lambda+1+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1+\lambda}\\&=-x^{-\lambda}J_{\lambda+1}(x)。\end{aligned}$$

由(1.16)式，取 $\lambda=0$，得

$$J_0'(x)=-J_1(x),$$

这是一个很重要的关系式。

把(1.16)式左端的导数写出来，便有

$$-\lambda x^{-\lambda-1}J_\lambda(x)+x^{-\lambda}J'_\lambda(x)=-x^{-\lambda}J_{\lambda+1}(x),$$

$$-\lambda J_\lambda(x)+xJ'_\lambda(x)=-xJ_{\lambda+1}(x)。\tag{1.17}$$

把(1.15)式左端的导数写出来，便有

$$\lambda x^{\lambda-1}J_\lambda(x)+x^\lambda J'_\lambda(x)=x^\lambda J_{\lambda-1}(x),$$

$$\lambda J_\lambda(x)+xJ'_\lambda(x)=xJ_{\lambda-1}(x)。\tag{1.18}$$

从(1.17)、(1.18)式中消去 $J'_\lambda(x)$，得

$$J_{\lambda-1}(x)+J_{\lambda+1}(x)=\frac{2\lambda}{x}J_\lambda(x)。\tag{1.19}$$

又从(1.17)、(1.18)式中消去 $J_\lambda(x)$，得

$$J_{\lambda-1}(x)-J_{\lambda+1}(x)=2J'_\lambda(x)。\tag{1.20}$$

以上各式便是贝塞尔函数的递推公式，它们在有关贝塞尔函数的分析运算中甚为有用，特别要注意的是应用(1.19)式可以把较高阶数的贝塞尔函数用较低阶数的贝塞尔函数表示出来。

例 1　利用贝塞尔函数的递推公式将 $J_4(x)$ 用 $J_0(x)$ 及 $J_1(x)$ 表示。

解

$$\begin{aligned}J_4(x)&=\frac{6}{x}J_3(x)-J_2(x)\\&=\frac{6}{x}\left[\frac{4}{x}J_2(x)-J_1(x)\right]-\left[\frac{2}{x}J_1(x)-J_0(x)\right]\\&=\frac{24}{x^2}J_2(x)-\frac{8}{x}J_1(x)+J_0(x)\\&=\frac{24}{x^2}\left[\frac{2}{x}J_1(x)-J_0(x)\right]-\frac{8}{x}J_1(x)+J_0(x)\\&=\left(\frac{48}{x^3}-\frac{8}{x}\right)J_1(x)-\left(\frac{24}{x^2}-1\right)J_0(x)。\end{aligned}$$

例 2　计算积分 $\int J_3(x)\mathrm{d}x$ 。