TULILUNJICHU

梁展東　楊彩萍

凸理論基礎

SHANXI JIAOYU
CHUBANSHE

山西教育出版社

凸理論基礎

梁展東　楊彩萍

山西教育出版社

〔晋〕新登字 3 号

责任编辑 [illegible]词
封面设计 [illegible]源

凸理论基础

梁展东　杨彩萍

山西教育出版社出版　（太原并州北路11号）
山西省新华书店发行　太原印刷厂印刷

*

开本：787×1092　1/32　印张：6.25　字数：134千字
1992年8月第1版　1992年8月山西第1次印刷
印数：1—1,500册

*

ISBN 7—5440—0008—7
G·9　定价：2.90元

前　言

凸理论基础包括凸集、凸函数、凸锥、赋范空间的凸性、正解理论等内容。有关凸性的某些结果可追溯到18世纪中期，但近代的所谓凸分析则是在20世纪初由H.Minkowski等人创始，到了20世纪中叶，由于最优化理论的发展，使凸分析日益受到重视，70年代以后，由于非线性分析等学科的需要和刺激，凸理论得到了迅速的深入和广泛的发展。

国际上有关凸分析的专著和教材多产生于本世纪60年代中期以后，如文〔1〕——〔7〕，在我国最早写凸分析教材的是越民义等先生，公开出版这方面的著作是70年代以后的事，如文〔8〕，〔9〕，但尚不多见。当然，由于凸理论不仅是线性规划、非线性规划、最优化理论、对策论、微分几何、积分几何、计算数学等课程的基础理论，也是现代概率论，Banach代数、非线性泛函分析等课程的基础理论，所以，近年来，我国各类高校使用的许多教科书都涉及到凸理论，但都不对它进行较全面、较深入的介绍。这就象集合论的情况一样。

本书比较全面系统地介绍了凸理论最基本的内容，并尽量简捷地介绍了它在各方面的应用，其中重点介绍了凸锥理论在正解问题中的应用，主要结论都有详细证明。在选材上尽量吸取国内外学者的新成果，其中也包括作者近年来在这方面所做的某些工作。为了使讨论既不囿于有限维空间的局

限，也不至于过分抽象不便应用，鉴于近年来我国各类高校都开设了泛函分析课程，我们把大部分内容都放在Banach空间中讨论。

近年来，山西大学数学系为有关专业的高年级学生、研究生、研究生课程学习班开设了同名课程，本书是两位作者在多次讲授该课程讲稿的基础上整理而成，在整理过程中杨彩萍同志修正了若干不妥之处，增加了不少新内容。可供综合大学、工科院校、师范院校的有关专业的大学生和研究生作为教材和参考书使用，也可供科研人员、工程技术人员参考。

限于作者的水平，错误缺点和不妥之处在所难免，真诚地期待广大读者批评指正。

作　者

于山西大学数学系

目　录

第一章 凸 集

§1.1 凸集及其性质

定义1.1.1 设X是数域Λ上的线性空间,$S\subset X$，若$\forall x\in S$，均有$-x\in S$，则称S为对称集。

显然，若S为对称集，则有$-S\subset S$，从而$-S=S$。

定义1.1.2 设X是数域Λ上的线性空间，$S\subset X$，$E=\{\alpha\mid\alpha\in R,\ |\alpha|\leqslant 1\}$，若$ES\subset S$，则称$S$为平衡集，其中$ES=\{\alpha x\mid \alpha\in E,\ x\in S\}$。

任给集合T，称ET为T的平衡壳。显然ET是平衡集，且是包含T的最小的平衡集。

定义1.1.3 设X是数域Λ上的线性空间,$S\subset X$，若$\forall x\in X$ $(x\neq\theta)$，都存在$\varepsilon>0$，使当$0<\alpha<\varepsilon$时，有$\alpha x\in S$，则称S为吸收集。

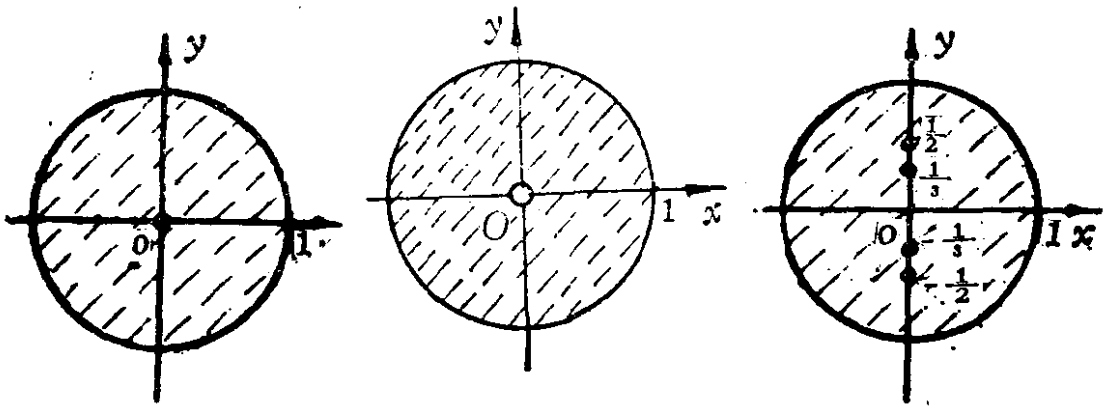
以下我们列举一些有关这三类集合的例子。

例1.1.1 在R^2中：

集合$\delta=\{(x,\ y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$是对称集、吸收集、平衡集。

集合$\delta'=\{(x,\ y)\mid 0<x^2+y^2\leqslant 1\}$是对称集、吸收集，但不是平衡集。

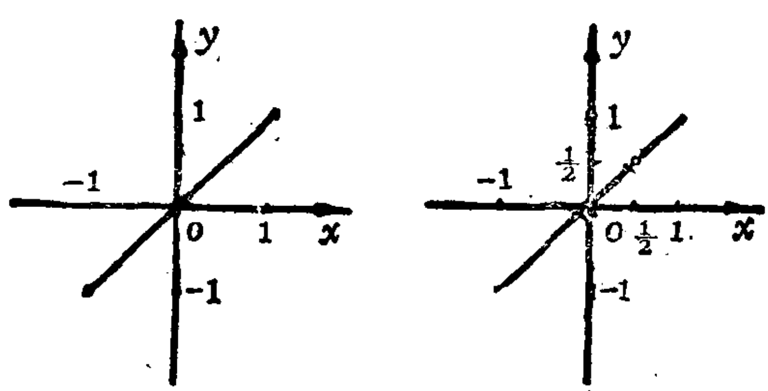
集合$\delta'' = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leqslant 1, (x,y) \neq \left(0, \pm\frac{1}{n}\right)$, $n = 1, 2, \cdots\}$是对称集，但不是吸收集和平衡集。



例1.1.2 在R^2中：

$S = \{(x, y) | (x, y)$属于连接（$-1, -1$）与（$1, 1$）的线段$\}$是对称集、平衡集，但不是吸收集。

$S' = \left\{(x, y) | (x, y)\text{属于连接}(-1, -1)\text{与}(1, 1)\text{的线段，但}(x, y) \neq \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\}$是不平衡、不对称、不吸收的集。



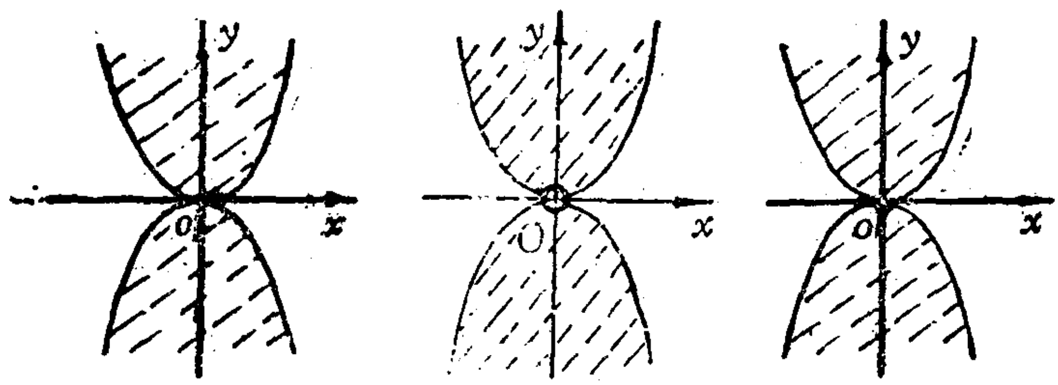
例1.1.3 在R^2中：

$T = \{(x, y) | y \geqslant x^2$或$y \leqslant -x^2\}$是对称集，平衡集，但

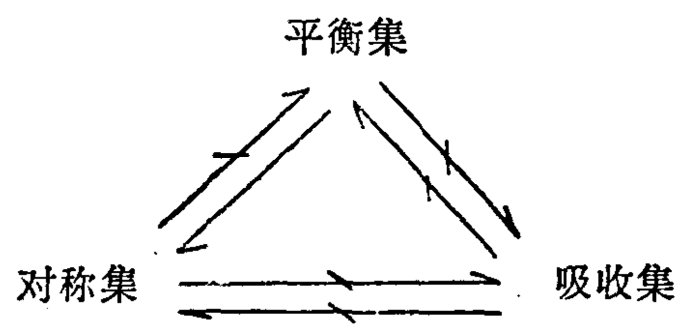
不是吸收集。

$T' = \{(x, y) | y \geqslant x^2 或 y \leqslant -x^2 但 (x, y) \neq (0, 0)\}$是对称集，但不是平衡集和吸收集。

$T'' = \{(x, y) | y \geqslant x^2 或 y \leqslant -x^2 或 y = 0\}$是对称集，吸收集，平衡集。



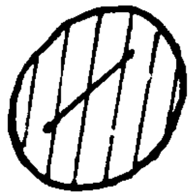
通过以上定义及例子我们不难看出这三类集合的关系如下：



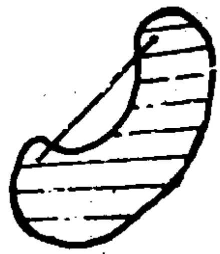
定义1.1.4 设 X 是数域 Λ 上的线性空间，$E \subset X$，若 $\forall x, y \in E, \lambda \in [0, 1]$，皆有 $\lambda x + (1-\lambda) y \in E$，则称 E 为凸集。

称集合 $\{z | z = \lambda x + (1-\lambda) y, x, y \in E, \lambda \in [0, 1]\}$ 为连接 x 与 y 的线段，这显然是二维平面两点连线的推广。于是，所谓凸集就是集合中任意两点的连线仍在其中的集

合。如图：



凸集



非凸集

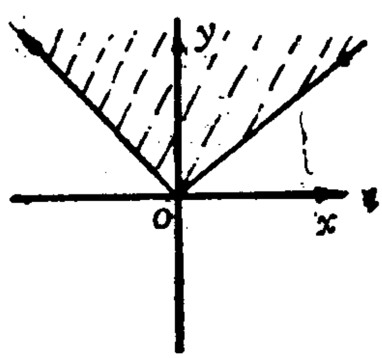
定义1.1.5 设 X 是数域 Λ 上的线性空间，$B\subset X$，称集合 $\{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i \mid x_i\in B,\ \alpha_i\in R,\ \alpha_i\geqslant 0,$ 且 $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1,\ n=1,2,3\cdots\}$ 为 B 的凸包，记为 $[B]$ 或 $COV\,B$。

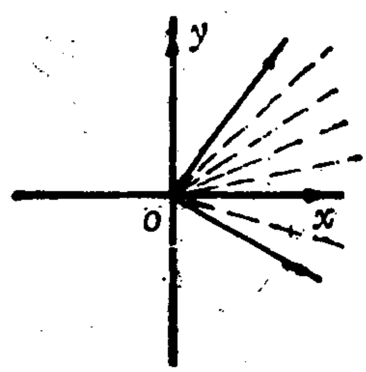
易知：B 的凸包 $[B]$ 是包含 B 的一切凸集的交集，从而 $[B]$ 是包含 B 的最小的凸集。

例1.1.4 单元素集 $A=\{a\}$ 是凸集，全空间 X 是凸集。

例1.1.5 $C[0,1]$ 中的集 $M=\{f \mid f(x)\geqslant 0,\ \forall x\in[0,1]\}$ 是凸集。

例1.1.6 在 R^2 中，任何两条射线所围成的夹角小于 π 的部分所成集为凸集。





凸集有以下简单性质：

(i) 设 V_1，V_2 是 X 中的凸集，则 $\forall\alpha,\beta\in\Lambda$，$\alpha V_1+\beta V_2$ 也是 X 中的凸集。其中 $\alpha V_1+\beta V_2 \triangleq \{\alpha x+\beta y \mid x\in V_1,\ y\in V_2\}$

证明： 首先，若V是凸集，则显然αV也是凸集。

其次，若V_1，V_2是凸集，则$V=V_1+V_2$也是凸集。

事实上，$\forall x$，$y\in V$，有$x=x_1+x_2$，$y=y_1+y_2$ 其中$x_i\in V_i$，$i=1$，2。于是$\lambda x+(1-\lambda)y=\lambda x_1+(1-\lambda)y_1+\lambda x_2+(1-\lambda)y_2\in V_1+V_2=V$

由以上证明可知，$\alpha V_1+\beta V_2$也是X中凸集。

(ii) 若$V_i(i\in I)$为X中的凸集，则$\bigcap\limits_{i\in I}V_i$也是$X$中的凸集。

(iii) 设$\|\cdot\|$为线性空间X中的拟范数，E是X中的凸集，则$E_\delta=\{x|\ x\in X$，存在$y\in E$ 使得 $\|x-y\|<\delta\}$也是凸集。

证明： 只需证明$E_\delta=E+o(\theta,\ \delta)$即可。事实上，$E+o(\theta,\ \delta)\subset E_\delta$是显然的。又$\forall z\in E_\delta$，存在$x\in E$使得$\|z-x\|<\delta$。令$y=z-x$，显然$y\in o(\theta,\ \delta)$，且$z=x+y\in E+o(\theta,\ \delta)$，即$E+o(\theta,\ \delta)\subset E_\delta$。

(iv) 设，X，Y是线性空间，T：$X\longrightarrow Y$是线性映射，E是X中的凸集，则$T(E)$是Y中的凸集。

(v) 设X是线性空间，$V\subset X$，则V是凸集$\Longleftrightarrow\forall\alpha>0$，$\beta>0$，都有$(\alpha+\beta)V=\alpha V+\beta V$

证明： $\Longrightarrow$

设V是X中的凸集，则首先有$(\alpha+\beta)V\subset\alpha V+\beta V$，其次，$\forall y\in\alpha V+\beta V$，都存在$x_1$，$x_2\in V$使$y=\alpha x_1+\beta x_2=$

$$(\alpha+\beta)\frac{\alpha x_1+\beta x_2}{\alpha+\beta}=(\alpha+\beta)\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}x_1+\frac{\beta}{\alpha+\beta}x_2\right)\in$$

$(\alpha+\beta)V$

于是$(\alpha+\beta)V=\alpha V+\beta V$

$\Leftarrow$

若$\forall \alpha>0$，$\beta>0$，都有$(\alpha+\beta)V=\alpha V+\beta V$，于是对$\forall x$，$y\in V$，$\lambda\in[0,1]$，当$\lambda\neq 0,1$时，有$\lambda>0$，$(1-\lambda)>0$，由$\lambda x+(1-\lambda)y\in\lambda V+(1-\lambda)V=(\lambda+(1-\lambda))V$知$\lambda x+(1-\lambda)y\in V$；当$\lambda=0$时，$\lambda x+(1-\lambda)y=y\in V$；当$\lambda=1$时，$\lambda x+(1-\lambda)y=x\in V$。从而$V$是$X$中的凸集，证毕！

(Vi) 设X是线性赋范空间，S是X中的凸集，则$\overline{S}$也是X中的凸集。

证明：$\forall x$，$y\in\overline{S}$都存在x_n，$y_n\in S$，$n=1,2,\cdots$使得$x_n\xrightarrow{\|\cdot\|}x$，$y_n\xrightarrow{\|\cdot\|}y$ $(n\to\infty)$，从而有：$\forall\lambda$，$0\leqslant\lambda\leqslant 1$，

$\lambda x_n\xrightarrow{\|\cdot\|}\lambda x$，$(1-\lambda)y_n\xrightarrow{\|\cdot\|}(1-\lambda)y$。由$S$为凸集知$\lambda x_n+(1-\lambda)y_n\in S\subset\overline{S}$，又$\overline{S}$为闭集，从而由$\lambda x_n+(1-\lambda)y_n\xrightarrow{\|\cdot\|}\lambda x+(1-\lambda)y$知$\lambda x+(1-\lambda)y\in\overline{S}$。

所以$\overline{S}$也为凸集。

(vii) 若S为一开集，则其凸壳$[S]$也为开集。

证明：$\forall x\in[S]$，有$x=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i x_i$，$x_i\in S$，$\alpha_i\geqslant 0$，且$\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i=1$。

因为S为开集，所以存在x_i的开球邻域V_i使得$V_i\subset S$，$i=1,2,\cdots n$。

令$T=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i V_i$，显然$x\in T\subset[S]$。

由V_i为开集易知$\alpha_i V_i$也为开集，从而可得$\alpha_i V_i+\alpha_j V_j$为开集。

事实上，$\forall y\in\alpha_j V_j$，$y+\alpha_i V_i$显然为开集，而$\alpha_i V_i$

$+\alpha_j V_j = \bigcup_{y\in\alpha_j V_j}(y+\alpha_i V_i)$，所以$\alpha_i V_i+\alpha_j V_j$为开集，由此$T=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i V_i$为开集。于是$x$是$[S]$的内点，从而$[S]$为开集。

证毕！

以下讨论Hilbert空间中的闭凸集，有关它的一系列结论是最佳逼近问题的基础之一。

定理1.1.1 设H是Hilbert空间，C是X中闭凸子集，则C上存在唯一元素x_0取到最小模。（即存在$x_0\in C$使$\|x_0\| = \inf_{x\in C}\|x\|$）

证：存在性。

若零元素$\theta\in C$，则$x_0=\theta$。若$\theta\overline{\in}C$，则$d\xlongequal{\triangle}\inf_{x\in C}\|x\|>0$。由下确界定义，$\forall n\in N$，存在$x_n\in C$，使得$d\leqslant\|x_n\|<d+\frac{1}{n}$，$n=1, 2, \cdots$ (1)

假设数列$\{x_n\}$有极限x_0，那么由于C是闭集，我们知道$x_0\in C$，且由上面（1）式知$\|x_0\|=d$，即x_0取到了C上元素的最小模。事实上，数列$\{x_n\}$确有极限。

由平行四边形等式知：

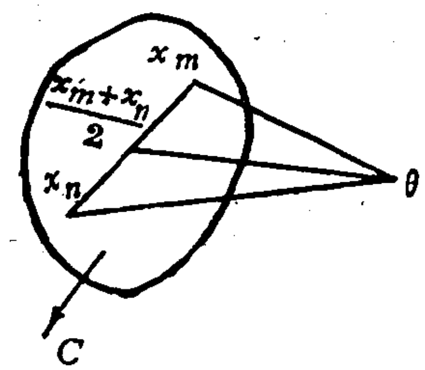
$$\|x_m-x_n\|^2=2(\|x_m\|^2+\|x_n\|^2)-4\left\|\frac{x_m+x_n}{2}\right\|^2\leqslant$$

$$2\left[\left(d+\frac{1}{n}\right)^2+\left(d+\frac{1}{m}\right)^2\right]-4d^2\longrightarrow 0(\text{当}n,m\to\infty).$$

所以，$\{x_n\}$是一个基本列，从而有极限。

唯一性。

若有$x_0\in C$，$\hat{x}_0\in G$ 使得$\|x_0\|=\|\hat{x}_0\|=d$，则有$\|x_0-\hat{x}_0\|^2=2(\|x_0\|^2+\|\hat{x}_0\|^2)-4\left\|\frac{x_0+\hat{x}_0}{2}\right\|^2\leqslant 4d^2-4d^2=0$，从而有$x_0=\hat{x}_0$。见下图：



证毕。

定理1.1.2 (变分引理)设M是内积空间H中完备的凸集，$x\in H$。记d为x到M的距离$d=d(x,M)=\inf\limits_{y\in M}\|x-y\|$，则必存在唯一的$x_0\in M$使得$\|x-x_0\|=d$。称$x_0$为$x$在$M$上的最佳逼近元。

证：由距离定义知：存在M中点列$\{x_n\}$使得$\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-x\|=d$。这样的点列称为"极小化"序列。下面证明$\{x_n\}$是基本列。

由平行四边形等式知

$$2\left\|\frac{x_m-x_n}{2}\right\|^2=\|x_m-x\|^2+\|x_n-x\|^2-2\left\|\frac{x_m+x_n}{2}-x\right\|^2. \tag{2}$$

因为M是凸集，$\frac{x_m+x_n}{2}\in M$，所以$\left\|\frac{x_m+x_n}{2}-x\right\|\geqslant d$。

由上面(2)式得

$$0\leqslant 2\left\|\frac{x_m-x_n}{2}\right\|^2\leqslant\|x_m-x\|^2+\|x_n-x\|^2-2d^2$$

从而有 $\lim\limits_{m,n\to\infty}\|x_m-x_n\|^2=0$，所以$\{x_n\}$是基本列。

又因为 M 是完备的度量空间，所以有 $x_0\in M$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$。这时$\|x-x_0\|=\lim\limits_{n\to\infty}\|x-x_n\|=d$。

若还有$y_0\in M$，使$\|x-y_0\|=d$，那么点列$\{x_0, y_0, x_0, y_0, \cdots\}$显然也是"极小化"序列，因而是基本列，这说明$x_0=y_0$。即在$M$中存在唯一的$x_0$使$\|x-x_0\|=d$。

证毕。

显然，若定理1.1.2中的H为Hilbert空间，则此定理是定理1.1.1的推论。

事实上，集合$M-\{x\}\xlongequal{\triangle}\{y-x|\ y\in M\}$显然还是$H$中的闭凸子集，由定理1.1.1，存在唯一的$z_0\in M-\{x\}$，使得$\|z_0\|=\inf\limits_{z\in M-\{x\}}\{\|y\|\}$。

令$x_0=z_0+x$，则$x_0\in M$，且$\|x-x_0\|=\inf\limits_{y\in M}\{\|x-y\|\}$。

定理1.1.3 设H是内积空间，C是H中闭凸子集，$\forall y\in H$，为了x_0是y在C上的最佳逼近元，必须且仅须它适合。

$$Re(y-x_0,\ x_0-x)\geqslant 0 \quad (\forall x\in C)\ . \tag{3}$$

证：对$\forall x\in C$，考察函数

$$\varphi_x(t)=\|y-tx-(1-t)x_0\|^2, \quad t\in[0,1].$$

显然，为了x_0是y在C上的最佳逼近元，必须且仅须它适合

$$\varphi_x(t)\geqslant\varphi_x(0) \qquad (\forall x\in C,\ \forall t\in[0,\ 1]) \tag{4}$$

以下我们证明 (3)$\Longleftrightarrow$(4)。

由于$$\begin{aligned}\varphi_x(t)&=\|(y-x_0)+t(x_0-x)\|^2\\&=\|y-x_0\|^2+2tRe(y-x_0,\ x_0-x)+t^2\|x_0-x\|^2\end{aligned}$$

故 $\varphi'_x(0)=2Re(y-x_0,\ x_0-x)$

于是　(3)$\Longleftrightarrow\varphi_x'(0)\geqslant 0$。　(5)

又因为　$\varphi_x(t)-\varphi_x(0)=\varphi_x'(0)t+\|x_0-x\|t^2$

所以　$\varphi_x'(0)\geqslant 0\Longleftrightarrow(4)$　(6)

联合(5)与(6)可得　(3)$\Longleftrightarrow$(4)。

证毕。

推论1.1.3　设H是Hilbert空间，M是H的一个闭线性子流形。$\forall x\in H$，为了y是x在M上的最佳逼近元，必须且仅须它适合

$x-y\perp M-N$，其中$N=\{w|\ w=z-y,\ y\in M\}$。

证：由定理1.1.3知，为了y是x在M上的最佳逼近元，必须且仅须

$$Re(x-y,\ y-z)\geqslant 0\qquad(\forall z\in M)。$$

由于M是线性流形，故$\forall z\in M$，有。

$$z=y+w\qquad(w\in M-\{y\}=N)\ 。$$

注意到N是线性子空间，且当z取遍M中所有值时，w也取遍N中的所有值。将$z=y+w$代入$Re(x-y,\ y-z)\geqslant 0$得

$$Re(x-y,\ w)\leqslant 0\qquad(\forall w\in N)\ 。$$

在上式中用$-w$代替w，便得

$$Re(x-y,\ w)=0\qquad(\forall w\in N)。$$

进一步，在$Re(x-y,\ w)=0$中用iw代替w，则有

$$(x-y,\ w)=0\qquad(\forall w\in N)\ 。$$

于是$x-y\perp M-N$。

证毕。

注：所谓线性流形是线性空间的子空间对某个向量的平移。具体定义如下：

设H是一个线性空间，$E\subset H$，若存在$x_0\in H$及线性