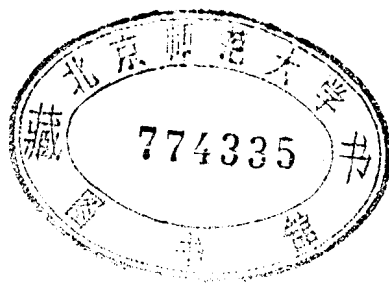


置换群约化系数及其应用

陈金全 高美娟 著



科学出版社

1981

内 容 简 介

置换群的内、外积约化问题在群论应用中占有十分重要的地位.置换群的约化系数和酉群的约化系数有着密切联系,这些约化系数在核理论、基本粒子、原子分子物理、固体物理及量子化学等方面有着广泛应用.本书介绍置换群的约化系数及其各种应用.

全书分为两部分,第一部分包括置换群标准基的标志和求法,置换群CG系数,置换群外积约化系数等.第二部分包括CG系数表,外积约化系数表.

本书可供理论物理、群论研究者以及大中院校有关专业师生参考.

置换群约化系数及其应用

陈金全 高美娟 著

*

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1981年4月第一版 开本:787×1092 1/16
1981年4月第一次印刷 印张:6 1/4 插页:15
印数:0001—4,800 字数:139,000

统一书号:13031·1527

本社书号:2093·13—3

定价:2.15元

前 言

置换群的内、外积约化问题,在群论应用中占有很重要的地位。人们早就知道^[1,2] SU_{mn} 群的 IR (不可约表示)相对于其子群 $SU_m \times SU_n$ 的约化规则和置换群内积约化规则相同,而 SU_{m+n} 群的 IR 相对于其子群 $SU_m \otimes SU_n$ 的约化规则及 SU_n 群直乘表示的约化规则和置换群外积约化规则相同。置换群内、外积的约化规则也早已为人们所了解。六十年代还将这些约化规则的计算程序化,用电子计算机算出了一批置换群内、外积约化规则表^[2]。内积约化规则又称 CG (Clebsch-Gordan) 序列,外积约化规则常称为 Littlewood 规则^[3]。可是,另一方面,对置换群内外积约化系数的研究远远落在后面,主要表现在下列两方面。

1. 对内、外积约化系数的意义认识不足,而以上提到的置换群和酉群的一些约化规则上的联系,仅仅是这两个群之间深刻的内在联系的一种表面现象¹⁾。我们证明了^[4,5]这两个群在约化系数方面也有着很多密切的联系。例如置换群内积约化系数即 Clebsch-Gordan 系数(以下简称为 CG 系数或 CGC)就是将 SU_m 和 SU_n 群的 IR 基耦合成 SU_{mn} 群 IR 基的耦合系数^[5]。在轻核结构和核反应理论中常常要用到 $SU_4 \supset SU_2 \times SU_2$ 分类基,在基本粒子层子模型中常常要用到 $SU_6 \supset SU_3 \times SU_2$ 或 $SU_8 \supset SU_4 \times SU_2$ 等分类基,利用 CG 系数就可以很方便地构造 m, n 为任意值的 $SU_{mn} \supset SU_m \times SU_n$ 分类基。

类似地,置换群外积约化系数 (Outer-Product Reduction Coefficient, 缩写为 ORC)就是将任一 SU_m 和 SU_n 群 IR 基耦合成 SU_{m+n} 群 IR 基的耦合系数^[5],利用 ORC 就可方便地构造 m, n 为任意值的 $SU_{m+n} \supset SU_m \otimes SU_n$ 分类基。此外,我们还证明了^[4]任何 SU_n 群的 CG 系数都可由置换群 ORC 简单导出,这样就为计算 SU_n 群 CG 系数提供了另一种很有效的方法——由 ORC 同时求出所有 SU_n 群的 CG 系数(即不必像通常那样,要一个 n 、一个 n 地计算 CG 系数),解决了高维酉群 CG 系数计算的困难。

文章[24]中证明了置换群 $S_f \supset S_{f_1} \otimes S_{f_2} (f_1 + f_2 = f)$ 同位标量因子(iso scalar factor)就是分出 f_2 个粒子的 $SU_{mn} \supset SU_m \times SU_n$ 母分系数(fractional parentage coefficients),而置换群 $S_f \supset S_{f_1} \otimes S_{f_2}$ 外积同位标量因子就是分出 f_2 个粒子的 $SU_{m+n} \supset SU_m \otimes SU_n$ 母分系数。因此,由置换群 CGC 和 ORC 又可方便地算得 m, n 为任意值的 $SU_{mn} \supset SU_m \times SU_n$ 和 $SU_{m+n} \supset SU_m \otimes SU_n$ 母分系数。

Shelepin^[25] 还指出置换群 S_f 的 CG 系数就是 Lorentz 群的母分系数[或相对论性母分系数(relativistic fractional parentage coefficients)]。

在理论物理或量子化学计算中常用到置换群 $S_{f_1+f_2} \supset S_{f_1} \otimes S_{f_2}$ 分类基到 $S_{f_1+f_2}$ 群 Yamanouchi 基的表象变换和酉群 $SU_{m+n} \supset SU_m \otimes SU_n$ 分类基到 SU_{m+n} 群 Gelfand 基之间的表象变换。利用 ORC 可方便地求得这两种系数^[5,24]。

2. 由于置换群代数结构的复杂性,因此,置换群的研究虽然已有上百年的历史,

1) 关于这两个群之间其它方面的一些联系见文献 [6—10]

但至今还没有内、外积约化系数表,甚至连外积约化系数这个名词也没有被提到过。Mahmoud 和 Cooper^[11] 用直接的方法计算了置换群 S_3 和 S_4 的 CGC。Hamermesh^[12] 比较详细地研究过置换群 CGC, 给出了一个计算置换群 CGC 的递推公式, 但 Hamermesh 本人也指出, 用这种递推公式计算 CGC 是一桩“厌烦”的工作, 他只给出了一个低维数的 CGC 表 (S_5 群 $[311] \times [311]$, 见 [12] p. 274)。后来 Sullivan^[10] 又对 bipartition (即配分为 $[a, b]$ 的情形) 多重性 (multiplicity) 为 1 的情形给出了另一个递推公式。这个公式仍然很繁, Sullivan 也未给出任何数值表。最近 Williams 和 Pursey^[13] 用改进了的投影算符法讨论了置换群外积约化问题, 但还没有讨论 ORC 问题。

我们在文章[14—16]中提出了一种新的有限群表示理论, 其特点是完全用量子力学的完备算符集方法来处理群表示问题, 把群表示论中的基本问题, 如计算特征标、 IR 基、不可约矩阵元和 CGC 等都归结为求群 G 的某种完备算符集的本征值和本征函数问题。这样就把求置换群的 CGC 和 ORC 问题归结为将置换群的第二类完备算符集 (CSCO-II) 在非耦合表象中的矩阵表示同时对角化, 为计算这两个重要系数提供了切实可行的方法。我们用 Algol-60 算法语言编写了程序, 在国产 TQ-16 电子计算机上算得了 $S_f (f \leq 6)$ 的 CGC 和 ORC。

本书分两部分, 第一部分介绍置换群 CGC 和 ORC 的性质、用途、计算方法和计算程序。第二部分为置换群 $S_f (f \leq 6)$ 的 CGC¹⁾ 和 ORC 表, 这里关于内外积约化系数的一般理论写得比较简略, 读者进一步可参考文章[24]第四章。

吴式枢教授仔细审阅了本书, 王凡同志和我们作过多次有益的讨论, 周孝谦教授和王凡同志仔细阅读了原稿, 提出了不少宝贵意见, 作者表示衷心的感谢。

何雪初教授, 王家松, 姚充国, 陈沫天, 黄楚珊等同志在选择计算方案, 编制程序等方面给了我们很多的帮助, 上海光机所, 南京天文仪器厂, 南京 513 厂计算机房的同志不辞劳苦, 帮助我们克服了计算过程中碰到的种种困难, 作者在此一并致谢。

1) S_6 群 $[321] \times [321] \rightarrow [321]$ 的 CG 系数表, 因维数太高, 没有列出。

目 录

前言	iii
----------	-----

第 一 部 分

第一章 置换群标准基的标志和求法	1
第二章 置换群 CG 系数	6
2.1 置换群的内积	6
2.2 计算置换群 CG 系数的本征函数法	6
2.3 置换群 CG 系数的性质	10
2.4 置换群 CG 系数的用途	11
2.5 CG 系数计算程序说明	16
附录 1 置换群 CG 系数计算程序	24
第三章 置换群外积约化系数	30
3.1 置换群的外积	30
3.2 置换群外积约化系数及其性质	32
3.3 计算外积约化系数的本征函数法	35
3.4 置换群外积约化系数的用途	38
3.5 外积约化系数计算程序说明	46
附录 2 置换群外积约化系数计算程序	51
参考文献	61

第 二 部 分

I. CG 系数表	62
II. 外积约化系数表	62

第 一 部 分

第一章 置换群标准基的标志和求法

一个群的 CGC 和所选取的 IR 基有关。下面我们讨论置换群 CGC 和 ORC 都是针对置换群标准基而言的。为方便读者,这里首先扼要介绍一下置换群标准基的定义、求法和标志方法。

置换群的 Young-Yamanouchi 基^[12],或称为置换群标准基,是指按群链 $S_n(1, \dots, n) \supset S_{n-1}(1, \dots, n-1) \supset \dots \supset S_2(12)$ 的不可约表示分类的一种 IR 基。我们在文[15]中证明了 S_f 群及其子群的 $f-1$ 个二循环类算符 $(C_f, C_{f-1}, \dots, C_2)$ 构成 S_f 群的第二类完备算符集(CSCO-II),再根据文[14]定理 3 可知,求 S_f 群的标准基归结为求解以下联立本征方程:

$$C_n \Psi_m^{\nu \tau} = \lambda_n \Psi_m^{\nu \tau}, \quad n = f, f-1, \dots, 3, 2 \quad (1.1a)$$

$$(\nu, m) = (\lambda_f, \lambda_{f-1}, \dots, \lambda_2), \quad (1.1b)$$

这里 ν 代表不可约表示的标志,即配分数 $[\nu]$, m 为分量指标, τ 为多重性指标, C_n 为 $S_n(1, 2, \dots, n)$ 群二循环类算符

$$C_n = \sum_{j>i=1}^n (ij), \quad (1.2)$$

λ_n 为它的本征值, (1.1b) 式中的等号表示该式子左右两边一一对应。换言之, S_f 群的一个标准基可用 $(f-1)$ 个量子数 $(\lambda_f, \lambda_{f-1}, \dots, \lambda_2)$ 唯一标志,它和 $(f-1)$ 个 Yamanouchi 数 $(r_f, r_{f-1}, \dots, r_2, r_1 \equiv 1)$ 或和一个杨盘一一对应。对物理工作来说,用量子数 λ 标志一个 IR 基比用杨盘或 Yamanouchi 数标志更容易理解。下面讨论新老两种标志方法的联系。

1. S_f 群配分数 $[\nu] = [\nu_1, \nu_2, \dots]$ 和二循环类算符 C_f 的本征值 $\lambda_f^{(0)} \equiv \lambda_f$ 有很简单的关系。量子数 λ_f 等于属于 $IR[\nu]$ 的任一基函数中对称对的数目 N_s 和反对称对的数目 N_a 之差^[17], N_s 和 N_a 可这样来计算,处于杨图 $[\nu]$ 中同一行的粒子视为对称,处于同一列的粒子视为反对称,而不在同一行或同一列的粒子视为一半对称,一半反对称,因此对 $N_s - N_a$ 不起贡献。于是可立即写下 λ_f 的表达式:

$$\lambda_f = N_s - N_a = \sum_i \binom{\nu_i}{2} - \sum_i (\nu_i - \nu_{i+1}) \binom{l}{2} = \frac{f}{2} + \frac{1}{2} \sum_i \nu_i (\nu_i - 2l), \quad (1.3)$$

这里 $\binom{\nu_i}{l}$ 等代表二项式系数。此外还可证明,若 S_f 群配分 $[\nu]$ 对应于本征值 λ_f , 则共轭表示 $[\bar{\nu}]$ 对应于本征值 $-\lambda_f$; 自轭表示 $([\bar{\nu}] = [\nu])$ 的本征值 $\lambda_f = 0$ 。由此可见,量子数 λ 是 $IR[\nu]$ 中对称对多少的一种量度。例如 $(\lambda_f)_{\max} = \binom{f}{2}$ 对应于全对称表示 $[f]$,

$(\lambda_f)_{\min} = -\binom{f}{2}$ 对应于全反对称表示 $[1^f]$ 。表 1 给出配分 $[\nu]$ 和本征值 λ_f 的对照表。

注意, S_n 群的每一配分必对应一个本征值 λ_n , 但反之不然,例如由表 1 看到, S_6 群 $[411]$

表 1 S_n 群 ($n \leq 10$) 配分和本征值 λ_n 的对照表

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
$[\nu]$	[2]	[3] [21]	[4] [31] [22]	[5] [41] [32] [31 ²]	[6] [51] [42] [41 ²] [33] [321]	
$\lambda_n^{(\nu)}$	1	3 0	6 2 0	10 5 2 0	15 9 5 3 3 0	
		S_7			S_8	
$[\nu]$	[7] [61] [52] [51 ²] [43] [421] [3 ² 1] [41 ³]	[8] [71] [62] [61 ²] [53] [521] [51 ³] [4 ²] [431] [42 ²] [4211] [3 ³ 2]				
$\lambda_n^{(\nu)}$	21 14 9 7 6 3 1 0	28 20 14 12 10 7 4 8 4 2 0 0				
		S_9				
$[\nu]$	[9] [81] [72] [71 ²] [63] [621] [61 ³] [54] [531] [52 ²] [521 ²] [4 ⁴ 1] [432] [431 ²] [51 ⁴] [3 ³]					
$\lambda_n^{(\nu)}$	36 27 20 18 15 12 9 12 8 6 4 6 3 1 0 0					
		S_{10}				
$[\nu]$	[10] [91] [82] [81 ²] [73] [721] [71 ³] [64] [631] [62 ²] [621 ²] [61 ⁴] [5 ³] [541] [532] [531 ²] [52 ³ 1] [4 ³ 2] [4 ² 1 ²] [43 ²] [4321] [521 ³]					
$\lambda_n^{(\nu)}$	45 35 27 25 21 18 15 17 13 11 9 5 15 10 7 5 3 3 3 0 0					

注 1. 第一行是传统用的配分 $[\nu] = [\nu_1 \nu_2 \dots]$, 第二行是 S_n 的二循环类算符的本征值 $\lambda_n^{(\nu)}$, 这二者的关系为:

$$\lambda_n^{(\nu)} = \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \sum_i \nu_i (\nu_i - 2i)$$

2. 和 $IR[\nu]$ 相共轭的表示 $[\bar{\nu}]$ 对应于本征值 $\lambda_n^{(\bar{\nu})} = -\lambda_n^{(\nu)}$, 为了节省篇幅表中只列出了 $\lambda_n^{(\nu)} \geq 0$ 的部分.

和 [33] 都对应于 $\lambda_6 = 3$, S_6 群 [4211] 和 [332] 都对应于 $\lambda_8 = 0$, 等。

2. 有了表 1, 就很容易求得置换群标准基新、老标志的对应关系。我们知道, 标志置换群标准基的杨盘或 Yamanouchi 数的含义是根据分支律^[12]来确定的。例如 S_6 群 [411] 表示第二分量 $\psi_2^{[411]} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 5 \\ \hline 4 & & & \\ \hline 6 & & & \\ \hline \end{array}$ 属于 $S_6 \supset S_5 \supset S_4 \supset S_3 \supset S_2$ 表示。由表 1 可

知, 配分 [411], [41], [31], [3], [2] 分别对应于本征值 3, 5, 2, 3, 1。因此 IR 基 $\psi_2^{[411]}$ 的新标志为 $\lambda = (\lambda_6, \lambda_5, \lambda_4, \lambda_3, \lambda_2) = (3, 5, 2, 3, 1)$ 。作为例子, 表 2 给出了 S_6 群 [411] 和 [33] 表示 IR 基的三种标志方法的对照, 表中第一行为量子数 λ , 第二行为 Yamanouchi 数, 第三行为杨盘。

表 2 S_6 群的 [411] 和 [33] 表示 IR 基的三种标志方法

ψ_λ	$\psi_{3,5,6,3,1}$	$\psi_{3,5,2,3,1}$	$\psi_{3,5,2,0,1}$	$\psi_{3,5,2,0,-1}$	$\psi_{3,0,2,3,1}$
$\psi(r)$	$\psi(321111)$	$\psi(312111)$	$\psi(311211)$	$\psi(311121)$	$\psi(132111)$
标准杨盘	$\begin{array}{ c c c c } \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 5 & & & \\ \hline 6 & & & \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c c c } \hline 1 & 2 & 3 & 5 \\ \hline 4 & & & \\ \hline 6 & & & \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c c c } \hline 1 & 2 & 4 & 5 \\ \hline 3 & & & \\ \hline 6 & & & \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c c c } \hline 1 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 2 & & & \\ \hline 6 & & & \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c c c } \hline 1 & 2 & 3 & 6 \\ \hline 4 & & & \\ \hline 5 & & & \\ \hline \end{array}$
ψ_λ	$\psi_{3,0,2,0,1}$	$\psi_{3,0,2,0,-1}$	$\psi_{3,0,-2,0,1}$	$\psi_{3,0,-2,0,-1}$	$\psi_{3,0,-2,-3,-1}$
$\psi(r)$	$\psi(131211)$	$\psi(131121)$	$\psi(113211)$	$\psi(113121)$	$\psi(111321)$
标准杨盘	$\begin{array}{ c c c c } \hline 1 & 2 & 4 & 6 \\ \hline 3 & & & \\ \hline 5 & & & \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c c c } \hline 1 & 3 & 4 & 6 \\ \hline 2 & & & \\ \hline 5 & & & \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c c c } \hline 1 & 2 & 5 & 6 \\ \hline 3 & & & \\ \hline 4 & & & \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c c c } \hline 1 & 3 & 5 & 6 \\ \hline 2 & & & \\ \hline 4 & & & \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c c c } \hline 1 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 2 & & & \\ \hline 3 & & & \\ \hline \end{array}$
ψ_λ	$\psi_{3,2,2,3,1}$	$\psi_{3,2,2,0,1}$	$\psi_{3,2,2,0,-1}$	$\psi_{3,2,0,0,1}$	$\psi_{3,2,0,0,-1}$
$\psi(r)$	$\psi(222111)$	$\psi(221211)$	$\psi(221121)$	$\psi(212211)$	$\psi(212121)$
标准杨盘	$\begin{array}{ c c c } \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & 6 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c c } \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & 5 & 6 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c c } \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 5 & 6 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c c } \hline 1 & 2 & 5 \\ \hline 3 & 4 & 6 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c c } \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 4 & 6 \\ \hline \end{array}$

我们还可以把新、老标志的对应关系, 用一个“航线图”形象地表示出来。例如 $S_6 \rightarrow S_5 \rightarrow \dots \rightarrow S_2$ 的约化过程可用图 1 所示的“航线图”来表示。每个配分 $[\nu]$ 下面圆括号内的数为本征值 λ_ν 。从任一 $[\nu]$ 出发, 由箭号所指的每一条“航线”就对应一个标准基, 箭号所经过的一系列本征值就可用来标志这个标准基。从任一 $[\nu]$ 出发的“航线”总数就是 $IR[\nu]$ 的维数 h_ν 。

以下为方便起见, 称 $\lambda_2 = \pm 1$ 为该 IR 基的“宇称”

3. 对应于每一个基 ψ_λ , 必定有一个基 $\psi_{-\lambda}$, 这里 $-\lambda \equiv (-\lambda_6, -\lambda_5, -\lambda_4, -\lambda_3, -\lambda_2)$ 。又由于 $\pm \lambda_\nu$ 对应于 S_n 群互为共轭的表示 $[\nu]$ 和 $[\bar{\nu}]$, 所以 ψ_λ 和 $\psi_{-\lambda}$ 对应于互为转置的两个杨盘, 例如

$$\psi_{3,2,2,3,1} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & 6 \\ \hline \end{array}, \quad \psi_{-3,-2,-2,-3,-1} = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 4 \\ \hline 2 & 5 \\ \hline 3 & 6 \\ \hline \end{array}.$$

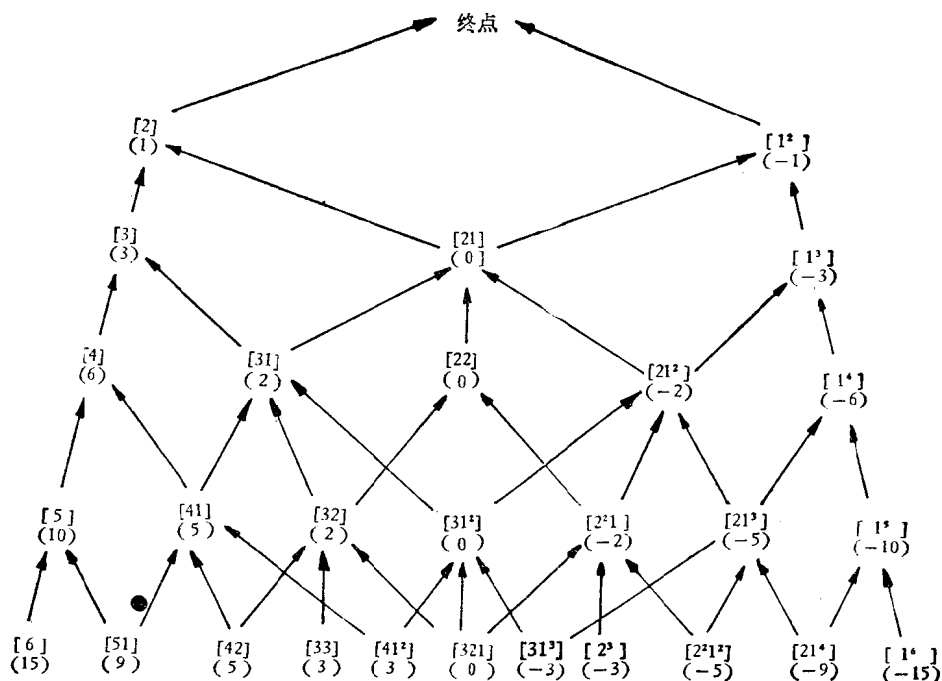


图1 $n \leq 6$ 的置换群的约化及其标准基的图示。

4. ψ_λ 为正交归一基

$$\langle \psi_\lambda | \psi_{\lambda'} \rangle = \delta_{\lambda_n \lambda'_n} \delta_{\lambda_{n-1} \lambda'_{n-1}} \cdots \delta_{\lambda_2 \lambda'_2}. \quad (1.4)$$

5. 我们可以把 $\lambda = (\lambda_n, \lambda_{n-1}, \dots, \lambda_2)$ 看成一个 n 维矢量, 并定义, 如果 λ 的头一个不为零的分量大于零, 则称 λ 为正 (记为 $\lambda > 0$); 若 $\lambda - \lambda' > 0$, 则称 $\lambda > \lambda'$. 这样定义后, λ 从大到小的排列顺序就和习惯上常用的 Yamanouchi 数的顺序^[12]完全一致, 例如

$$\begin{aligned} |[32]1\rangle &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} & |[32]2\rangle &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} & |[32]3\rangle &= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \\ \lambda &= (2, 2, 3, 1) & (2, 2, 0, 1) & (2, 2, 0, -1) \\ \text{Yamanouchi 数 } r &= (22111) & (21211) & (21121) \\ |[32]4\rangle &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} & |[32]5\rangle &= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \\ & (2, 0, 0, 1) & (2, 0, 0, -1) \\ & (12211) & (12121) \end{aligned} \quad (1.5)$$

位相问题 由本征方程 (1.1) 得到的本征函数 ψ_m^ν 的位相是可以自由选择的. 常用的 Young-Yamanouchi 基的标准位相是这样确定的, 即规定 S_f 群相邻对换 (Transposition) T 的非对角矩阵元永远大于等于零^[12]

$$D_{m'm}^\nu(T) \geq 0, \quad T = (12), (23), \dots, (n-1, n).$$

为了使本征函数法求得的 IR 基和 Young-Yamanouchi 基包括位相在内完全一致, 我们可以这样做. 利用对换算符 T 的以下性质

$$T \Psi_m^{\nu\tau} = D_{mm}^\nu(T) \Psi_m^{\nu\tau} + D_{m'm}^\nu(T) \Psi_{m'}^{\nu\tau}, \quad (1.6)$$

这里 $D^{\nu}(T)$ 为不可约矩阵。只有当量子数 $(\nu m')$ 和 (νm) 所对应的杨盘 $Y_{m'}^{\nu}$ 和 Y_m^{ν} 满足

$$Y_{m'}^{\nu} = T Y_m^{\nu} \quad (1.7)$$

时, $D_{m'm}^{\nu}(T)$ 才不为零。由 (1.6) 式得

$$\Psi_{m'}^{\nu r} = [T - D_{mm}^{\nu}(T)] \Psi_m^{\nu r} / D_{m'm}^{\nu}(T). \quad (1.8)$$

因此, 我们只需由本征方程 (1.1) 求出 $IR(\nu_r)$ 的任一个分量 m 的解 $\Psi_m^{\nu r}$, 选择适当的对换算符, 并利用对换算符的标准矩阵元 $D^{\nu}(T)$, 就可由 (1.8) 式求出该 $IR(\nu_r)$ 内其余所有分量解。这样做既减少了解本征方程的次数(对每一 $IR(\nu)$ 只要解一次), 又能保证满足标准位相, 一举两得。例如, 若已解出 $[32]$ 表示第一分量 $|[32]1\rangle$, 由 (1.5), (1.7) 式知, $Y_{\frac{1}{2}}^{[32]} = (34) Y_{\frac{1}{2}}^{[32]}$, 因此选 $T = (34)$, 利用 (1.8) 式就能由 $|[32]1\rangle$ 求得 $|[32]2\rangle$; 类似地再选 $T = (23)$, 就可由 $|[32]2\rangle$ 求得 $|[32]3\rangle$; 选 $T = (45)$, 可由 $|[32]2\rangle$ 求得 $|[32]4\rangle$; 选 $T = (23)$ 可由 $|[32]4\rangle$ 求得 $|[32]5\rangle$ 。

第二章 置换群 CG 系数¹⁾

2.1 置换群的内积

大家知道,一个微观粒子的状态可用 Hilbert 空间中的一个矢量 $\psi(q)$ 来表示,这里 q 代表粒子的坐标,既包括粒子的空间坐标 x, y, z , 也包括内部自由度坐标,如电子的自旋、核子的自旋、同位旋坐标等等.讨论一个由 f 个粒子组成的系统的置换对称性时,常常将粒子坐标分成两部分,一部分记为 x , 一部分记为 ξ . x 可以代表空间坐标 x, y, z ; ξ 代表自旋,或自旋-同位旋坐标;也可以是 x 代表同位旋或么旋坐标, ξ 代表自旋坐标等等.于是有三种置换群 S_f :

置换群	$S_f(x)$	$S_f(\xi)$	$S_f(q), q_i = (x_i, \xi_i)$
群元	${}^x R$	${}^\xi R$	${}^q R \equiv R$

(2.1)

根据定义,显然有

$$[{}^x R, {}^\xi R] = 0, \quad R = {}^x R {}^\xi R. \quad (2.2)$$

置换群 $S_f(q)$ 就是 $S_f(x)$ 和 $S_f(\xi)$ 的内积. 如何将 $S_f(x)$ 的 $[v_1] IR$ 基和 $S_f(\xi)$ 的 $[v_2] IR$ 基之积线性组合成 $S_f(q)$ 的 $[v]$ 不可约基,就是置换群内积约化问题,记为

$$[v_1] \times [v_2] = \sum_{\nu} (v_1 v_2 \nu) [v]. \quad (2.3)$$

(2.3)式称为 CG 序列,式中 $(v_1 v_2 \nu)$ 为直乘表示 $[v_1] \times [v_2]$ 中包含 $[v]$ 的次数,它可用置换群特征标 χ_i^{ν} 表示出来^[12]:

$$(v_1 v_2 \nu) = \frac{1}{g} \sum_i g_i \chi_i^{\nu_1} \chi_i^{\nu_2} \chi_i^{\nu} \quad (2.4)$$

$(v_1 v_2 \nu)$ 满足以下对称关系:

$$\begin{aligned} (v_1 v_2 \nu) &= (v_2 v_1 \nu) = (v_1 \nu v_2), \\ (v_1 v_2 \nu) &= (\tilde{v}_1 \tilde{v}_2 \nu) = (v_1 \tilde{v}_2 \tilde{\nu}) = (\tilde{v}_1 \nu_2 \tilde{\nu}). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Itzykson 等^[2]给出了八个粒子以内 $(v_1 v_2 \nu)$ 的数值表.

2.2 计算置换群 CG 系数的本征函数法

若 $\varphi_{m_1}^{\nu_1}(x)$ 和 $\phi_{m_2}^{\nu_2}(\xi)$ 分别为 $S_f(x)$ 和 $S_f(\xi)$ 的 IR 基,它们的积

$$|m_1 m_2\rangle = \varphi_{m_1}^{\nu_1}(x) \phi_{m_2}^{\nu_2}(\xi) \quad (2.6)$$

构成 $S_f(q)$ 的可约基,利用置换群 CGC 可以将它组合成 $S_f(q)$ 的 IR 基 $\Psi_m^{\nu}(q)$:

1) 本章内容可参考文献 [24] 第四章

$$\Psi_m^\tau(q) = \sum_{m_1 m_2} C_{v_1 m_1, v_2 m_2}^{\tau m} |m_1 m_2\rangle, \quad \tau = 1, 2, \dots, (v_1 v_2 v). \quad (2.7)$$

由(2.2)(2.7)式容易证明, CGC 满足联立线性方程^[12]

$$\sum_{m_1 m_2 m} [A_{m_1' m_2' m, m_1 m_2 m}(R_a) - \delta_{m_1 m_1'} \delta_{m_2 m_2'} \delta_{m m'}] C_{v_1 m_1, v_2 m_2}^{\tau m} = 0, \quad a = 1, 2, \dots, f! \quad (2.8)$$

$$A_{m_1' m_2' m, m_1 m_2 m}(R_a) = D_{m_1 m_1'}^{v_1}(R_a) D_{m_2 m_2'}^{v_2}(R_a) D_{m m'}^v(R_a).$$

(2.8)式是一组 $f!$ 个包含三重求和的线性方程组, 直接用它来计算 CGC 是非常困难的, 而 Hamermesh^[12] 及 Sullivan^[10] 等人的改进方法也没有从根本上解决问题. 另一个熟知的方法是投影算符法^[18], 但由于它有一系列缺点^[15], 除了极少数低阶置换群外, 也无法用来计算置换群 CGC.

由于上述四种计算 CGC 的方法都有严重不足, 下面着重介绍用本征函数法求 CGC. 由(1.1)(2.7)式, 得出 CGC 满足的联立本征方程:

$$\sum_{m_1 m_2} [\langle m_1' m_2' | C_n | m_1 m_2 \rangle - \lambda_n \delta_{m_1 m_1'} \delta_{m_2 m_2'}] C_{v_1 m_1, v_2 m_2}^{\tau m} = 0, \quad n = f, f-1, \dots, 2; \quad \tau = 1, 2, \dots, (v_1 v_2 v) \quad (2.9a)$$

$$\langle m_1' m_2' | C_n | m_1 m_2 \rangle = \sum_{j>i=1}^n D_{m_1 m_1'}^{v_1}(ij) D_{m_2 m_2'}^{v_2}(ij). \quad (2.9b)$$

$N \times N$ 方阵 ($N = h_1 h_2$, h_1 和 h_2 分别为 $IR[v_1]$ 和 $[v_2]$ 的维数)

$$M_n = \|\langle m_1' m_2' | C_n | m_1 m_2 \rangle\| \quad (2.10)$$

是 $S_n(q)$ 群的二循环类算符 C_n 在非耦合表象 $|m_1 m_2\rangle$ 中的矩阵表示, 将 $f-1$ 个 $N \times N$ 矩阵 $M_f, M_{f-1}, \dots, M_2$ 同时对角化就得到置换群 CGC.

如果对一套本征值 $(v, m) = (\lambda_f, \lambda_{f-1}, \dots, \lambda_2)$ 方程组 (2.9a) 式只有一个线性独立解, 这表明 $(v_1 v_2 v) = 1$, 附加指标 τ 是多余的, 可以略去. 如果对一套本征值 (v, m) 方程组 (2.9a) 有 n_0 组线性独立解, 则表明 $(v_1 v_2 v) = n_0$, 仅用量子数 (v, m) 不能区分这 n 个线性独立解, 须用附加指标 τ 区别之. 适当选取 $(v_1 v_2 v)$ 组线性独立解 $C_{v_1 m_1, v_2 m_2}^{\tau m}$, 可使它满足一定的对称性[见后面 2.3 节], 并对不同的 τ 指标正交.

容易证明类算符 C_n 的矩阵元有以下对称性质:

(1) 由 (2.9b) 式立即可知 M_n 为一实对称矩阵, 满足

$$\langle m_1' m_2' | C_n | m_1 m_2 \rangle = \langle m_1 m_2 | C_n | m_1' m_2' \rangle = \langle m_1' m_2 | C_n | m_1 m_2' \rangle = \langle m_1 m_2' | C_n | m_1' m_2' \rangle.$$

(2) 置换群标准矩阵元满足^[16]

$$D_{\tilde{m}' \tilde{m}}^v(R_a) = \delta_a \Lambda_{m'}^v \Lambda_m^v D_{m' m}^v(R_a), \quad (2.11)$$

这里 δ_a 为置换算符 R_a 的置换宇称, Λ_m^v 就是文[12](p.266)定义的位相因子. 由(2.11)和(2.9b)式得

$$\langle \tilde{m}_1' \tilde{m}_2' | C_n | \tilde{m}_1 \tilde{m}_2 \rangle = \Lambda_{m_1'}^{v_1} \Lambda_{m_2'}^{v_2} \Lambda_{m_1}^{v_1} \Lambda_{m_2}^{v_2} \langle m_1' m_2' | C_n | m_1 m_2 \rangle. \quad (2.12)$$

由上式可导出 CGC 的一个重要对称关系. 先将 (2.9a) 式改写成以下形式:

$$\sum_{m_1 m_2} \langle \tilde{m}_1' \tilde{m}_2' | C_n | \tilde{m}_1 \tilde{m}_2 \rangle C_{v_1 \tilde{m}_1, v_2 \tilde{m}_2}^{\tau m} = \lambda_n C_{v_1 \tilde{m}_1, v_2 \tilde{m}_2}^{\tau m}. \quad (2.13)$$

将 (2.11) 式代入, 得

$$\sum_{m_1 m_2} \langle m'_1 m'_2 | C_n | m_1 m_2 \rangle \Lambda_{m_1}^{v_1} \Lambda_{m_2}^{v_2} C_{\tilde{v}_1 \tilde{m}_1, \tilde{v}_2 \tilde{m}_2}^{v_1 m_1, v_2 m_2} = \lambda_n \Lambda_{m_1}^{v_1} \Lambda_{m_2}^{v_2} C_{\tilde{v}_1 \tilde{m}_1, \tilde{v}_2 \tilde{m}_2}^{v_1 m_1, v_2 m_2}. \quad (2.14)$$

比较 (2.9) 和 (2.14) 式可知

$$C_{\tilde{v}_1 \tilde{m}_1, \tilde{v}_2 \tilde{m}_2}^{v_1 m_1, v_2 m_2} = \sum_{\tau'} a_{\tau'} \Lambda_{m_1}^{v_1} \Lambda_{m_2}^{v_2} C_{v_1 m_1, v_2 m_2}^{\tau' m}, \quad (2.15a)$$

这里 $a_{\tau'}$ 为系数。当 v_1, v_2 不同时为自轭表示时, 我们总可以这样来选择本征方程的解, 使得下式成立:

$$C_{v_1 m_1, v_2 m_2}^{\tau' m} = (-)^{v_1 v_2 v_{\tau'}} \Lambda_{m_1}^{v_1} \Lambda_{m_2}^{v_2} C_{v_1 \tilde{m}_1, v_2 \tilde{m}_2}^{\tau' m}, \quad (2.15b)$$

这里 $(-)^{v_1 v_2 v_{\tau'}}$ 为一位相因子, 它只和 $v_1, v_2, v_{\tau'}$ 有关。因为 CGC 的绝对位相可自由选择, 因此 $(-)^{v_1 v_2 v_{\tau'}}$ 可取 +1 或 -1。我们都只对第一行之长大于等于第一列之长的 v_1, v_2 给出 CGC 表, 利用 (2.15b) 式就可得到第一行之长小于第一列之长的 v_1, v_2 的 CGC 表。

当 v_1, v_2 都为自轭表示 ($[v_1] = [\tilde{v}_1], [v_2] = [\tilde{v}_2]$) 时, 如果

(a) 多重性为 1, 则 (2.15b) 式仍满足, 但这时相因子 $(-)^{v_1 v_2 v_{\tau'}}$ 不再是自由选择的了, 而由置换群 IR 基的相对位相约约定所决定, 也就是说由算出来的 CG 系数表本身所决定。

(b) 多重性为 2, 这时有两种可能, 一是两套系数 $C_{v_1 m_1, v_2 m_2}^{[v]_{\alpha}, m}$ 和 $C_{v_1 m_1, v_2 m_2}^{[v]_{\beta}, m}$ 都为“对称” [即 (2.15b) 式中的因子 $(-)^{v_1 v_2 v_{\tau'}} = 1$] 或都为“反对称” [即 (2.15b) 式中的因子 $(-)^{v_1 v_2 v_{\tau'}} = -1$], 则计算出的 CGC 自动满足 (2.15b) 式。二是两套系数中既有“对称”成分又有“反对称”成分, 则计算出的 CGC 一般不会自动满足 (2.15b) 式, 但一定可以通过适当线性组合, 使得一套系数满足“对称” (即 $(-)^{v_1 v_2 v_{\alpha}} = 1$), 另一套满足“反对称” ($(-)^{v_1 v_2 v_{\beta}} = -1$)。

(c) 多重性大于 2, 对六个粒子以内的置换群内积约化问题, 只在以下情况出现多重性大于 2。(1) 当 $[v_1] = [42]$ 或 $[411]; [v_2] = [v] = [321]$; 组合方法见 (2.63) 式 (2)。当 $[v_1] = [v_2] = [v] = [321]$, 这时由于维数 N 太大 ($N = 16 \times 16 = 256$), TQ-16 机器内存容量不够, 我们没有计算其 CGC。

下面讨论 CGC 的计算方法。令 IR 基 $|[v_i] m_i\rangle$ 对应的量子数为 $(\lambda_i^{(1)} \cdots \lambda_i^{(i)})$, 由

$$\begin{aligned} C_2 &= (12) = {}^*C_2 {}^{\xi}C_2 \\ {}^*C_2 |[v_1] m_1\rangle &= \lambda_2^{(1)} |[v_1] m_1\rangle, \quad {}^{\xi}C_2 |[v_2] m_2\rangle = \lambda_2^{(2)} |[v_2] m_2\rangle, \\ C_2 |m_1 m_2\rangle &= \lambda_2 |m_1 m_2\rangle, \quad \lambda_2 = \lambda_2^{(1)} \lambda_2^{(2)}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

立即得到

$$\langle m'_1 m'_2 | C_2 | m_1 m_2 \rangle = \lambda_2 \delta_{m'_1 m_1} \delta_{m'_2 m_2}, \quad (2.17)$$

因此 M_2 为一对角矩阵, 故只需将 $f-2$ 个矩阵 $M_1 \cdots M_3$ 同时对角化, 就可求出 CGC。利用 (2.16) 式及

$$C_2^{-1} C_n C_2 = C_n, \quad n = f, f-1, \cdots 2. \quad (2.18)$$

得

$$\begin{aligned}\langle m'_1 m'_2 | C_2^{-1} C_n C_2 | m_1 m_2 \rangle &= \langle m'_1 m'_2 | C_n | m_1 m_2 \rangle, \\ \lambda'_2 \langle m'_1 m'_2 | C_n | m_1 m_2 \rangle &= \langle m'_1 m'_2 | C_n | m_1 m_2 \rangle.\end{aligned}$$

注意本征值 λ_2 和 λ'_2 只能取 ± 1 , 因此

$$\langle m'_1 m'_2 | C_n | m_1 m_2 \rangle = 0, \quad \text{当 } \lambda_2 \neq \lambda'_2. \quad (2.19)$$

上式表明, λ_2 值不同的乘积态之间没有耦合. 适当规定乘积态 $|m_1 m_2\rangle$ 的次序后, 所有 $(f-2)$ 个矩阵 M_n 都变为一准对角矩阵:

$$M_n = \begin{pmatrix} M_n^{(+)} & 0 \\ 0 & M_n^{(-)} \end{pmatrix}, \quad n = f, \dots, 3, \quad (2.20)$$

$$M_n^{(\pm)} = \|\langle m'_1 m'_2 | C_n | m_1 m_2 \rangle_{\pm}\|_1^{N_{\pm}}, \quad (2.21)$$

这里 $N_{\pm}$ 为 N 个乘积基 $|m_1 m_2\rangle$ 中, $\lambda_2 = \pm 1$ 态的数目, $N = N_+ + N_-$. 这样就把原来 $f-1$ 个 $N \times N$ 矩阵 $M_f \cdots M_2$ 同时对角化问题简化为将 $(f-2)$ 个矩阵 $M_f^{(+)} \cdots M_3^{(+)}$ 和 $(f-2)$ 个矩阵 $M_f^{(-)} \cdots M_3^{(-)}$ 分别同时对角化. 不但大大节省了计算机内存和计算时间, 而且给 CGC 列表也带来了很大方便, 每一个 CGC 表都可根据 $\lambda_2 = \pm 1$ 分解成两个分表列出.

例如若要求 S_4 群 $[31] \times [22]$ 的 CGC, $[31]$ 为三维表示, $[22]$ 为二维表示, $(m_1 m_2) \equiv |m_1 m_2\rangle = (11), (12), (21), (22), (31), (32)$ (这里 1, 2, 3 等为 Yamanouchi 基 $Y_{m_1}^a$, $Y_{m_2}^a$ 的编号, 见书末表 11); 其中 $(11), (21), (32)$ 属 $\lambda_2 = +1$, $(12), (22), (31)$ 属 $\lambda_2 = -1$. 由 (2.9b) 式可算得矩阵:

$$M_4 = \begin{pmatrix} (m_1 m_2) & \begin{matrix} (11) & (21) & (32) \end{matrix} & \begin{matrix} (12) & (22) & (31) \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{matrix} & \begin{matrix} \sqrt{2} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} 0 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 1 & -1 \end{matrix} \end{pmatrix},$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} \begin{matrix} (11) & (21) & (32) \end{matrix} & \begin{matrix} (12) & (22) & (31) \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 3/2 \\ 0 & 3/2 & 3/2 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2 & 3/2 \\ 0 & 3/2 & -3/2 \end{matrix} \end{pmatrix}.$$

它们都是准对角的, 把它们同时对角化, 就可得出 C_4 和 C_3 的本征值和本征向量, 即 CGC, 列在表 3.

从上例看到, 原则上说我们可不必预先知道 CG 序列, 只要将 (2.21) 式的矩阵同时对角化就能给出 CGC. 但如果利用现成的 CG 序列^[2], 则计算 CGC 问题变得更加简单, 具体的计算步骤见 2.5 节.

表 3 $[31] \times [22] = [31] + [211]$ CG 系数

正宇称 ($\lambda_2 = 1$) 解

λ_1	λ_2	$[\nu]m$	(11)	(21)	(32)
2	3	[31]1	0	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$
2	0	[31]2	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
-2	0	[211]1	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

负宇称 ($\lambda_2 = -1$) 解

λ_1	λ_2	$[\nu]m$	(12)	(22)	(31)
2	0	[31]3	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
-2	0	[211]2	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
-2	-3	[211]3	0	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$

2.3 置换群 CG 系数的性质

1. 么正性

$$\sum_{m_1 m_2} C_{[\nu_1]m_1, [\nu_2]m_2}^{[\nu]r, m} C_{[\nu_1]m_1', [\nu_2]m_2'}^{[\nu]r', m'} = \delta_{\nu\nu'} \delta_{rr'} \delta_{mm'},$$

$$\sum_{\nu r m} C_{[\nu_1]m_1, [\nu_2]m_2}^{[\nu]r, m} C_{[\nu_1]m_1', [\nu_2]m_2'}^{[\nu]r, m} = \delta_{m_1 m_1'} \delta_{m_2 m_2'}. \quad (2.22)$$

2. 当 $[\nu_1], [\nu_2]$ 和 $[\nu]$ 全不相等时, 有

$$\frac{1}{\sqrt{h_\nu}} C_{[\nu_1]m_1, [\nu_2]m_2}^{[\nu]r, m} = (-)^{\nu_1 \nu_2 \nu} \frac{1}{\sqrt{h_{\nu_1}}} C_{[\nu]m, [\nu_2]m_2}^{[\nu_1]r, m_1} = (-)^{\nu_1 \nu_2 \nu} \frac{1}{\sqrt{h_{\nu_2}}} C_{[\nu_1]m_1, [\nu]m}^{[\nu_2]r, m_2}, \quad (2.23)$$

这里 $(-)^{\nu_1 \nu_2 \nu}$ 为一相因子, 它只和 ν_1, ν_2, ν 有关. 因为 CGC 的绝对位相可自由选择, 因此 $(-)^{\nu_1 \nu_2 \nu}$ 可取 +1 或 -1.

3. 当 $[\nu_1] \neq [\nu_2]$ 时, 有

$$C_{[\nu_1]m_1, [\nu_2]m_2}^{[\nu]r, m} = (-)^{\nu_1 \nu_2 \nu} C_{[\nu_2]m_2, [\nu_1]m_1}^{[\nu]r, m}. \quad (2.24)$$

4. 当 $[\nu_1] = [\nu_2]$ 时, 有

$$C_{[\nu_1]m_1, [\nu_1]m_2}^{[\nu]r, m} = \delta_{\nu r} C_{[\nu]m, [\nu_1]m_2}^{[\nu_1]r, m_1}. \quad (2.25)$$

当 $IR[\nu]r$ 属于对称括号 $[(\nu_1) \times (\nu_1)]_s$ (定义见文 [12] p133) 时, $\delta_{\nu r} = 1$, 当 $IR[\nu]r$ 属于反对称括号 $\{(\nu_1) \times (\nu_1)\}_a$ 时, $\delta_{\nu r} = -1$. CGC 表 I 的表头中, 用下标 $s(a)$ 指明该 $IR[\nu]r$ 属于对称(反对称)括号, 因此由这些分表的表头可得出 $\delta_{\nu r}$ 值, 下同.

5. 当 $[\nu_1] = [\nu_2] \neq [\nu]$ 时, 有

$$\frac{1}{\sqrt{h_\nu}} C_{[\nu_1]m_1, [\nu_1]m_2}^{[\nu]r, m} = (-)^{\nu_1 \nu_1 \nu} \frac{1}{\sqrt{h_{\nu_1}}} C_{[\nu]m, [\nu_1]m_2}^{[\nu_1]r, m_1} = (-)^{\nu_1 \nu_1 \nu} \frac{1}{\sqrt{h_{\nu_1}}} \delta_{\nu r} C_{[\nu]m, [\nu_1]m_1}^{[\nu_1]r, m_2} \quad (2.26)$$

6. 由性质 5, 立即得到

$$C_{[\nu]m, [\nu_1]m_2}^{[\nu_1]r, m_1} = \delta_{\nu r} C_{[\nu]m, [\nu_1]m_1}^{[\nu_1]r, m_2},$$

$$C_{[\nu_1]m_1, [\nu]m}^{[\nu_1]r, m_2} = \delta_{\nu r} C_{[\nu_1]m_1, [\nu_1]m}^{[\nu_1]r, m_2}. \quad (2.27)$$

7. 由 (2.25), (2.27) 式得到 $[\nu_1] = [\nu_2] = [\nu]$ 时的对称性:

$$C_{[\nu]m_1, [\nu]m_2}^{[\nu]r, m} = \delta_{\nu r} C_{[\nu]m_2, [\nu]m_1}^{[\nu]r, m} = \delta_{\nu r} C_{[\nu]m, [\nu]m_2}^{[\nu]r, m_1} = \delta_{\nu r} C_{[\nu]m_1, [\nu]m}^{[\nu]r, m_2}. \quad (2.28)$$

1) 从 Hamermesh^[12] (7-207b) 式出发, 容易证明他定义的两个相因子 e_{r2} 和 δ_{r2} 相等. Hamermesh 的 δ_{r2} 就是我们这里的 $\delta_{\nu r}$.

8.

$$\begin{aligned}
C_{\nu_1 m_1, \nu_2 m_2}^{\tau m} &= (-)^{\nu_1 \nu_2 \tau} \Lambda_{m_1}^{\nu_1} \Lambda_{m_2}^{\nu_2} C_{\bar{\nu}_1 \bar{m}_1, \bar{\nu}_2 \bar{m}_2}^{\tau m}, \quad (\text{当 } [\nu_1], [\nu_2] \text{ 不全为自轭表示}) \\
&= (-)^{\nu_1 \nu_2 \tau} \Lambda_{m_1}^{\nu_1} \Lambda_m^{\nu} C_{\bar{\nu}_1 \bar{m}_1, \nu_2 m_2}^{\tau m}, \quad (\text{当 } [\nu_1], [\nu] \text{ 不全为自轭表示}) \\
&= (-)^{\nu_1 \nu_2 \tau} \Lambda_{m_2}^{\nu_2} \Lambda_m^{\nu} C_{\nu_1 m_1, \bar{\nu}_2 \bar{m}_2}^{\tau m}, \quad (\text{当 } [\nu_2], [\nu] \text{ 不全为自轭表示}) \quad (2.29a)
\end{aligned}$$

这里 $(-)^{\nu_1 \nu_2 \tau}$ 为可供自由选择的相因子。位相因子 Λ_m^{ν} 列在表 11。

如果上式括号中，所指明的条件不满足时，[例如 (2.29a) 第一式中，若 $[\nu_1]$ 和 $[\nu_2]$ 都为自轭表示，第二式中 $[\nu_1]$ 和 $[\nu]$ 都为自轭表示，等等]，则 (2.29a) 式仍然成立，但这时位相因子 $(-)^{\nu_1 \nu_2 \tau}$ 不再是可任意选择的了（因这时 $C_{\bar{\nu}_1 \bar{m}_1, \bar{\nu}_2 \bar{m}_2}^{\tau m}$ 和 $C_{\nu_1 m_1, \nu_2 m_2}^{\tau m}$ 属于同一个 CGC 表，等等）。现将后面表 I 中出现的这些特殊情形下的 CGC 对称性列在下面：

$$\begin{aligned}
(1) \quad C_{[22]m_1, [22]m_2}^{[22]m} &= -\Lambda_{m_1}^{[22]} \Lambda_{m_2}^{[22]} C_{[22]\bar{m}_1, [22]\bar{m}_2}^{[22]m} = -\Lambda_{m_1}^{[22]} \Lambda_{m_2}^{[22]} C_{[22]m_1, [22]m_2}^{[22]m}, \\
(2) \quad C_{[311]m_1, [41]m_2}^{[311]m} &= -\Lambda_{m_1}^{[311]} \Lambda_{m_2}^{[41]} C_{[311]\bar{m}_1, [41]\bar{m}_2}^{[311]m}, \\
(3) \quad C_{[311]m_1, [32]m_2}^{[311]\tau, m} &= -(-1)^{\tau} \Lambda_{m_1}^{[311]} \Lambda_{m_2}^{[31]} C_{[311]\bar{m}_1, [32]\bar{m}_2}^{\tau, m}, \quad \tau = 1, 2^{[31]}, \\
(4) \quad C_{[311]m_1, [311]m_2}^{[311]m} &= \Lambda_{m_1}^{[311]} \Lambda_{m_2}^{[311]} C_{[311]\bar{m}_1, [311]\bar{m}_2}^{[311]m} = \Lambda_{m_1}^{[311]} \Lambda_{m_2}^{[311]} C_{[311]m_1, [311]m_2}^{[311]m}, \\
(5) \quad C_{[51]m_1, [321]m_2}^{[321]\tau, m} &= C_{[51]m_1, [321]m_2}^{[321]\tau, m}, \quad \tau = 1, 2; \\
&= (-1)^{\tau} \Lambda_{m_1}^{[321]} \Lambda_{m_2}^{[321]} C_{[51]\bar{m}_1, [321]\bar{m}_2}^{\tau, m}, \quad \tau = 1, 2, \\
(6) \quad C_{[33]m_1, [321]m_2}^{[321]\tau, m} &= -(-1)^{\tau} C_{[33]m_1, [321]m_2}^{[321]\tau, m}, \quad \tau = 1, 2; \\
&= -(-1)^{\tau} \Lambda_{m_1}^{[321]} \Lambda_{m_2}^{[321]} C_{[33]\bar{m}_1, [321]\bar{m}_2}^{\tau, m}, \quad \tau = 1, 2, \\
(7) \quad C_{[42]m_1, [321]m_2}^{[321]\tau, m} &= C_{[42]m_1, [321]m_2}^{[321]\tau, m}, \quad \tau = 1, 2, 3, \quad (2.29b) \\
&= (-1)^{\tau} \Lambda_{m_1}^{[321]} \Lambda_{m_2}^{[321]} C_{[42]\bar{m}_1, [321]\bar{m}_2}^{\tau, m}, \quad \tau = 1, 2, 3, \quad (2.29c) \\
(8) \quad C_{[411]m_1, [321]m_2}^{[321]\tau, m} &= C_{[411]m_1, [321]m_2}^{[321]\tau, m}, \quad \tau = 1 = -C_{[411]m_1, [321]m_2}^{[321]\tau, m}, \quad \tau = 2, 3, 4, \quad (2.29d) \\
&= (-1)^{\tau} \Lambda_{m_1}^{[321]} \Lambda_{m_2}^{[321]} C_{[411]\bar{m}_1, [321]\bar{m}_2}^{\tau, m}, \quad \tau = 1, 2, 3, 4. \quad (2.29e)
\end{aligned}$$

特例 当 $[\nu_1], [\nu_2], [\nu]$ 中有一个为全对称表示 $[n]$ 或全反对称表示 $[1^n]$ 时，CGC 很简单，

$$\begin{aligned}
C_{[\nu_1]m_1, [n]1}^{[\nu]m} &= \delta_{\nu\nu_1} \delta_{mm_1}, \quad C_{[\nu_1]m_1, [\nu_2]m_2}^{[n]1} = \frac{1}{\sqrt{h_{\nu_1}}} \delta_{\nu_1 \nu_2} \delta_{m_1 m_2}, \\
C_{[\nu_1]m_1, [1^n]1}^{[\nu_2]m_2} &= \Lambda_{m_1}^{\nu_1} \delta_{\nu_1 \nu_2} \delta_{m_1 m_2}, \quad C_{[\nu_1]m_1, [\nu_2]m_2}^{[1^n]1} = \frac{\Lambda_{m_1}^{\nu_1}}{\sqrt{h_{\nu_1}}} \delta_{\nu_1 \nu_2} \delta_{m_1 m_2}. \quad (2.30)
\end{aligned}$$

2.4 置换群 CG 系数的用途

1. 由 $S_f(x)$ 和 $S_f(\xi)$ 的标准基 $\varphi_{m_1}^{\nu_1}(x)$ 和 $\psi_{m_2}^{\nu_2}(\xi)$ 构造 $S_f(q)$ 的标准基

$$\Psi_m^{\nu}(q) = \sum_{m_1 m_2} C_{\nu_1 m_1, \nu_2 m_2}^{\nu m} \varphi_{m_1}^{\nu_1}(x) \psi_{m_2}^{\nu_2}(\xi). \quad (2.31a)$$

2. 构成 $SU_m \supset SU_m \times SU_n$ 分类基。若在 x 空间有 m 个态 $\varphi_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, m$, $[\varphi_i(x)]$ 为单粒子态，它们构成 SU_m 群基本表示 $[1]$ ；又若在 ξ 空间有 n 个态 $\chi_a(\xi)$,

[注] 后面 CGC 表中分别用记号 $[\nu\alpha], [\nu\beta], [\nu\gamma], [\nu\delta]$ 代表 $[\nu]\tau = 1, [\nu]\tau = 2, [\nu]\tau = 3, [\nu]\tau = 4$ 。

$\alpha = 1, 2, \dots, n$ ($\chi_\alpha(\xi)$ 也为单粒子态), 它们构成 SU_n 群基本表示 [1], 则在 $q = (x, \xi)$ 空间有 mn 个单粒子态 $\psi_s(q)$,

$$s = (i\alpha) = (1, 1), (1, 2), \dots, (1, n), (2, 1), \dots, (m, n),$$

它们构成 SU_{mn} 群的基本表示.

例如基本粒子 SU_6 模型中, x 空间为么旋空间, i 代表三种层子态 p, n, λ , 它们构成 SU_3 的基本表示, 而 ξ 空间为自旋空间, α 代表自旋朝上 (α) 或自旋朝下 (β). 于是 q 空间中 $s = (p\alpha), (p\beta), (n\alpha), (n\beta), (\lambda\alpha), (\lambda\beta)$ 构成 SU_6 的基本表示.

下面考虑由单粒子乘积态构成的 f 个粒子的多体波函数. 这种多体波函数可以用它在置换群 S_f 及其子群链作用下的变换性质, 和它在酉群 SU_m (或 SU_n 等) 及其子群链作用下的变换性质完全确定. 假定

$$\begin{aligned} \varphi_{m_1}^{[v_1]}(x, W_1) &\equiv \left| \begin{matrix} [v_1] \\ W_1 \end{matrix} \right\rangle_{m_1} \quad \text{为 } S_f(x) \text{ 群的标准基 } ([v_1]m_1), \\ &\quad SU_m \text{ 群的不可约基 } ([v_1]W_1), \\ \chi_{m_2}^{[v_2]}(\xi, W_2) &\equiv \left| \begin{matrix} [v_2] \\ W_2 \end{matrix} \right\rangle_{m_2} \quad \text{为 } S_f(\xi) \text{ 群的标准基 } ([v_2]m_2), \\ &\quad SU_n \text{ 群的不可约基 } ([v_2]W_2), \end{aligned} \quad (2.31b)$$

这里 W_1 和 W_2 分别为 SU_m 和 SU_n 群不可约表示的分量指标. 以下为明确起见, 假定我们取 SU_m 和 SU_n 的不可约基为酉群 Gelfand 基^[9], 不过要记住, 以下的讨论对非 Gelfand 基仍然成立.

所谓 U_n 群 (或 SU_n 群) 的 Gelfand 基, 是指按群链

$$U_n \supset U_{n-1} \supset \dots \supset U_2 \supset U_1$$

的 IR 分类的一种基, 它可用一个 Gelfand 符号

$$\left| \left(\begin{matrix} [v] \\ m \end{matrix} \right) \right\rangle = \begin{pmatrix} m_{1n} & m_{2n} & \dots & m_{nn} \\ & m_{1n-1} & \dots & m_{n-1, n-1} \\ & & \dots & \\ & & & m_{12} & m_{22} \\ & & & & m_{11} \end{pmatrix} \quad (2.31c)$$

来标志, 这个基属于 U_n 群的 $IR[v] = [m_{1n} \ m_{2n} \ \dots \ m_{nn}]$ (如果是 SU_n 群, 则 $m_{nn} = 0$), 属于子群 U_i 的 $IR[m_{1i}, m_{2i}, \dots, m_{ii}]$, $i = n-1, \dots, 2, 1$. U_n 群 Gelfand 基也可用一个 Weyl 盘^[6] (Bohr 等^[27]称之为 ρ_m 盘) 来标志, 对高维酉群来说, 用 Weyl 盘标志比用 Gelfand 符号标志更为方便. 我们知道, 标志置换群标准基的杨盘是在杨图 $[v]$ 上按熟知的规则填入粒子坐标编码 $1, 2, \dots, f$ 而构成的. 类似地, 标志 U_n 群 Gelfand 基的 Weyl 盘, 则是在杨图 $[v]$ 上按类似的规则填入单粒子态的编码 (或称为态指标) $1, 2, \dots, n$ 而构成的, Weyl 盘中态指标可以有重复, 但同一列上不能有相同指标. Weyl 盘和 Gelfand 符号之间的对应关系十分简单, 把 Weyl 盘中标以态指标 $i+1, i+2, \dots, n$ 的方格去掉后所剩下的杨图, 给出它所属的 U_i 群的 IR, 即 Gelfand 符号 (2.31c) 中的第 i 行数 $[m_{1i}, m_{2i}, \dots, m_{ii}]$. 在规定好单粒子态编码顺序后, 为了明显起见, 我们常常用单粒子态本身的名称代替其编码来构成 Weyl 盘. 例如, 前面所说的 SU_3 情形, 规定层子 p, n, λ 分别为第一、二、三号态后, SU_3 的一个 Gelfand 基就可用以下三种记号中的任一种来标志: