

**DUNTIRAOLIU
DE
FEIDINGCHING
CHAFENFANGFA**

侯天相 周荣春 著

钝体绕流的非定常差分方法

钝体绕流的非定常差分方法

侯天相 周荣春 著

宇航出版社

内 容 提 要

本书主要介绍理想气体中钝体绕流的非定常差分方法研究及其应用结果。

全书分上、下两篇。上篇主要介绍求解连续和间断流场的非定常差分方法的基本思想、给出公式的详细推导过程以及计算机程序流程图。下篇给出各种不同外形的钝头体在不同马赫数和攻角下的流场参数表。内容丰富，实用。

本书可供从事计算流体力学专业的研究人员、工程技术人员以及高等院校有关专业的师生参考。

钝体绕流的非定常差分方法

侯天相 周荣春 著

宇航出版社出版

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

天津静一胶印厂印刷

开本 787×1092 1/16 印张: 30 字数: 765 千字

1986年7月 第一版 1986年7月第一次印刷

印数: 1—1,300册 统一书号: 15244·0013 定价: 5.80元

前言

4C56/09

复杂外形飞行器的流场计算对于最佳气动外形的设计无疑是十分重要的。过去由于计算机的速度和容量限制，人们只能依靠风洞试验和半经验的工程计算来选定飞行器的外形。七十年代以来，由于高速度、大容量计算机的问世，使计算机的数值模拟同风洞试验一样已成为各类复杂飞行器设计的重要工具。

过去几年里，我们在从事飞行器流场数值模拟的研究中，曾对各种复杂外形飞行器的流场作过理论探讨和实际计算，在结合设计的研究工作中，总结了一套适用于多种复杂外形钝体绕流流场数值模拟的计算方法，这就是非定常差分方法。我们编写本书的目的是系统介绍该方法在求解理想气体超音速钝体绕流问题中的应用及其计算结果。

本书分上、下两篇。上篇主要介绍基本方法、内点和边界点的计算格式，利用这些计算格式，可以计算具有间断流场的气动参数，下篇给出典型外形的计算结果，便于设计人员使用。对于未列入本书的其他外形，读者可按上篇第六章提供的程序流程图自行编排程序计算。

本书可供从事飞行器设计的工程师、设计师以及从事计算数学、流体力学的研究人员参考，同时可做为高等学校有关专业师生的参考书。

在我们从事非定常差分方法研究的工作过程中，曾得到庄逢甘教授的不少指导及廖寿琪同志的大力支持，宋承诚、孟德俊和宁国生同志曾先后参加过本方法的部分计算工作，郑国铭同志参加了本书下篇部分数据的计算及数据的整理工作，马延文、姜贵庆同志对本书原稿提了不少宝贵意见，在此一并表示衷心感谢。

由于作者水平有限，编写时间也很仓促，书中难免存在错误，欢迎专家和读者批评指正。

作者

1984年4月

目 录

上 篇 基 本 方 法

第一章 引 论	(1)
§ 1 所要解决的数学物理问题	(1)
§ 2 预备知识	(2)
§ 2.1 音速与马赫 (Mach) 数	(2)
§ 2.2 三个守恒方程	(3)
§ 2.3 牛顿压力公式	(4)
§ 2.4 激波和激波关系式	(5)
§ 2.5 差分格式的收敛性与稳定性	(8)
§ 3 理想气体钝体绕流的偏微分方程组及边界条件	(9)
§ 4 一阶拟线性方程组边值问题解的渐近性质	(13)
§ 5 非定常有限差分方法	(15)
第二章 光滑流场的计算方法	(16)
§ 1 坐标系及坐标变换	(16)
§ 2 内点计算格式	(19)
§ 2.1 计算网格	(19)
§ 2.2 内点差分格式	(20)
§ 3 激波点计算方法	(25)
§ 3.1 边界点计算的重要性	(25)
§ 3.2 激波点的局部直角坐标系	(26)
§ 3.3 局部直角坐标系 (ξ, η, ω, t) 中的基本方程组与相容关系式	(32)
§ 3.4 相容关系式右端项的计算公式	(35)
§ 3.5 A点函数 u, v 等及其导数的算法	(39)
§ 3.6 自由流速度的分解	(42)
§ 3.7 波后各量的计算公式	(43)
§ 3.8 对称轴上的激波点	(44)
§ 3.9 激波点计算步骤	(45)
§ 3.10 代数方程求根问题	(47)
§ 4 物面点计算方法	(49)
§ 4.1 物面点的局部直角坐标系	(50)
§ 4.2 物面点速度的算法	(54)
§ 4.3 物面等熵问题	(69)
§ 4.4 物面点上压力的计算	(70)
§ 5 对称轴点和外边界点的计算方法	(73)
§ 5.1 物体对称轴点的算法	(73)
§ 5.2 对称平面中方程的简化	(78)

§ 5.3 轴点速度分解	(79)
§ 5.4 外边界点的计算	(80)
§ 6 初值选法	(80)
§ 7 关于零攻角情况	(81)
§ 8 算例	(81)
附 录	(86)
第三章 边界格式与多重特征线方法	(89)
§ 1 定常问题差分分解法中各种边界计算格式	(89)
§ 1.1 马克柯麦克格式	(90)
§ 1.2 激波点计算格式	(94)
§ 1.3 物面点计算格式	(97)
§ 2 多重特征线方法	(102)
§ 2.1 简化特征线方法	(102)
§ 2.2 多重特征线方法	(103)
§ 3 激波点计算步骤	(123)
§ 4 物面点计算步骤	(124)
§ 5 计算结果的说明	(128)
第四章 间断流场的计算方法	(131)
§ 1 耗散格式与间断解计算	(131)
§ 1.1 间断解	(131)
§ 1.2 人工粘性项	(132)
§ 1.3 耗散型格式	(133)
§ 2 二阶三层格式	(136)
§ 2.1 格式的构造	(136)
§ 2.2 二阶三层格式的稳定性	(138)
§ 3 物面边界计算的耗散型格式	(149)
§ 4 计算实例说明	(151)
§ 5 实际计算中的几个问题	(162)
§ 5.1 时间步长 Δt 的确定	(162)
§ 5.2 网格数目的确定	(162)
§ 5.3 计算区域的取法	(163)
§ 5.4 收敛的判别	(163)
§ 6 应用	(163)
§ 6.1 钝双锥体物面方程	(164)
§ 6.2 凹形体物面方程	(165)
§ 6.3 球柱倒锥体物面方程	(168)
§ 6.4 球台倒锥体物面方程	(169)
§ 6.5 平头正锥台阶体物面方程	(171)
第五章 方法的推广	(173)
§ 1 引言	(173)
§ 2 非轴对称体流场的计算	(173)
§ 2.1 内点的二阶三层格式	(173)
§ 2.2 内点的L-W格式	(174)

§ 2.3 激波点计算公式	(175)
§ 2.4 物面点计算公式	(176)
§ 2.5 物面熵的计算问题	(187)
§ 2.6 物面点计算步骤	(187)
§ 2.7 一个非轴对称体的物面方程	(187)
§ 3 定常流问题的计算	(188)
§ 3.1 引言	(188)
§ 3.2 内点的二阶三层格式	(191)
§ 3.3 边界点多重特征线方法	(193)
§ 3.4 物面点计算步骤	(205)
§ 3.5 激波点计算步骤	(206)
§ 3.6 初值的给法	(206)
§ 4 非均匀流问题的计算	(207)
第六章 方法的程序流程图	(208)
§ 1 引言	(208)
§ 2 符号的说明	(208)
§ 3 流程图的说明	(212)

下篇 计算结果

说 明

一 A外形物面参数及其计算结果

表1.1 A外形 ($\beta = 0^\circ$) 物面参数	(231)
表1.2 A外形 ($\beta = 0^\circ$) 计算结果 $M_\infty = 2, \alpha = 0^\circ$	(232)
1.2.1 $\xi = 0.00000$	(232)
1.2.2 $\xi = 0.14286, \xi = 0.28572$	(233)
1.2.3 $\xi = 0.42857, \xi = 0.57143$	(234)
1.2.4 $\xi = 0.71428, \xi = 0.85714$	(235)
1.2.5 $\xi = 1.00000$	(236)
表1.3 A外形 ($\beta = 0^\circ$) 计算结果 $M_\infty = 25, \alpha = 10^\circ$	(237)
1.3.1 $\Phi = 0.00000, \xi = 0.00000$	(237)
1.3.2 $\Phi = 0.00000, \xi = 1.00000$	(238)
1.3.3 $\Phi = 0.31416, \xi = 0.00000$	(239)
1.3.4 $\Phi = 0.31416, \xi = 1.00000$	(240)
1.3.5 $\Phi = 0.62832, \xi = 0.00000$	(241)
1.3.6 $\Phi = 0.62832, \xi = 1.00000$	(242)
1.3.7 $\Phi = 0.94248, \xi = 0.00000$	(243)
1.3.8 $\Phi = 0.94248, \xi = 1.00000$	(244)
1.3.9 $\Phi = 1.25664, \xi = 0.00000$	(245)
1.3.10 $\Phi = 1.25664, \xi = 1.00000$	(246)
1.3.11 $\Phi = 1.57079, \xi = 0.00000$	(247)
1.3.12 $\Phi = 1.57079, \xi = 1.00000$	(248)

1.3.13	$\Phi = 1.88496, \xi = 0.00000$	(249)
1.3.14	$\Phi = 1.88496, \xi = 1.00000$	(250)
1.3.15	$\Phi = 2.19911, \xi = 0.00000$	(251)
1.3.16	$\Phi = 2.19911, \xi = 1.00000$	(252)
1.3.17	$\Phi = 2.51327, \xi = 0.00000$	(253)
1.3.18	$\Phi = 2.51327, \xi = 1.00000$	(254)
1.3.19	$\Phi = 2.82743, \xi = 0.00000$	(255)
1.3.20	$\Phi = 2.82743, \xi = 1.00000$	(256)
1.3.21	$\Phi = 3.14159, \xi = 0.00000$	(257)
1.3.22	$\Phi = 3.14159, \xi = 1.00000$	(258)

表1.4 A外形 ($\beta = 10^\circ$) 物面参数..... (259)

表1.5 A外形 ($\beta = 10^\circ$) 计算结果, $M_\infty = 2, \alpha = 10^\circ$ (260)

1.5.1	$\xi = 0.00000$	(260)
1.5.2	$\xi = 0.14286, \xi = 0.28572$	(261)
1.5.3	$\xi = 0.42857, \xi = 0.57143$	(262)
1.5.4	$\xi = 0.71428, \xi = 0.85714$	(263)
1.5.5	$\xi = 1.00000$	(264)

表1.6 A外形 ($\beta = 10^\circ$) 计算结果, $M_\infty = 25, \alpha = 10^\circ$ (265)

1.6.1	$\Phi = 0.00000, \xi = 0.00000$	(265)
1.6.2	$\Phi = 0.00000, \xi = 1.00000$	(266)
1.6.3	$\Phi = 0.31416, \xi = 0.00000$	(267)
1.6.4	$\Phi = 0.31416, \xi = 1.00000$	(268)
1.6.5	$\Phi = 0.62832, \xi = 0.00000$	(269)
1.6.6	$\Phi = 0.62832, \xi = 1.00000$	(270)
1.6.7	$\Phi = 0.94248, \xi = 0.00000$	(271)
1.6.8	$\Phi = 0.94248, \xi = 1.00000$	(272)
1.6.9	$\Phi = 1.25664, \xi = 0.00000$	(273)
1.6.10	$\Phi = 1.25664, \xi = 1.00000$	(274)
1.6.11	$\Phi = 1.57079, \xi = 0.00000$	(275)
1.6.12	$\Phi = 1.57079, \xi = 1.00000$	(276)
1.6.13	$\Phi = 1.88496, \xi = 0.00000$	(277)
1.6.14	$\Phi = 1.88496, \xi = 1.00000$	(278)
1.6.15	$\Phi = 2.19911, \xi = 0.00000$	(279)
1.6.16	$\Phi = 2.19911, \xi = 1.00000$	(280)
1.6.17	$\Phi = 2.51327, \xi = 0.00000$	(281)
1.6.18	$\Phi = 2.51327, \xi = 1.00000$	(282)
1.6.19	$\Phi = 2.82743, \xi = 0.00000$	(283)
1.6.20	$\Phi = 2.82743, \xi = 1.00000$	(284)
1.6.21	$\Phi = 3.14159, \xi = 0.00000$	(285)
1.6.22	$\Phi = 3.14159, \xi = 1.00000$	(286)

二 B外形物面参数及其计算结果

表2.1 BI外形物面参数..... (287)

表2.2 BI外形计算结果, $M_\infty = 6$, $\alpha = 0^\circ$	(289)
--	-------

2.2.1 $\xi = 0.00000$	(289)
2.2.2 $\xi = 0.14286$	(291)
2.2.3 $\xi = 0.28572$	(293)
2.2.4 $\xi = 0.42857$	(295)
2.2.5 $\xi = 0.57143$	(297)
2.2.6 $\xi = 0.71428$	(299)
2.2.7 $\xi = 0.85714$	(301)
2.2.8 $\xi = 1.00000$	(303)

表2.3 BI外形物面参数	(305)
---------------------	-------

表2.4 BI外形计算结果, $M_\infty = 5$, $\alpha = 0^\circ$	(306)
--	-------

2.4.1 $\xi = 0.00000$	(306)
2.4.2 $\xi = 0.14286$	(307)
2.4.3 $\xi = 0.28572$	(308)
2.4.4 $\xi = 0.42857$	(310)
2.4.5 $\xi = 0.57143$	(311)
2.4.6 $\xi = 0.71428$	(312)
2.4.7 $\xi = 0.85714$	(313)
2.4.8 $\xi = 1.00000$	(314)

三 C外形物面参数及其计算结果

表3.1 C外形 ($\beta = 0^\circ$) 物面参数	(315)
---	-------

表3.2 C外形 ($\beta = 0^\circ$) 计算结果, $M_\infty = 2$, $\alpha = 0^\circ$	(316)
--	-------

3.2.1 $\xi = 0.00000$	(316)
3.2.2 $\xi = 0.14286$, $\xi = 0.28572$	(317)
3.2.3 $\xi = 0.42857$, $\xi = 0.57143$	(318)
3.2.4 $\xi = 0.71428$, $\xi = 0.85714$	(319)
3.2.5 $\xi = 1.00000$	(320)

表3.3 C外形 ($\beta = 0^\circ$) 计算结果, $M_\infty = 25$, $\alpha = 10^\circ$	(321)
--	-------

3.3.1 $\Phi = 0.00000$, $\xi = 0.00000$	(321)
3.3.2 $\Phi = 0.00000$, $\xi = 1.00000$	(322)
3.3.3 $\Phi = 0.31416$, $\xi = 0.00000$	(323)
3.3.4 $\Phi = 0.31416$, $\xi = 1.00000$	(324)
3.3.5 $\Phi = 0.62832$, $\xi = 0.00000$	(325)
3.3.6 $\Phi = 0.62832$, $\xi = 1.00000$	(326)
3.3.7 $\Phi = 0.94248$, $\xi = 0.00000$	(327)
3.3.8 $\Phi = 0.94248$, $\xi = 1.00000$	(328)
3.3.9 $\Phi = 1.25664$, $\xi = 0.00000$	(329)
3.3.10 $\Phi = 1.25664$, $\xi = 1.00000$	(330)
3.3.11 $\Phi = 1.57079$, $\xi = 0.00000$	(331)
3.3.12 $\Phi = 1.57079$, $\xi = 1.00000$	(332)
3.3.13 $\Phi = 1.88496$, $\xi = 0.00000$	(333)

3.3.14	$\Phi = 1.88496, \xi = 1.00000$	(334)
3.3.15	$\Phi = 2.19911, \xi = 0.00000$	(335)
3.3.16	$\Phi = 2.19911, \xi = 1.00000$	(336)
3.3.17	$\Phi = 2.51327, \xi = 0.00000$	(337)
3.3.18	$\Phi = 2.51327, \xi = 1.00000$	(338)
3.3.19	$\Phi = 2.82743, \xi = 0.00000$	(339)
3.3.20	$\Phi = 2.82743, \xi = 1.00000$	(340)
3.3.21	$\Phi = 3.14159, \xi = 0.00000$	(341)
3.3.22	$\Phi = 3.14159, \xi = 1.00000$	(342)
表3.4 C外形 ($\beta = 10^\circ$) 物面参数		(343)
表3.5 C外形 ($\beta = 10^\circ$) 计算结果 $M_\infty = 2, \alpha = 0^\circ$		(344)
3.5.1	$\xi = 0.00000$	(344)
3.5.2	$\xi = 0.14286, \xi = 0.28572$	(345)
3.5.3	$\xi = 0.42857, \xi = 0.57143$	(346)
3.5.4	$\xi = 0.71428, \xi = 0.85714$	(347)
3.5.5	$\xi = 1.00000$	(348)
表3.6 C外形 ($\beta = 10^\circ$) 计算结果, $M_\infty = 25, \alpha = 10^\circ$		(349)
3.6.1	$\Phi = 0.00000, \xi = 0.00000$	(349)
3.6.2	$\Phi = 0.00000, \xi = 1.00000$	(350)
3.6.3	$\Phi = 0.31416, \xi = 0.00000$	(351)
3.6.4	$\Phi = 0.31416, \xi = 1.00000$	(352)
3.6.5	$\Phi = 0.62832, \xi = 0.00000$	(353)
3.6.6	$\Phi = 0.62832, \xi = 1.00000$	(354)
3.6.7	$\Phi = 0.94248, \xi = 0.00000$	(355)
3.6.8	$\Phi = 0.94248, \xi = 1.00000$	(356)
3.6.9	$\Phi = 1.25664, \xi = 0.00000$	(357)
3.6.10	$\Phi = 1.25664, \xi = 1.00000$	(358)
3.6.11	$\Phi = 1.57079, \xi = 0.00000$	(359)
3.6.12	$\Phi = 1.57079, \xi = 1.00000$	(360)
3.6.13	$\Phi = 1.88496, \xi = 0.00000$	(361)
3.6.14	$\Phi = 1.88496, \xi = 1.00000$	(362)
3.6.15	$\Phi = 2.19911, \xi = 0.00000$	(363)
3.6.16	$\Phi = 2.19911, \xi = 1.00000$	(364)
3.6.17	$\Phi = 2.51327, \xi = 0.00000$	(365)
3.6.18	$\Phi = 2.51327, \xi = 1.00000$	(366)
3.6.19	$\Phi = 2.82743, \xi = 0.00000$	(367)
3.6.20	$\Phi = 2.82743, \xi = 1.00000$	(368)
3.6.21	$\Phi = 3.14159, \xi = 0.00000$	(369)
3.6.22	$\Phi = 3.14159, \xi = 1.00000$	(370)

四 D外形物面参数及其计算结果

表4.1	D外形 ($\beta = 10^\circ$) 物面参数	(371)
------	---------------------------------	-------

表4.2 D外形 ($\beta = 10^\circ$) 计算结果, $M_\infty = 2$, $\alpha = 0^\circ$ (372)

- 4.2.1 $\xi = 0.00000$ (372)
- 4.2.2 $\xi = 0.07143$, $\xi = 0.14286$ (374)
- 4.2.3 $\xi = 0.21428$, $\xi = 0.28571$ (376)
- 4.2.4 $\xi = 0.35714$, $\xi = 0.42857$ (378)
- 4.2.5 $\xi = 0.50000$, $\xi = 0.57143$ (380)
- 4.2.6 $\xi = 0.64286$, $\xi = 0.71428$ (382)
- 4.2.7 $\xi = 0.78571$, $\xi = 0.85714$ (384)
- 4.2.8 $\xi = 0.92857$ (386)
- 4.2.9 $\xi = 1.00000$ (387)

表4.3 D外形 ($\beta = 10^\circ$) 计算结果, $M_\infty = 25$, $\alpha = 0^\circ$ (389)

- 4.3.1 $\xi = 0.00000$ (389)
- 4.3.2 $\xi = 0.07143$, $\xi = 0.14286$ (391)
- 4.3.3 $\xi = 0.21428$, $\xi = 0.28571$ (392)
- 4.3.4 $\xi = 0.35714$, $\xi = 0.42857$ (393)
- 4.3.5 $\xi = 0.50000$, $\xi = 0.57143$ (394)
- 4.3.6 $\xi = 0.64286$, $\xi = 0.71428$ (395)
- 4.3.7 $\xi = 0.78571$, $\xi = 0.85714$ (397)
- 4.3.8 $\xi = 0.92857$ (398)
- 4.3.9 $\xi = 1.00000$ (399)

五 E外形物面参数及其计算结果

表5.1 E外形物面参数 (401)

表5.2 E外形计算结果, $M_\infty = 6$, $\alpha = 0^\circ$ (403)

- 5.2.1 $\xi = 0.00000$ (403)
- 5.2.2 $\xi = 0.14286$ (405)
- 5.2.3 $\xi = 0.28572$ (407)
- 5.2.4 $\xi = 0.42857$ (409)
- 5.2.5 $\xi = 0.57143$ (411)
- 5.2.6 $\xi = 0.71428$ (413)
- 5.2.7 $\xi = 0.85714$ (415)
- 5.2.8 $\xi = 1.00000$ (416)

表5.3 E外形计算结果, $M_\infty = 6$, $\alpha = 10^\circ$ (418)

- 5.3.1 $\Phi = 0.00000$, $\xi = 0.00000$ (418)
- 5.3.2 $\Phi = 0.00000$, $\xi = 1.00000$ (420)
- 5.3.3 $\Phi = 3.14159$, $\xi = 0.00000$ (422)
- 5.3.4 $\Phi = 3.14159$, $\xi = 1.00000$ (424)

六 F外形物面参数及其计算结果

表6.1 F外形物面参数 (427)

表6.2 F外形计算结果, $M_\infty = 7$, $\alpha = 10^\circ$ (429)

- 6.2.1 $\Phi = 0.00000$, $\xi = 0.00000$ (429)
- 6.2.2 $\Phi = 0.00000$, $\xi = 1.00000$ (431)

6.2.3 $\Phi = 3.14159, \xi = 0.00000$	(433)
6.2.4 $\Phi = 3.14159, \xi = 1.00000$	(435)

七 G外形物面参数及其计算结果

表7.1 G外形物面参数.....	(437)
表7.2 G外形计算结果.....	(439)
7.2.1 $\xi = 0.00000$	(439)
7.2.2 $\xi = 0.14286$	(441)
7.2.3 $\xi = 0.28572$	(443)
7.2.4 $\xi = 0.42857$	(445)
7.2.5 $\xi = 0.57143$	(447)
7.2.6 $\xi = 0.71428$	(449)
7.2.7 $\xi = 0.85714$	(451)
7.2.8 $\xi = 1.00000$	(453)
符号说明	(455)
参考资料	(456)

第一章 引 论

§1 所要解决的数学物理问题

在空气动力学的研究中,常常需要确定一个物体在空气中飞行时它周围空气的压力、密度、温度的变化以及物体表面上各点的受力情况等。这一物理问题涉及许多因素,如空气的粘性、空气受热时物理化学性质的变化、物体的形状、飞行速度等。空气动力学研究表明,这类物理问题可化为相应的数学问题,即拟线性偏微分方程组的边值问题。因此要给出上述力学问题的定量描述,只需求解所对应的偏微分方程边值问题即可。所需的空气动力学必要概念和基本公式,在下节中给出。

因为实际流动所对应的数学问题十分复杂,求解相当困难,所以就需要从力学角度对空气性质进行简化处理。最简单有效而在大多数情况下又不失真实性的简化是假定空气为理想气体,即假设空气压力 $\bar{p}$ 、绝对温度 $\bar{T}$ 及密度 $\bar{\rho}$ 满足状态方程

$$\bar{p} = \frac{1}{M_g} R_0 \bar{\rho} \bar{T}$$

式中, $R_0(=8.31432 \times 10^{-7} \text{厘米}^2 \cdot \text{秒}^{-2} \cdot \text{度}^{-1})$ 为通用气体常数, M_g 为空气分子量。在理想气体假设下,钝体绕流问题所对应的数学问题就大为简化了。本书所要解决的就是这一问题,本章§3.将给出这个偏微分方程组和边界条件。

应该给理想气体偏微分方程组什么样的边界条件才能使问题是适定的,这个问题从力学的观点看是解决了的,但作为数学问题并未彻底解决。本书不去讨论这些问题,而直接认为这一边值问题是适定的。

关于边值问题的求解,一般采用数值计算方法,这是因为理论分析至今仍不能给出实际应用所要的答案。因此,本书也不讨论这些边值问题的解析解。

到目前为止,求解非线性方程组边值问题已有很多数值方法,例如五十年代发展起来的积分关系法,后来的直线法以及反解法和差分法等,更为有效的是六十年代发展起来的非定常差分方法,或者叫做时间相关法。一般说各种方法在二维(即零攻角)情况下都是比较成熟的,而三维(即有攻角)情况则由于本身遇到一些困难,或因应用范围狭窄,或因过于繁琐、计算工作量大、程序结构复杂等原因,使很多工作都限于方法研究、理论分析等范围内,有效地用于实际计算的不多,特别是用于今天的一些复杂的飞行器外形计算的就更少

了。七十年代初苏联卢萨诺夫(Русаков)等人^[1]利用他们发展的追赶法差分格式计算了一些光滑凸体诸如球、椭球、抛物体以及双曲圆柱等物体在不同马赫数和攻角情况下的流场。这对于实际应用提供了不少方便。但还是不够的,因为实际上所碰到的很多物体都不是简单的光滑凸体,而是具有复杂外形的物体,如图1.1中的倒锥组合体I,图1.2中的钝双锥体,图1.3中的平头体,图1.4中的凹形体以及图1.5中的倒锥组合体II。对这些物体需要考虑微分方程定解区域的边界不是简单光滑曲线的情况。这方面的研究工作,目前国外正在发展中^[2]。在过去的几年里,我们对具有各种复杂外形飞行器绕流流场的计算方法,进行了很多研究,并做了大量的实际计算。我们编写本书的目的是系统介绍用非定常差分方法求解理想气体中超音速钝体绕流问题,并提供一套适用于多种复杂外形飞行器和流场参数的数值计算方法。

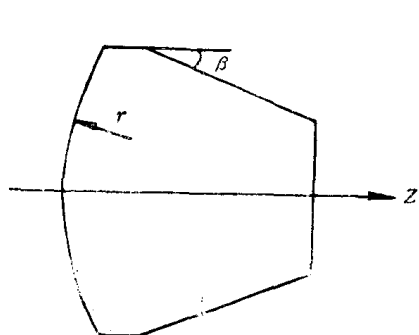


图 1.1 倒锥组合体 I

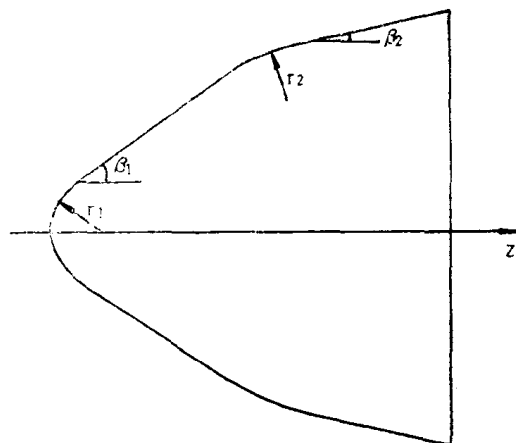


图 1.2 钝双锥体

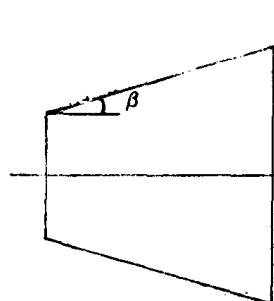


图 1.3 平头体

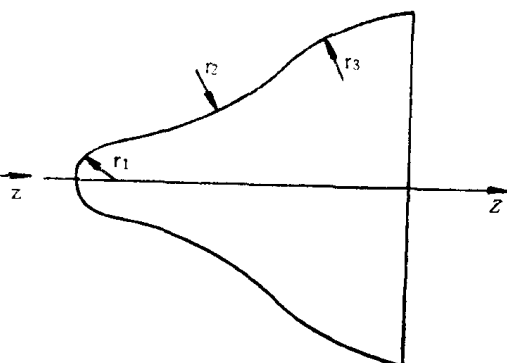


图 1.4 凹形体

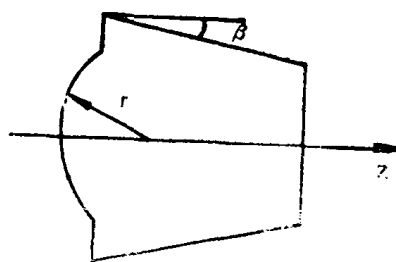


图 1.5 倒锥组合体 II

本书侧重实用,不做过多的理论探讨。目前的数学理论还不能证明实际问题所对应的边值问题的差分解是否一定逼近理论解。但每种外形的计算结果都与实验进行了比较,结果表明,本方法提供的数据与实验结果很符合,是可靠的。

§2 预备知识

为了读者阅读和应用方便,本节给出有关的空气动力学和数学方面的一些必要知识。

§2.1 音速与马赫(Mach)数

音速是指流场中的某一点受到微弱扰动时,扰动从这一点传播到整个流场去的速度。这

个速度用 $\bar{a}$ 表示。这里引进一个空气动力学研究中有重要意义的物理量——马赫数 M ,

$$M = \frac{\bar{V}}{a} \quad (1.1)$$

其中 $\bar{V}$ 为流速。

一般形式的音速公式为

$$\bar{a}^2 = \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{\rho}} \quad (1.2)$$

在理想气体绝热状态下,有泊松方程

$$\bar{p} = c \bar{\rho}^\gamma \quad (1.3)$$

$\gamma = 1.4$, c 为常数。

将(1.3)代入(1.2)得

$$\bar{a}^2 = \gamma \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}} \quad (1.4)$$

这就是理想气体绝热状态下的音速公式。

因为我们研究的是单位质量的气体,所以

$$\frac{1}{\bar{\rho}} = \bar{V}_{\text{体}},$$

这里 $\bar{V}_{\text{体}}$ 表示气体的体积。代入(1.4)就有

$$\bar{a}^2 = \gamma \bar{p} \bar{V}_{\text{体}}.$$

根据状态方程,可得

$$\bar{a}^2 = \gamma R \bar{T}, \quad (1.5)$$

这里 R 是空气的气体常数。(1.5)式告诉我们,音速是随介质的温度而变的。

若以下标“ ∞ ”表示自由流,则有

$$M_\infty = \frac{\bar{V}_\infty}{\bar{a}_\infty} = \frac{\bar{V}_\infty}{\sqrt{\gamma \bar{p}_\infty / \bar{\rho}_\infty}} = \frac{V_\infty}{\sqrt{\gamma}}, \quad (1.6)$$

M_∞ 是自由流马赫数, V_∞ 是无量纲的自由流速度。

§ 2.2 三个守恒方程

设 $\bar{p}$ 、 $\bar{\rho}$ 分别表示空气压力与密度, $\vec{\bar{V}}$ 为气流速度向量, $\bar{t}$ 表示时间,由质量守恒、动量守恒和能量守恒定律可以推出理想气体流动的连续方程

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{t}} + \text{div}(\bar{\rho} \vec{\bar{V}}) = 0, \quad (1.7)$$

动量方程

$$\frac{d\vec{V}}{dt} + \frac{1}{\rho} \text{grad } \bar{p} = 0, \quad (1.8)$$

能量方程

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\bar{p}}{\rho} + \bar{U} + \frac{1}{2} \vec{V}^2 \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} = 0, \quad (1.9)$$

这里 $\bar{U}$ 为系统内能。若以 $\bar{h}$ 表系统的焓值，对于理想气体有关系式

$$\frac{\bar{p}}{\rho} + \bar{U} = \bar{h} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\bar{p}}{\rho}, \quad (1.10)$$

式中 $\gamma = 1.4$ 为理想气体常数。因此能量方程可改写为

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\bar{p}}{\rho} + \frac{1}{2} \vec{V}^2 \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} = 0 \quad (1.11)$$

为了应用方便，必须将各量无量纲化。如以 $\bar{r}_0$ 表示参考长度， $\bar{p}_\infty$ 、 $\bar{\rho}_\infty$ 分别表示自由流中的压力与密度，则无量纲化方案如下：

$$p = \bar{p} / \bar{p}_\infty, \quad \rho = \bar{\rho} / \bar{\rho}_\infty, \quad (1.12)$$

$$\vec{V} = \vec{\bar{V}} / \sqrt{\bar{p}_\infty / \bar{\rho}_\infty}, \quad t = \frac{\bar{t}}{\bar{r}_0} \sqrt{\bar{p}_\infty / \bar{\rho}_\infty}$$

对于无量纲的 p 、 ρ 、 $\vec{V}$ 、 t 等量来说，方程(1.4)、(1.7) ~ (1.11)的形式不变，这一点是容易验证的。用计算的 p 、 ρ 、 $\vec{V}$ 之值分别乘以 $\bar{p}_\infty$ 、 $\bar{\rho}_\infty$ 、 $\sqrt{\bar{p}_\infty / \bar{\rho}_\infty}$ ，就可以得到各量有量纲的值。

§2.3 牛顿压力公式

常用的近似计算表面压力分布的方法是以牛顿的质点模型为基础的，即认为绕物体流动的介质是由离散的、彼此之间没有相互作用的质点组成，在与物体基元表面碰撞时，沿物面法线方向质点动量消失，流体质点在单位时间内所损失的动量等于作用在物体基元表面的压力，它只与迎风面气流的方向有关。因此可给出物体表面各点的初始近似压力、密度和速度等。

如图1.6，以 L 表示物体表面，为了得出流场参量的初始近似值，要给出 L 上任一点 Q 处的压力与速度的近似值。设 Q 点所对应的极坐标角为 θ ，直线 z 为物体的对称轴，如令

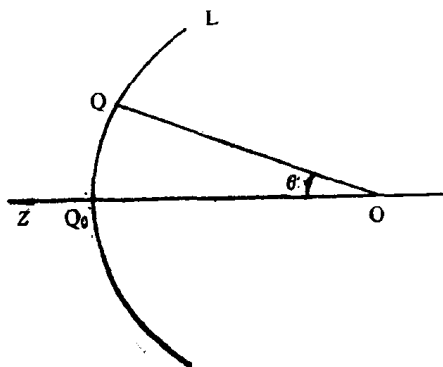


图 1.6 极坐标系

$$C = \left(\frac{2\gamma}{\gamma-1} M_\infty^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right) / \left[\frac{(\gamma+1) M_\infty^2}{(\gamma-1) M_\infty^2 + 2} \right]^\gamma, \quad (1.13)$$

则驻点的密度与压力分别为:

$$\rho_0 = \left[\left(\frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2 + 1 \right) / C \right]^{\frac{1}{\gamma-1}}, \quad (1.14)$$

$$p_0 = \left(\frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2 + 1 \right) \rho_0 \quad (1.15)$$

在Q点则有:

$$p = 1 + (p_0 - 1) \cos^2 \theta, \quad (1.16)$$

$$\rho = (p/C)^{\frac{1}{\gamma}}, \quad (1.17)$$

$$V = \sqrt{V_\infty^2 + \frac{2\gamma}{\gamma-1} - \frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho}}. \quad (1.18)$$

根据总速度和物面方程就可计算出在给定坐标系中速度的各个分量。公式(1.16)称作牛顿压力分布公式。

§ 2.4 激波和激波关系式

所谓激波,用数学的语言来说就是间断面。流体流过这个间断面时,其物理量 p 、 ρ 、 V 、 T 都要发生变化。简单地研究一下这些物理量的变化规律,对实际分析计算结果是很有帮助的。

如图1.7所示, ϵ 表示来流与激波之间的夹角,设来流参量为 M_1 、 V_1 、 p_1 、 ρ_1 、 T_1 ,经过激波后,流体的参数相应变为 M_2 、 V_2 、 p_2 、 ρ_2 、 T_2 ,激波前后各物理量之间有如下几个关系式:

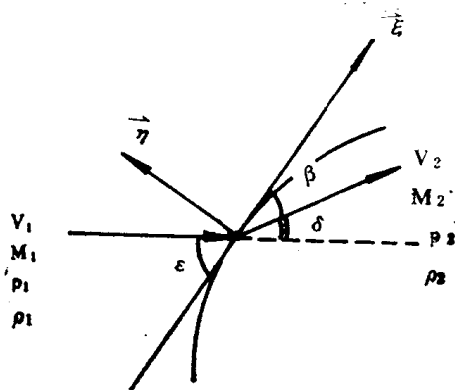


图 1.7 间断面前后的物理量

$$1) \quad \frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} \left(\sigma - \frac{\gamma-1}{2\gamma} \right), \quad \sigma = M_1^2 \sin^2 \epsilon.$$

可见,当 $\sigma > 1$ 时,通过激波压力是上升的。

$$2) \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma+1)\sigma}{2 + (\gamma-1)\sigma}.$$

当 $\sigma > 1$ 时,有 $\rho_2/\rho_1 > 1$,这说明通过激波密度亦是上升的。

同时,

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} < \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \approx 6.$$

又可见,经过激波后密度 ρ 的上升率不超过6。