

TÉSHU HANSHU YU SHUXUE WULI FANGCHENG

# 特殊函数与 数学物理方程

上海交通大学应用数学系编

工程数学丛书

上海交通大学出版社



科工委书证802 2 0035875 1

• 工程数学丛书 •

# 特殊函数与数学物理方程

上海交通大学应用数学系编

G7115/03



上海交通大学出版社

## 内 容 提 要

本书是工程数学丛书之一。主要介绍工程技术中常见的两类特殊函数——贝塞尔函数和勒让德函数，以及三类典型的数学物理方程——波动方程、热传导方程和拉普拉斯方程，此外，还专辟一章介绍求解数学物理方程的数值方法——差分方法。每章配有精选的例题和习题，书末附有习题答案。可供高等院校理工科各专业目作教材，也可供工程技术人员参考及自学者选用。

### 特殊函数与数学物理方程

上海交通大学出版社出版

(淮海中路1984弄19号)

新华书店上海发行所发行

常熟市印刷二厂印装

---

开本787×1092毫米 1/32 印张6 字数133,000

1988年12月第1版 1989年1月第1次印刷

印数：1—3,450

ISBN7-313-00240-8/O·174 科技书目：188—239

---

定价：1.20元

# 序 言

目前,高等院校的工程数学课程,由于内容多、进度快,因此有些重要的内容不得不一带而过,或者删掉,尤其没有足够的演题时间,从而使学生对课程内容的理解往往只浮于表面。为了弥补这些不足,编者吸取我校在工程数学教学中积累的有益经验,根据高等学校工科数学课程教学指导委员会(原工科数学教材编委会)的编写要求,针对工科院校的具体特点,编写了一套工程数学教材,并拟配以一册这套教材的习题解答,合称《工程数学丛书》。

丛书中的教材共有5册:《线性代数》、《复变函数》、《积分变换》、《概率论与数理统计初步》和《特殊函数与数学物理方程》。这套教材的特点是:内容丰富,说理清楚,重点突出,深浅得当,通俗易懂;对工程数学中的基本概念、基本理论和基本方法的叙述,力求深入浅出、清晰、准确;并配有大量典型例题和类型齐全的习题。本着循序渐进的原则,对全部内容由易到难,由浅入深地作了统筹安排,书中加有“\*”号的内容可根据不同情况予以取舍。这对读者逐步地系统掌握工程数学的基本内容,进一步提高分析问题和解决问题的能力均有裨益。

由于上述特点,这套教材具有比较广泛的适用性。除了全日制高等院校以外,函授大学、电视大学、职工业余大学等都可用来作为教材,自学工程数学的广大读者也可选用,从事科研生产的工程师也可参考。

本套丛书主编袁公英，编委有张建元、贺才兴、武霞敏、吴登益、童品苗、陈茵、唐济楫等同志。《特殊函数与数学物理方程》由袁公英、陈茵同志执笔编写。在全套教材编写过程中得到校、系领导的关心、帮助和我系广大教师的大力支持，编者在此一并致以衷心的感谢。

由于编者水平有限，加之时间仓促，疏漏与不当之处在所难免，恳请读者和使用本套教材的教师批评指正。

编 者  
于上海交通大学  
1988年10月25日

## 《工程数学丛书》编委会

主 编    袁公英  
编 委    张建元   贺才兴   武霞敏   吴登益   童品苗  
          陈 茵   唐济楫

|               |           |     |
|---------------|-----------|-----|
| 《线性代数》        | 张建元       | 编   |
| 《复变函数》        | 贺才兴       | 编   |
| 《积分变换》        | 武霞敏       | 编   |
| 《概率论与数理统计初步》  | 吴登益   童品苗 | 编   |
| 《特殊函数与数学物理方程》 | 袁公英   陈 茵 | 编   |
| 《工程数学丛书习题解答》  |           | 即 出 |

## 上海交通大学出版社

## 向您推荐部分图书

|                  |            |        |
|------------------|------------|--------|
| 画法几何             | 展成, 李良训编   | 2.15元  |
| 画法几何习题及解答        | 展成, 李良训编   | 1.55元  |
| 机械制图             | 本书编写组      | 3.90元  |
| 机械制图习题集          | 本书编写组      | 3.40元  |
| 机械设计制图(非机械类专业)   | 唐保宁, 倪宜平主编 | 3.50元  |
| 机械设计制图习题集        | 唐保宁, 倪宜平主编 | 1.50元  |
| 工程制图学(化工类专业)     | 华东化工学院编    | 3.90元  |
| 工程制图学习题集(化工类专业用) | 华东化工学院编    | 2.50元  |
| 金属切削机床挂图         |            |        |
| 彩图(44幅)          | 曹枕, 高学满主编  | 50.00元 |
| 缩印本(16开)         |            | 3.60元  |
| 金属切削(论文选)        | 金属切削研究会编   | 3.10元  |
| 柴油机原理            | 张连方等编著     | 4.50元  |
| 金属切削机床设计指导       | 翁世修等编      | 1.60元  |
| 模具加工技术           | [日]吉田弘美著   | 2.05元  |
| 流量检测与仪表          | 应启夏、赵学瑞主编  | 2.65元  |
| 数字伺服系统           | 王钧功编著      | 1.70元  |
| 气压伺服系统           | 曲以义编       | 1.60元  |
| 液压动力控制           | 严金坤编       | 1.50元  |
| 结构可靠性原理及其应用      | 桑国光, 张圣坤编著 | 1.80元  |
| 可靠性和可用性评估手册      | 白同朔, 杨翠莲译  | 4.10元  |

# 目 录

|                                            |    |
|--------------------------------------------|----|
| <b>第一章 贝塞尔函数</b> .....                     | 1  |
| § 1 贝塞尔方程的级数解 .....                        | 2  |
| § 2 第二类贝塞尔函数 .....                         | 5  |
| § 3 贝塞尔函数的递推公式 .....                       | 6  |
| § 4 半奇数阶贝塞尔函数 .....                        | 9  |
| *§ 5 贝塞尔函数的母函数 .....                       | 10 |
| § 6 函数展成贝塞尔函数的级数 .....                     | 11 |
| *§ 7 虚宗量的贝塞尔函数 .....                       | 18 |
| *§ 8 渐近公式 .....                            | 19 |
| 习题一.....                                   | 20 |
| <b>第二章 勒让德函数</b> .....                     | 24 |
| § 1 勒让德方程 .....                            | 25 |
| § 2 勒让德多项式 .....                           | 28 |
| § 3 勒让德多项式的微分表示——罗巨格<br>(Rodrigues)公式..... | 31 |
| § 4 勒让德多项式的母函数与递推公式 .....                  | 32 |
| § 5 函数展成勒让德多项式的级数 .....                    | 36 |
| 习题二.....                                   | 41 |
| <b>第三章 波动方程</b> .....                      | 43 |
| § 1 方程的导出 定解条件 .....                       | 44 |

|                         |     |
|-------------------------|-----|
| § 2、达朗贝尔(D'Alembert)公式  | 51  |
| § 3 分离变量法               | 59  |
| § 4 圆膜振动                | 73  |
| 习题三                     | 83  |
| <b>第四章 热传导方程</b>        | 87  |
| § 1 方程的导出 定解问题的提法       | 87  |
| § 2 分离变量法               | 92  |
| § 3 一维热传导方程的柯西问题        | 100 |
| § 4 应用积分变换于热传导问题        | 110 |
| 习题四                     | 116 |
| <b>第五章 拉普拉斯方程</b>       | 120 |
| § 1 建立方程 定解条件           | 120 |
| § 2 圆的狄里赫莱问题的解          | 123 |
| § 3 球的狄里赫莱问题的解          | 132 |
| § 4 格林公式及其应用            | 137 |
| § 5 格林函数                | 143 |
| 习题五                     | 152 |
| <b>第六章 差分方法简介</b>       | 156 |
| § 1 拉普拉斯方程狄里赫莱问题的五点差分格式 | 156 |
| § 2 热传导方程的差分方法          | 164 |
| § 3 波动方程的差分方法           | 167 |
| 习题六                     | 169 |
| <b>习题答案</b>             | 170 |

# 第一章 贝塞尔函数

在物理学和工程技术科学中,有很多理论和应用问题,均可归结为偏微分方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \quad (1.1)$$

此方程即著名的拉普拉斯方程。

在解方程(1.1)时,根据区域的边界形状经常要把它变换成圆柱坐标系下的方程来求解,这样要方便得多。

(1.1)式在圆柱坐标

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z$$

的变换下变为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \quad (1.2)$$

应用所谓分离变量法(在第三章中详细介绍),设(1.2)式的解为

$$u = R(r)\Phi(\varphi)Z(z),$$

代入(1.2)式化简后就可得到关于  $R(r)$  的一个线性常微分方程

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} + (k^2 r^2 - \lambda^2) R = 0, \quad (1.3)$$

其中  $k, \lambda$  为常数。方程(1.3)称为贝塞尔(Bessel)方程,它的解就是贝塞尔函数。

由于贝塞尔函数在工程技术中经常用到,在解偏微分方程中也不可缺少,因而,首先求解(1.3)式,并对它的性质进行研究。

## § 1 贝塞尔方程的级数解

把贝塞尔方程

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} + (k^2 r^2 - \lambda^2) R = 0$$

改写成如下形式:

$$t^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + t \frac{dy}{dt} + (k^2 t^2 - \lambda^2) y = 0. \quad (1.4)$$

此方程称为具有参数  $k$  的  $\lambda$  阶贝塞尔方程。

为了求解方程(1.4), 设  $x = kt$ , 方程(1.4)就变为

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - \lambda^2) y = 0. \quad (1.5)$$

此方程称为  $\lambda$  阶贝塞尔方程。由于方程中以  $\lambda^2$  的形式出现, 不妨先假定  $\lambda \geq 0$ 。

现设方程(1.5)有一个广义幂级数解, 试求形式为

$$\begin{aligned} y &= x^\rho (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_k x^k + \cdots) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{\rho+k} \quad (a_0 \neq 0), \end{aligned} \quad (1.6)$$

将其代入(1.5)式来确定常数  $\rho$  和  $a_k (k=0, 1, 2, \cdots)$  等系数。我们得到

$$\sum_{k=0}^{\infty} [(\rho+k)(\rho+k-1) + (\rho+k) + (x^2 - \lambda^2)] a_k x^{\rho+k} = 0.$$

由此可见欲要(1.6)式是方程(1.5)的解, 则当且仅当上式中  $x$  各次幂的系数都等于零时, 得下列各式:

$$a_0(\rho^2 - \lambda^2) = 0, \quad (1.7)$$

$$a_1[(\rho+1)^2 - \lambda^2] = 0, \quad (1.8)$$

$$[(\rho + k)^2 - \lambda^2]a_k + a_{k-2} = 0 \quad (k=2, 3, \dots). \quad (1.9)$$

由(1.10)式, 当  $a_0 \neq 0$  时, 得  $\rho = \pm \lambda$ , 代入(1.8)式, 得  $a_1 = 0$ 。先取  $\rho = \lambda$ , 代入(1.9)式, 得

$$a_k = -\frac{a_{k-2}}{k(2\lambda + k)}, \quad (1.10)$$

因为  $a_1 = 0$ , 由(1.10)式知  $a_3 = a_5 = \dots = 0$ , 而  $a_2, a_4, \dots$  都可以用  $a_0$  表示, 即

$$a_2 = -\frac{a_0}{2(2\lambda + 2)} = -\frac{a_0}{2^2 \cdot 1! (\lambda + 1)},$$

$$a_4 = -\frac{a_2}{4(2\lambda + 4)} = -\frac{a_2}{2^2 \cdot 2(\lambda + 2)}$$

$$= \frac{a_0}{2^4 \cdot 2! (\lambda + 2)(\lambda + 1)},$$

.....

一般地

$$a_{2m} = (-1)^m \frac{a_0}{2^{2m} \cdot m! (\lambda + m) \cdots (\lambda + 2)(\lambda + 1)}.$$

由此可知(1.6)式的一般项为

$$(-1)^m \frac{a_0 x^{\lambda+2m}}{2^{2m} \cdot m! (\lambda + 1)(\lambda + 2) \cdots (\lambda + m)},$$

其中  $a_0$  是一个任意常数, 取定后就得(1.6)式的一个特解。我们把  $a_0$  取为一个分数:

$$a_0 = \frac{1}{2^\lambda \Gamma(\lambda + 1)},$$

因为这样使一般项的系数中 2 的次数与  $x$  的次数相同, 又

$$\begin{aligned} & (\lambda + m)(\lambda + m - 1) \cdots (\lambda + 2)(\lambda + 1) \Gamma(\lambda + 1) \\ & = \Gamma(\lambda + m + 1). \end{aligned}$$

于是一般项的系数就化成如下简洁的形式:

$$(-1)^m \frac{1}{2^{\lambda+2m} \cdot m! \Gamma(\lambda+m+1)}.$$

因此(1.5)式的一个特解为

$$\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{\lambda+2m}}{2^{\lambda+2m} \cdot m! \Gamma(\lambda+m+1)} \quad (\lambda \geq 0).$$

这个级数用比值法可以判定它在整个数轴上收敛。由这个无穷级数来定义的函数称为**第一类  $\lambda$  阶贝塞尔函数**。并记作

$$J_{\lambda}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{\lambda+2m}}{2^{\lambda+2m} \cdot m! \Gamma(\lambda+m+1)} \quad (\lambda \geq 0). \quad (1.11)$$

再取  $\rho = -\lambda$  时, 用同样方法可得方程(1.5)的另一特解

$$J_{-\lambda}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{-\lambda+2m}}{2^{-\lambda+2m} \cdot m! \Gamma(-\lambda+m+1)}. \quad (1.12)$$

由此可见,  $J_{-\lambda}(x)$  相当于在(1.11)式中把  $\lambda$  换成  $-\lambda$ , 因此不论假定方程(1.5)式的  $\lambda$  是正数还是负数, 由  $\rho = \pm\lambda$  总可以得到(1.11)式与(1.12)式。

1° 当  $\lambda$  不是整数时,  $\Gamma(-\lambda+m+1) \neq \infty$ , 由于  $J_{-\lambda}(x)$  的级数中  $x$  的最低次幂为  $x^{-\lambda}$ , 而  $J_{\lambda}(x)$  的级数中  $x$  的最低次幂为  $x^{\lambda}$ , 显然可知在原点的邻域内  $J_{-\lambda}(x)$  是无界的, 而  $J_{\lambda}(x)$  是有界的, 因此  $J_{\lambda}(x)$  与  $J_{-\lambda}(x)$  线性无关, 由齐次线性方程的通解结构定理知道方程(1.5)式的通解为

$$y = AJ_{\lambda}(x) + BJ_{-\lambda}(x), \quad (1.13)$$

其中  $A, B$  为任意常数。

2° 当  $\lambda$  为整数时, 不妨设  $\lambda$  为正整数  $n$  (这不失一般性, 因为  $\lambda$  为负整数, 会得到同样的结果), 在  $J_{-n}(x)$  中的系数  $\Gamma(-n+m+1)$  当  $m=0, 1, 2, \dots, n-1$  时为无穷大, 这时

$J_{-n}(x)$  前  $n$  项的系数可定义为零, 直到  $m=n$  时才开始出现非零项, 于是(1.12)式可写成

$$J_{-n}(x) = \sum_{m=n}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{m! \Gamma(-n+m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m-n}.$$

在此, 设求和变数用置换  $m=n+k$ , 于是

$$\begin{aligned} J_{-n}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{n+k} \frac{1}{(n+k)! \Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} \\ &= (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(n+k)! \Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} \\ &= (-1)^n J_n(x). \end{aligned}$$

这就说明了当  $\lambda$  为整数  $n$  时,  $J_n(x)$  与  $J_{-n}(x)$  是线性相关的, 这时要求方程(1.5)式的通解, 就必须找出与  $J_n(x)$  线性无关的另一个特解。

## § 2 第二类贝塞尔函数

在(1.13)式中选择  $A = \operatorname{ctg} \lambda\pi$ ,  $B = -\operatorname{csc} \lambda\pi$ , 得函数

$$\begin{aligned} Y_\lambda(x) &= \operatorname{ctg} \lambda\pi \cdot J_\lambda(x) - \operatorname{csc} \lambda\pi \cdot J_{-\lambda}(x) \\ &= \frac{J_\lambda(x) \cos \lambda\pi - J_{-\lambda}(x)}{\sin \lambda\pi}, \end{aligned} \quad (1.14)$$

作为贝塞尔方程(1.5)的第二个特解, 这个函数称为第二类  $\lambda$  阶贝塞尔函数。

当  $\lambda$  不是整数时, 显然(1.14)式是方程(1.5)的解; 当  $\lambda$  为整数  $n$  时, 由于  $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) = J_n(x) \cos n\pi$  的关系,

(1.14) 式变成不定式 “ $\frac{0}{0}$ ” 的形式。在这种情况下, 定义

$$Y_n(x) = \lim_{\lambda \rightarrow n} Y_\lambda(x) = \lim_{\lambda \rightarrow n} \frac{J_\lambda(x) \cos \lambda\pi - J_{-\lambda}(x)}{\sin \lambda\pi},$$

应用罗彼塔法则得

$$Y_n(x) = \lim_{\lambda \rightarrow n} \frac{-\pi \sin \lambda \pi \cdot J_\lambda(x) + \cos \lambda \pi \cdot \frac{\partial}{\partial \lambda} J_\lambda(x) - \frac{\partial}{\partial \lambda} J_{-\lambda}(x)}{\pi \cos \lambda \pi}$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \lambda} J_\lambda(x) \right) \Big|_{\lambda=n} - (-1)^n \cdot \left( \frac{\partial}{\partial \lambda} J_{-\lambda}(x) \right) \Big|_{\lambda=n} \right],$$

再经过复杂的计算, 并利用  $\Gamma$  函数的一些性质得

$$Y_n(x) = \frac{2}{\pi} \left( \ln \frac{x}{2} + C \right) J_n(x) - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left( \frac{x}{2} \right)^{-n+2k}$$

$$- \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left( \frac{x}{2} \right)^{n+2k}}{k! \cdot (n+k)!} \left( \sum_{m=1}^n \frac{1}{m} + \sum_{m=1}^{n+k} \frac{1}{m} \right)$$

$$(n=1, 2, \dots),$$

其中  $C$  称为欧拉常数, 其值为

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right) = 0.5772157 \dots,$$

根据这个函数的定义,  $Y_n(x)$  确实是贝塞尔方程 (1.5) 的一个特解, 而且与  $J_n(x)$  是线性无关的; 这是因为当  $x=0$  时  $J_n(x)$  为有限值, 而  $Y_n(x)$  为无穷大。

综上所述, 不论  $\lambda$  为何数, 贝塞尔方程 (1.5) 的通解都可表示为

$$y = \underbrace{AJ_\lambda(x) + BY_\lambda(x)},$$

其中  $A, B$  为任意常数。

### § 3 贝塞尔函数的递推公式

由  $J_\lambda(x)$  的幂级数表达式 (1.11), 可导出下述两个递推公

式:

$$\frac{d}{dx}[x^\lambda J_\lambda(x)] = x^\lambda J_{\lambda-1}(x), \quad (1.15)$$

$$\frac{d}{dx}[x^{-\lambda} J_\lambda(x)] = -x^{-\lambda} J_{\lambda+1}(x). \quad (1.16)$$

证明

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[x^\lambda J_\lambda(x)] &= \frac{d}{dx} \left[ 2^\lambda \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(\lambda + m + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2(m+\lambda)} \right] \\ &= 2^\lambda \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (m + \lambda)}{m! \Gamma(\lambda + m + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2(m+\lambda)-1} \\ &= x^\lambda \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(\lambda + m)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\lambda-1} \\ &= x^\lambda J_{\lambda-1}(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[x^{-\lambda} J_\lambda(x)] &= \frac{d}{dx} \left[ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(\lambda + m + 1)} \left(\frac{1}{2}\right)^{2m+\lambda} x^{2m} \right] \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m 2m}{m! \Gamma(\lambda + m + 1)} \left(\frac{1}{2}\right)^{2m+\lambda} x^{2m-1}, \end{aligned}$$

令  $m = k + 1$ , 则

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[x^{-\lambda} J_\lambda(x)] &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} 2(k+1)}{(k+1)! \Gamma(\lambda + k + 2)} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k+2+\lambda} x^{2k+1} \\ &= -x^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\lambda + 1 + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1+\lambda} \\ &= -x^{-\lambda} J_{\lambda+1}(x). \end{aligned}$$

由(1.16)式, 取  $\lambda = 0$ , 得

$$J'_0(x) = -J_1(x),$$

这是一个很重要的关系式。

把(1.16)式左端的导数写出来, 便有

$$\begin{aligned} -\lambda x^{-\lambda-1}J_{\lambda}(x) + x^{-\lambda}J'_{\lambda}(x) &= -x^{-\lambda}J_{\lambda+1}(x), \\ -\lambda J_{\lambda}(x) + xJ'_{\lambda}(x) &= -xJ_{\lambda+1}(x). \end{aligned} \quad (1.17)$$

把(1.15)式左端的导数写出来,便有

$$\begin{aligned} \lambda x^{\lambda-1}J_{\lambda}(x) + x^{\lambda}J'_{\lambda}(x) &= x^{\lambda}J_{\lambda-1}(x), \\ \lambda J_{\lambda}(x) + xJ'_{\lambda}(x) &= xJ_{\lambda-1}(x). \end{aligned} \quad (1.18)$$

从(1.17)、(1.18)式中消去  $J'_{\lambda}(x)$ , 得

$$J_{\lambda-1}(x) + J_{\lambda+1}(x) = \frac{2\lambda}{x}J_{\lambda}(x). \quad (1.19)$$

又从(1.17)、(1.18)式中消去  $J_{\lambda}(x)$ , 得

$$J_{\lambda-1}(x) - J_{\lambda+1}(x) = 2J'_{\lambda}(x). \quad (1.20)$$

以上各式便是贝塞尔函数的递推公式, 它们在有关贝塞尔函数的分析运算中甚为有用, 特别要注意的是应用(1.19)式可以把较高阶数的贝塞尔函数用较低阶数的贝塞尔函数表示出来。

例1 利用贝塞尔函数的递推公式将  $J_4(x)$  用  $J_0(x)$  及  $J_1(x)$  表示。

$$\begin{aligned} \text{解} \quad J_4(x) &= \frac{6}{x}J_3(x) - J_2(x) \\ &= \frac{6}{x} \left[ \frac{4}{x}J_2(x) - J_1(x) \right] - \left[ \frac{2}{x}J_1(x) - J_0(x) \right] \\ &= \frac{24}{x^2}J_2(x) - \frac{8}{x}J_1(x) + J_0(x) \\ &= \frac{24}{x^2} \left[ \frac{2}{x}J_1(x) - J_0(x) \right] - \frac{8}{x}J_1(x) + J_0(x) \\ &= \left( \frac{48}{x^3} - \frac{8}{x} \right) J_1(x) - \left( \frac{24}{x^2} - 1 \right) J_0(x). \end{aligned}$$

例2 计算积分  $\int J_3(x) dx$ .