

Wending Lilun

稳 定 理 论

黎绍敏 编著

人民交通出版社

以图1-0-2(a)所示承受纵横弯曲的直杆丧失承载能力的情况为例,来说明丧失第二类稳定性的基本概念。

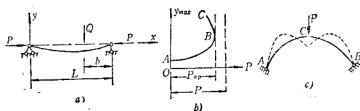


图 1-0-2

设该杆由弹塑性材料制成,其横向荷载保持不变,而轴向力 P 不断增加。每一个荷载 P 的数值对应着一定的挠度值,不过它们之间的关系是非线性的,轴向力 P 与最大挠度 $y_{\max}$ 的关系曲线,如图1-0-2(b)所示。

随着 P 逐渐接近于欧拉临界荷载 P_s ,杆件的挠度将迅速地增加(一般在 $P \geq 0.8 P_s$ 时,挠度已开始迅速增加)。首先是边缘纤维应力达到流限,随后塑性变形将向截面内部展开,在这过程中,挠度与荷载 P 之间的关系成非线性。但是,直到 P 达到某一极限值 P_{np} 之前,如果不继续加大轴向荷载 P ,则挠度将不会继续自动增加。在 P 达到极限值 P_{np} ($P_{np} < P_s$)时,即使不增加荷载,甚至减少荷载,挠度仍然继续增加(如在图1-0-2(b)中所示,当 P 达到 P_{np} 时,曲线 $y_{\max} = f(P)$ 开始向左边弯曲)。我们把这种现象称为丧失第二类稳定,或者准确地说,是丧失结构的承载能力。与此相应的轴向荷载 P_{np} ,就称之为丧失第二类稳定性的临界荷载。

又如图1-0-2(c)所示圆弧形三铰拱,在其拱顶承受集中力 P ,当 P 很小时,拱发生很小的弯曲, C 点有很小的竖向位移。随着 P 的加大,拱的弯曲逐渐增加,同时, C 点也逐渐下降。这种情况下,可能出现当荷载 P 不再增大,或甚至开始减小时,若挠度还在继续增加,则可以认为此时拱已丧失了第二类稳定性。

由此可见,丧失第二类稳定的基本特征是:

1. 丧失第二类稳定时,不会发生平衡形式的分支,不会出现新的、有质的区别的平衡形式,整个过程只是原来的平衡形式发生了数量的变化,同时,变形情况和应力状态也不发生质的变化。

2. 丧失第二类稳定时,结构丧失了承载能力,此时当荷载达到临界值时,即使不继续增加荷载,甚至减少荷载时,变形也会自行增加。

在不同的结构形式和不同的荷载情况下,丧失第一类稳定和丧失第二类稳定都可能发生。但要指出,在有些情况下,丧失两类稳定性的区别只有理论上的意义,实际上只有其中之一才是真正可能出现的,例如如图1-0-1(a)所示直杆,由于不可避免地存在有荷载作用的偏心,或者是杆轴的初弯曲,所以即使在荷载 P 很小时,杆件即处于纵横弯曲状态而有微小的弯曲发生。若继续加大荷载,则将在 P 达到欧拉临界荷载值 P_s 之前的某一数值 P_{np} 时,杆件因丧失承载能力而趋于破坏。故这一直杆实际上不可能发生丧失第一类稳定的问题。

不论是丧失第一类稳定,或第二类稳定,对于工程结构来说,都是不能容许的。

稳定理论

蒙绍敏 编著

人民交通出版社出版发行

(北京和平里东街10号)

各地新华书店经销

人民交通出版社印刷厂印刷

开本: 787×1092 1/32 印张: 32 字数: 792千

1989年11月 第1版

1989年11月 第1版 第1次印刷

印数: 0001—1000 册 定价: 19.40元

内 容 提 要

本书为全面介绍结构稳定理论的一本专著。全书分为三篇：第一篇为杆件结构的稳定理论，共 19 章；第二篇为板和壳体的稳定理论，共 9 章；第三篇为稳定计算习题，共 10 章。各篇均以大量计算公式论证了稳定理论的可靠性和精确性，对于结构稳定计算有相当的实用价值。

本书可供土木建筑、铁路和公路桥梁设计人员以及有关院校师生参考。

前言

从公元1744年著名的数学家欧拉解决压杆稳定后，开始建立了结构稳定这门科学。当一个结构受力后能维持原有的平衡位置或原有的变形状态时，我们就认为这个结构处于稳定平衡状态。若这个结构不能维持原有的平衡或状态时，我们就叫它失去稳定。

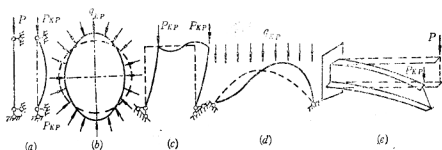


图 1-0-1

一般将结构稳定分为第一类稳定和第二类稳定。相应于丧失第一类稳定的最小临界荷载定义为：使结构维持原有平衡形式的（如图1-0-1(a)~(e)的虚线所示）极限荷载。当荷载超过最小临界荷载时，则在任何引起弯曲的附加因素作用下，杆件将发生巨大而迅速的变形，从而导致结构的破坏。

所以在丧失第一类稳定的情况下，结构的变形过程和应力状态也将发生质的变化。如图1-0-1(a)的中心受压直杆在丧失第一类稳定前，只是轴向压缩；而在失稳时，同时发生压缩和弯曲。因此有人将丧失第一类稳定叫做丧失应力状态的稳定。如图1-0-1(b)承受静水压力的薄壁圆环，当水压力 q 达到临界值 q_{KP} 以前，它维持圆形的平衡形式，管壁只是中心受压。在 q 达到 q_{KP} 时，原来的圆形不再是稳定的平衡形式，而变成新的、有质的区别的椭圆形平衡形式，同时管壁也将受到压缩与弯曲的联合作用。如图1-0-1(c)所示，在节点荷载作用下的刚架和图1-0-1(d)所示的承受均匀荷载的抛物线两铰拱，在荷载达到其临界值以前，都只有轴向压缩变形，而当荷载达到临界值时，则将同时承受压缩和弯曲变形，而采取新的平衡形式则如图中的实线所示。最后如图1-0-1(e)所示的薄壁工字梁，当荷载 P 达到临界值 P_{KP} 之前，工字梁只在其腹板所在的竖直平面内弯曲，保持平面弯曲的平衡形式。当 P 达到 P_{KP} 时，平面弯曲形式的平衡不再是稳定的。此时，梁将从原来的腹板平面内偏离出来，形成斜弯曲和扭转。

由此可见，在所有情况下，第一类稳定的丧失具有以下基本特征：

1. 在丧失第一类稳定的情况下，将要发生平衡形式的分支，使原来的平衡形式成为不稳定形式，而开始出现新的、有质的区别的平衡形式。
2. 变形情况与应力状态都随着发生质的变化。

再来研究第二类稳定：

目 录

前 言

第一篇 杆件结构的稳定理论

第一章 单自由度体系的稳定	1
第一节 体系的位能	1
第二节 平衡状态曲线	3
第三节 小变形条件下的近似解	4
第二章 多自由度体系	6
第一节 两个自由度体系	6
第二节 考虑有限变形时两个自由度体系的稳定	8
第三节 多自由度体系的稳定	8
第四节 能量法及近似解	9
第三章 有限自由度体系的稳定	12
第一节 弹性地基上实体结构的稳定	12
第二节 压力方向改变时柱的稳定	13
第三节 拉杆的稳定	14
第四节 球壳的稳定	15
第四章 无限自由度体系的稳定	18
第一节 弹性压杆的近似微分方程	18
第二节 杆端约束条件	19
第三节 杆端弹性约束	22
第四节 杆端弹性约束移动	26
第五章 压杆稳定的基本微分方程	30
第一节 压杆弯曲一般线性微分方程及其积分常数	30
第二节 起始条件	31
第三节 边界条件	33
第四节 边界条件的应用	36
第五节 相容条件(连续条件)	40
第六节 边界参数	42
第六章 压杆弹性稳定的进一步求解	43
第一节 用弯矩表示的压杆微分方程	43
第二节 压杆弯曲的位能	44
第七章 初参数法	46

第一节	一般公式	46
第二节	弹性支承连续梁轴向受压的稳定	48
第三节	刚性支承连续梁	50
第四节	无侧移的多跨多层刚架的稳定	53
第五节	梯形变截面柱的稳定	55
第六节	斯尼特科 (H.K. CHHTKO) 法	58
第七节	三力矩方程	61
第八章	压弯杆件的稳定	64
第一节	压弯杆件微分方程的一般解	64
第二节	压弯杆的简化方程	66
第三节	两端铰支的压弯杆件	68
第四节	拉弯杆的初参数方程	71
第九章	变截面杆的稳定	73
第一节	挠曲轴的一般方程	73
第二节	压力为常数	74
第三节	压力沿杆轴改变的等截面压杆	86
第四节	自重作用下的锥体和楔体的稳定	89
第五节	受压杆的最小重量	93
第十章	近似法	96
第一节	渐近法	96
第二节	有限差分法	98
第三节	弹性荷载法	100
第四节	勃布诺夫-伽辽金法	101
第五节	勃布诺夫-伽辽金修正法	102
第六节	A. H. Коробова 法	103
第七节	A. H. Коробова 与能量法联合的方法	104
第十一章	超过弹性极限的压杆稳定	106
第一节	中心受压杆超过弹性极限的稳定	106
第二节	压缩图形对曲线系数 φ 的影响的研究	110
第三节	截面形状的影响	112
第十二章	超过弹性极限的压弯杆稳定	117
第一节	超过弹性极限时偏心受压杆的一般计算方法	117
第二节	偏心压杆稳定的近似计算方法	119
第三节	矩形截面偏心受压杆的近似分析	121
第四节	理想工字截面偏心受压柱的稳定	126
第十三章	弹性地基上的压杆稳定	130
第一节	在液体基础上的压杆稳定	130
第二节	在液体基础上杆件的支承情况	131
第三节	弹性地基压杆稳定的一般解	136
第十四章	组合压杆的稳定	140

第一节	考虑剪力对杆件挠度影响的简化法	140
第二节	组合杆件的定义	141
第三节	带刚性横向连系的组合杆件的剪力微分方程	142
第四节	承受正弦荷载的组合杆件	145
第五节	带刚性横向连系的组合杆件中心受压的稳定	146
第六节	由两个翼组成的组合杆件的稳定	148
第七节	由三个翼对称组合的杆件	150
第八节	其他类型的边界条件	152
第十五章 压弯组合杆件		155
第一节	两个翼组成的压弯组合杆件	155
第二节	任意横向荷载下的压弯杆件	157
第三节	由两个柱子构成的多层刚架的稳定	158
第四节	多跨多层刚架式组合柱的稳定	162
第十六章 刚架的稳定		164
第一节	力法解刚架的稳定	164
第二节	位移法解刚架的稳定	168
第三节	有限元位移法解刚架稳定	174
第四节	应用初参数法解刚架稳定	176
第五节	等稳定单跨刚架代替多跨刚架的方法	177
第六节	压力线法解刚架稳定	179
第十七章 工字梁平面弯曲的稳定		182
第一节	一般方程式的推导	182
第二节	在垂直平面作用纯弯矩	184
第三节	正弦荷载作用	186
第四节	荷载作用点离截面重心的高度的影响	188
第五节	沿线铰固定的工字梁稳定	189
第六节	窄条梁的稳定	191
第十八章 曲杆的稳定		194
第一节	平面曲杆稳定的一般方程	194
第二节	径向荷载作用下圆拱的稳定	197
第三节	承受径向荷载的其他情况的曲杆稳定	201
第四节	扁拱的稳定	203
第十九章 温度影响, 流变时的纵弯曲		209
第一节	考虑温度影响的杆件稳定	209
第二节	温度对弹性模量的影响, 杆端固定不动下的均匀受热	209
第三节	非均匀受热的情况	210
第四节	考虑导热的影响	211
第五节	流变时纵向弯曲的基本概念	212
第六节	流变时的临界标准	213
第七节	按切线模量和流限模量的计算方法	214

第八节 起始挠度问题.....216

附录表(一).....222

附录表(二).....224

附录表(三).....226

第二篇 板和壳体的稳定理论

第一章 在弹性极限内矩形板的稳定.....230

第一节 刚性板理论的基本方程.....230

第二节 柔性板.....237

第三节 单向受压周边铰支板的稳定.....239

第四节 受载的两边为铰支而不受载的两边为各种不同边界条件的单向受压板稳定.....242

第五节 四边铰支板在剪力作用下的稳定.....249

第六节 线性变化的边界应力作用下板的稳定.....254

第七节 组合荷载.....256

第八节 加劲板的稳定.....259

第九节 超临界变形板的稳定.....263

第十节 有限差分法解板的稳定.....269

第十一节 有限元法解板的稳定.....271

第二章 超弹性极限的矩形板稳定.....279

第一节 变形理论、基本方程.....279

第二节 材料不可压缩时的基本微分方程.....281

第三节 变分法应用.....289

第四节 特殊问题求解.....290

第五节 不考虑卸载效率的基本方程.....292

第六节 受压板的屈曲.....294

第七节 剪切时板的屈曲.....297

第八节 材料可压缩的一般变形理论.....299

第九节 应用流变理论.....303

第十节 按流变理论考虑材料压缩的影响.....307

第十一节 实用的计算公式.....308

第三章 圆形板的稳定.....310

第一节 基本方程.....310

第二节 应用变分法.....314

第三节 周边完全固定径向均匀受压板的稳定.....317

第四节 周边铰支.....318

第五节 圆形板反对称屈曲.....319

第六节 圆环板的稳定.....320

第七节 超临界变形圆板的稳定.....321

第四章 壳体的一般知识	323
第一节 有关曲面理论的知识.....	323
第二节 用曲线坐标表示三维线性问题.....	330
第三节 小挠度薄壳, 位移与变形的关系.....	332
第四节 力和弯矩、平衡方程.....	334
第五节 壳体线性理论的基本方程.....	338
第六节 大挠度薄壳.....	341
第五章 在弹性极限内圆柱形壳的稳定	344
第一节 圆柱形壳的基本方法.....	344
第二节 沿母线受压封闭圆柱形壳体, 线性问题.....	349
第三节 非线性问题.....	351
第四节 外压力作用下的封闭壳体, 线性问题.....	355
第五节 外压力作用的非线性问题.....	359
第六节 在外压力下起始挠度的影响.....	362
第七节 扭转作用时圆柱形封闭壳体的稳定.....	364
第八节 纯弯矩作用的稳定.....	369
第九节 组合荷载时封闭圆柱形壳的稳定.....	371
第十节 轴向压力作用下圆柱形块壳的稳定.....	373
第十一节 纯剪切作用时块壳的稳定.....	376
第六章 超弹性极限的圆柱形壳的稳定	380
第一节 小变形稳定问题.....	380
第二节 轴向受压时封闭圆柱形壳体的稳定.....	382
第三节 外压力作用时封闭圆柱形壳体的稳定.....	384
第四节 承受扭转时封闭圆柱形壳体的稳定.....	385
第五节 圆柱形块壳轴向受压时的小变形稳定.....	387
第六节 圆柱形块壳轴向受压时的大变形稳定.....	388
第七章 锥形壳体	391
第一节 线性理论基本方程.....	391
第二节 轴向受压的锥形壳体.....	393
第三节 外压力作用.....	396
第四节 受扭矩作用.....	400
第八章 球形壳体	401
第一节 在外压力作用小变形稳定.....	401
第二节 大变形稳定.....	402
第九章 高温下板和壳的稳定	407
第一节 基本方程.....	407
第二节 周边刚性的平板.....	409
第三节 周边刚性的圆柱形壳.....	410
第四节 具有初挠度板的屈曲.....	411
第五节 圆柱形大块壳的屈曲.....	415

第三篇 稳定计算习题

第一章	压杆稳定习题.....	120
第二章	弹性支承压杆稳定习题.....	139
第三章	变截面杆的稳定习题.....	152
第四章	组合压杆稳定习题.....	159
第五章	多跨连杆稳定习题.....	162
第六章	其他情况的压杆稳定习题.....	170
第七章	窄梁的稳定习题.....	174
第八章	曲线形结构稳定习题.....	176
第九章	刚架的稳定习题.....	180
第十章	板壳稳定习题.....	198

第一篇 杆件结构的稳定理论

第一章 单自由度体系的稳定

第一节 体系的位能

在荷载增加的过程中，认为结构的变形或位移是很小的，并且认为结构的几何尺寸是不变的。

如图1-1-1所示，刚度为无限大的直杆，弹性支承，中心受压的直杆，只要 θ 一定，变形位置即定，所以是一个自由度。

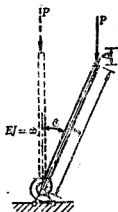


图 1-1-1

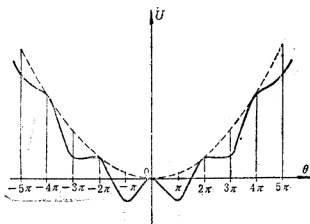


图 1-1-2

令 α 表示弹性支承的刚度，即转动一个单位角度时引起的力矩，于是转动 θ 角时，弹性支承引起的力矩为

$$M = \alpha \theta$$

假若 P 力达到足够大，即使 θ 是任意小，体系不能保持平衡，那末，体系原来的、没有偏离的位置是不稳定的。

我们来研究当杆件由原来的平衡位置偏离 θ 角度时，体系的总位能

$$U = \frac{1}{2} M \cdot \theta - P \cdot \Delta = \frac{\alpha}{2} \theta^2 - Pl(1 - \cos \theta) \quad (1-1-1)$$

式中 $P \cdot \Delta$ 取负号是由于比 $\theta = 0$ 时的位能减少了。又因为在变形过程中 P 力的大小不变，所以不乘 $\frac{1}{2}$ 。

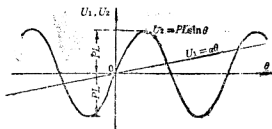


图 1-1-3

方程(1-1-1)的解答如图1-1-2所示。从图上可以看出，球的平衡位置刚好在 $U(\theta)$ 曲线

的切线是水平的切点位置，而这些点的位能是极值，或最大，或最小。于是平衡条件为

$$\frac{dU}{d\theta} = 0 \quad (1-1-2)$$

对于我们的问题

$$\frac{dU}{d\theta} = \alpha\theta - Pl\sin\theta = 0 \quad (1-1-3)$$

由此方程可决定体系所有可能的平衡位置。应用图解法求解，如图 1-1-3 所示。方程 (1-1-3) 的根，将是直线 $U_1 = \alpha\theta$ 和正弦曲线 $U_2 = Pl\sin\theta$ 的交点。平衡位置的数目与 P 力的大小有关，因为当 Pl 改变，正弦曲线与直线 $y = \alpha\theta$ 的交点的数目也改变，因此图 1-1-2 表示方程 (1-1-3) 的根，将相应于 $U(\theta)$ 曲线的极点的数目。

注意：平衡条件 (1-1-3) 也可直接根据所有的力对弹性支承的力矩和为零的平衡条件求得。

从图 1-1-2 可以看出，不是所有的平衡状态都是稳定的，而只有当位能函数 $U(\theta)$ 是最小值时，平衡状态才是稳定的。在最小值 $U(\theta)$ 曲线应向下凸起，当球沿 $U(\theta)$ 曲线偏移不太大的 θ 时，又将回到原来平衡位置。我们研究的体系也类似这样。而不稳定平衡状态相应于 $U(\theta)$ 的最大值，此时体系偏离 θ 很小时，就不能回到原来的平衡位置，而变成别的平衡位置。

稳定平衡条件的另一个表达式为

$$\frac{d^2U}{d\theta^2} > 0 \quad (1-1-4)$$

而且 θ 应当满足平衡条件 (1-1-2)，而条件 (1-1-4) 是表示一般稳定条件的特殊情况，即相应的稳定平衡状态的位能有最小值。

当 P 力增大时，曲线 $U(\theta)$ 要改变。一般情况下，平衡位置的点相应地也要变。对于这类问题，平衡状态将由稳定变成不稳定，如图 1-1-4 所示。由此可见，当 P 力使体系满足中间平衡状态时，不仅 $\frac{dU}{d\theta}$ 等于零，而且 $\frac{d^2U}{d\theta^2}$ 也经过零。这样一个处于稳定和不稳定之间的

平衡位置，称为临界平衡状态。于是体系的临界状态，将由下列方程来确定：

$$\frac{dU}{d\theta} = 0 \quad \text{或} \quad \frac{d^2U}{d\theta^2} = 0 \quad (1-1-5)$$

对于研究的体系我们得到式 (1-1-3) 和

$$\frac{d^2U}{d\theta^2} = \alpha - Pl\cos\theta = 0 \quad (1-1-6)$$

对于起始平衡位置，即 $\theta = 0$ ，此时当 P 为任意值时，条件 (1-1-3) 是满足的。由条件 (1-1-6) 得

$$\alpha - Pl = 0 \quad (1-1-7)$$

由此，求得相应于 $\theta = 0$ 的平衡位置的 P 的临界值为

$$P_{KP} = \frac{\alpha}{l} \quad (1-1-8)$$

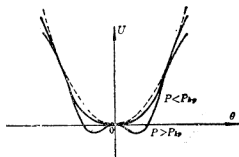


图 1-1-4

第二节 平衡状态曲线

一个自由度体系的位能是变形 θ 和外力 P 的函数, 即 $U = U(\theta, P)$ 。因此平衡条件式(1-1-2)可写成

$$\frac{\partial U(P, \theta)}{\partial \theta} = 0 \quad (1-1-9)$$

由此得出 P 和 θ 的关系式, 而后以 θ 和 P 为坐标轴画出曲线, 即平衡状态的曲线。在我们研究的问题中, 曲线方程由式(1-1-3)得

$$P = \frac{\alpha \theta}{l \sin \theta} \quad (1-1-10)$$

式(1-1-10)的曲线如图 1-1-5 所示, 因此平衡状态的曲线式(1-1-9)的极点应当满足下列等式

$$\frac{dP}{d\theta} = 0 \quad (1-1-11)$$

相应于临界平衡状态。按隐函数微分规则, 将 $\frac{dP}{d\theta}$ 展开, 由式(1-1-9)得

$$\frac{dP}{d\theta} = - \frac{\frac{\partial U_\theta(P, \theta)}{\partial \theta}}{\frac{\partial U_\theta(P, \theta)}{\partial P}} = - \frac{\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}}{\frac{\partial^2 U}{\partial \theta \partial P}} \quad (1-1-12)$$

由此, 若 $\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = 0$, 则满足式(1-1-11), 于是我们得到临界平衡状态式(1-1-5)的第二个条件。由于此处 P 不是常数, 所以要用偏微分代替式(1-1-5)的常微分。此处又因为整个平衡状态曲线应满足式(1-1-9), 因此方程(1-1-11)可以代替式(1-1-5)的两个临界状态条件。

在图1-1-5中的虚曲线表示不稳定平衡状态, 而实线为稳定的平衡状态。

由于从稳定变到不稳定或由不稳定变为稳定, 导数 $\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}$ 都要改变符号。而从式(1-1-12)可以看出, $\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}$ 的符号改变时, $\frac{dP}{d\theta}$ 的符号也改变, 也就是说, 平衡状态曲线的倾斜方向也应改变。

$$\text{特殊情况是 } \frac{\partial^2 U}{\partial \theta \partial P} = 0 \quad (1-1-13)$$

此时平衡状态曲线趋于无穷远, 或(当 $\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = 0$)有一个特殊点。

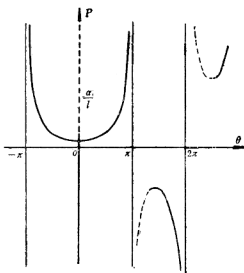


图 1-1-5

对于图 1-1-1 的体系, $\frac{\partial^2 U}{\partial \theta \partial P} = l \sin \theta = 0$, $\theta = m\pi$, m 是整数, 如图 1-1-5 所示。

满足式 (1-1-10) 和式 (1-1-11) 的临界状态为

$$\frac{dP}{d\theta} = \frac{\alpha l \sin \theta - \alpha \theta l \cos \theta}{l^2 \sin^2 \theta} = 0, \quad \operatorname{tg} \theta = \theta \quad (1-1-14)$$

这个超越方程的根给出体系临界状态的位置, 将这个根代入式 (1-1-10) 求得相应于这个位置的临界力 P_{KP} 。

图 1-1-5 示出了与满足方程 (1-1-14) 的横坐标 θ 相应的曲线上的临界点。在这些点上, 当 P 力减少或增加一点, 即出现稳定和不确定两个平衡状态, 所以这些点是平衡状态的分支点。只在 $\theta = 0$ 的临界点有临界力 $P_{\text{KP}} = \frac{\alpha}{l}$, 当 $P < \frac{\alpha}{l}$ 时, 是稳定的; 当 $P > \frac{\alpha}{l}$ 时, 是不稳定的。

第三节 小变形条件下的近似解

仍以图 1-1-1 所示的弹性支承的刚性杆中心受压为例, 认为变形 θ 很小, 将位能 U 的精确表达式展开成级数, 忽略 θ 二阶以上的项, 于是得

$$\begin{aligned} U &= \frac{\alpha}{2} \theta^2 - Pl \left(1 - 1 + \frac{\theta^2}{2!} - \frac{\theta^4}{4!} + \dots \right) \\ &\approx \frac{\alpha}{2} \theta^2 - \frac{Pl}{2} \theta^2 \end{aligned} \quad (1-1-15)$$

这个近似表达式 (1-1-15) 的抛物线如图 1-1-6 所示, 相应于图 1-1-2 中 $\theta = 0$ 的点在曲线部分。而式 (1-1-15) 只给出一个平衡位置, 它可能是稳定或不稳定的, 也可能处于临界状态, 这取决于 P 力的大小。若按式 (1-1-15) 得到的抛物线顶点是向下的, 则如图 1-1-7(a)

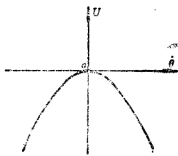


图 1-1-6

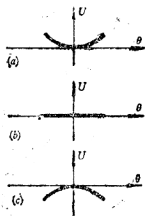


图 1-1-7

所示。此时, 当 $\theta = 0$, U 为最小值, 相应于稳定平衡; 若顶点向上, 如图 1-1-7(c) 所示, 则相应于不稳定平衡; 若在前二者之间, 抛物线变成水平直线, 并与横坐标重合时, 则如图

1-1-7(b), 相应于临界平衡状态。所以, $P = \frac{\alpha}{l} = P_{KP}$ 与从 U 的精确式 (1-1-1) 求得的式 (1-1-8) 相同。因此根据零平衡位置, 按小变形近似理论求得的结果无任何误差。但是从理论上讲, 临界状态的平衡相应于随遇平衡, 变形 θ 可以由 $-\infty$ 到 $+\infty$, 而事实上, 只在 $\theta = 0$ 的位置才是体系的临界平衡状态。

U 的近似表达式 (1-1-15), 大大简化了稳定问题的计算, 因为变成了线性的平衡方程。再将式 (1-1-15) 取导数, 得

$$\frac{dU}{d\theta} = \alpha\theta - Pl\theta = 0 \tag{1-1-16}$$

利用这个方程, 可以决定 θ 在不确定条件下的临界状态。由上式得

$$\theta(\alpha - Pl) = 0 \tag{1-1-17}$$

由此, 求得相应的临界力为

$$P_{KP} = \frac{\alpha}{l}$$

式 (1-1-17) 说明: 当 θ 等于零时, P 为任意值; 当 θ 不确定时, 可以为满足平衡条件式 (1-1-16) 的 P 值。

于是小变形体系的临界荷载, 可以按随遇平衡状态来求, 即体系的变形可以是任意的, 而平衡条件不被破坏。

若将式 (1-1-15) 取两次导数, 则

$$\frac{d^2U}{d\theta^2} = \alpha - Pl = 0 \tag{1-1-18}$$

由此也求得

$$P_{KP} = \frac{\alpha}{l}$$

此时对变形无条件限制, 于是平衡状态曲线将变成两个相交的直线, 即 $\theta = 0$ 和 $P = \frac{\alpha}{l}$, 如图 1-1-8 所示。实线是稳定平衡状态, 而虚线是不稳定平衡状态。

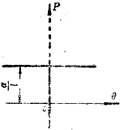


图 1-1-8

第二章 多自由度体系

第一节 两个自由度体系

如图1-2-1(a)所示, 三根刚性杆用铰连接起来, 除两端为刚性铰支座外, 中间铰都是支承在弹性支座上。在两端作用压力 P , 杆长和弹性支承的刚度系数是一样的, 于是决定体系变形状态的独立参数是支座沉降 y_1 和 y_2 , 所以是两个自由度体系。

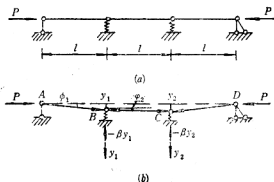


图 1-2-1

解决这样一个体系稳定的问题时, 我们可假定变形 y_1 和 y_2 与杆长相比是很小的, 于是在平衡方程中可以只包括 y_1 和 y_2 的一阶, 而在位能表达式中不包括 y_1 和 y_2 二阶以上的项。

必须组成与自由度数目相应的平衡方程, 根据节点 B 的所有的力是在 y_1 轴方向上的投影之和为零的条件, 得

$$-\beta y_1 + P \frac{y_1}{l} + P \frac{y_1 - y_2}{l} = 0$$

根据节点 C 的所有的力是在 y_2 轴方向上的投影之和为零的条件, 得

$$-\beta y_2 + P \frac{y_2}{l} + P \frac{y_2 - y_1}{l} = 0$$

式中: β 是弹性支承的刚度系数。

经过简化, 得

$$\left. \begin{aligned} (2P - \beta l)y_1 - Py_2 &= 0 \\ -Py_1 + (2P - \beta l)y_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-2-1)$$

因 $y_1 \neq 0$, $y_2 \neq 0$, 故系数行列式为零:

$$\begin{vmatrix} 2P - \beta l & -P \\ -P & 2P - \beta l \end{vmatrix} = 0 \quad (1-2-2)$$