

• 高等学校教学用书 •

# 传输过程的数值方法

80683164

GAODENG XUOXIAO JIAOXUE YONGSHU



冶金工业出版社

30683104

TK12  
24

高等学校教学用书

# 传输过程的数值方法

包头钢铁学院 贺友多 编

11K50/23



冶金工业出版社



C0003216

(京)新登字036号

高等学校教学用书  
**传输过程的数值方法**  
包头钢铁学院 贺友多 编

冶金工业出版社 出版

(北京北河沿大街高碑店北巷30号)

新华书店北京发行所发行

冶金工业出版社印刷厂印刷

850×1168 1/32 印张 7 1/4 字数 192 千字

1991年10月第一版 1991年10月第一次印刷

印数00,001~2,000册

ISBN 7-5024-0900-9

TF·212 (课) 定价1.95元

# 前 言

自然界有很多传递现象，如动量传递、能量传递和质量传递。很多工业过程包含有流体流动，温度变化和浓度分布。与速度场有关的工业过程如：高温炉内的烟气流动，转炉内钢液的流动，连铸机中间包内钢液的流动，高层建筑的风负荷，汽车外型的阻力，除尘器的结构与吸风口位置等；与温度场有关的过程有：钢锭的加热和冷却，连铸坯的温度分布与应力，工件淬火时的温度分布与开裂，焊接的热过程等；与浓度场有关的有：有流动的传质过程，大气中点污染源，如核电厂的泄漏、扩散与污染区的预报，化工的混合过程，钢的增碳与脱碳。有的工业过程还是三个场，速度场、温度场和浓度场相耦合的情况，如加热炉过程的解析与自动控制，顶底复吹过程的研究，电子工业中应用广泛的化学气态沉积过程的解析等。可见，要定量地研究自然界的很多现象与过程，必不可免地要遇到传输现象。传输方程是二阶非线性偏微分方程组，当研究对象是三维空间，或边界条件复杂时，数学解析方法往往会无能为力，这种状况长期阻碍了人们对自然过程、工业过程的深入理解。自电子计算机问世以来，特别是大型高速计算机的诞生，促进了数值求解技术的发展，人们才有可能用数值方法来求解传递过程。本书的目的是介绍这种方法，由浅入深，使人们能广泛地应用计算机这个强有力的工具，去揭示自然现象和工业过程的真实内涵。

我本人接触这方面知识主要是1983年，在美国，与俄亥俄州立大学（THE OHIO STATE UNIVERSITY）的Y. SAHAI教授合作，在他的指导下，成功地应用这方面知识，开发了一个三维流动场的计算机模拟通用软件，这个软件不但可用于计算三维空间的流动场（稳态或不稳态），由于三传过程的相似性，也可用于计算三维空间的温度场和浓度场，具有普遍性意义。本书

中很多內容都与这个软件的开发与理解密切相关。

这部分材料在1987年以来，曾在我院为大学生和研究生开过三届选修课程，也曾为华东冶金学院和内蒙古工学院的研究生和年青教师讲过，约30学时，效果较好。在刘述临教授和曲英教授的热情鼓励下，写成此稿。在完成此稿时，还得到吴棣英高级工程师的多方面的关怀与支持，也得到我研究室同志（张捷宇，李保卫，刘忠兴）和我的研究生（刘建辉，魏华强）提供所做的研究工作的材料，在此一并致谢。

由于个人专业所限以及编写工作比较仓促，错误之处一定存在，望有识之士不吝赐教。我衷心希望本书能起到抛砖引玉的作用，有更多的这方面的好书问世。

贺友多

1989年5月

# 符 号 清 单

- $A$ : 面积  
 $C$ : 浓度  
 $c_p, c_v$ : 定压与定容比热  
 $D$ : 扩散系数或扩散传导系数  
 $F, f, f_s$ : 对流强度; 式 (1-43) 所定义; 无量纲界面位置  
 $G$ : 湍流动能产生项, 或按 (1-46) 式定义或按 (7-48) 式定义  
 $H$ : 焓, 生成热  
 $K, k'$ : 湍流动能; 体积膨胀粘性系数  
 $L_m, L$ : 混合长度, 长度  
 $M, m$ : 分子量, 质量分数  
 $P, p'$ : 压强, 压强修正量  
 $\ddot{q}, \dot{Q}$ : 热量通量, 单位时间通过的热量  
 $R, r$ : 气体常数或反应速率; 半径  
 $\ddot{S}$ : 反对称张量, 源项  
 $T$ : 对称张量, 温度  
 $u, U, u', U^+$ :  $x$  方向速度; 时均速度; 脉动速度; 无量纲速度  
 $v, V, v'$ :  $y$  方向速度; 时均速度; 脉动速度; 体积  
 $w, W, w'$ :  $z$  方向速度; 时均速度; 脉动速度  
 $x$ : 坐标轴方向  
 $y, y_p, y^+$ : 坐标轴方向; 离壁面距离; 无量纲距离  
 $z$ : 坐标轴方向  
 $a$ : 导温系数  $a = \lambda / (\rho c_p)$   
 $\beta$ : 体积膨胀系数  
 $\Gamma$ : 传输扩散系数  
 $\delta$ : 微小增量

- $\epsilon$ : 湍流动能耗散率, 式 (7-45) 定义; 误差大小; 无限小量  
 $\theta$ : 无量纲温度, 曲线坐标的轴  
 $\kappa$ : 常数  
 $\lambda$ : 导热系数  
 $\mu$ : 动力粘度系数  
 $\nu$ : 运动粘度系数  
 $\rho$ : 密度  
 $\sigma$ : 正应力; 二阶张量; 湍流的普朗特数  
 $\tau, \tau_0$ : 剪应力, 壁面处剪应力; 时间  
 $\phi, \Phi$ : 传递量可代表速度温度浓度等; 曲线坐标的轴; 耗散函数按 (1-27) 式定义  
 $\omega$ : 旋转角速度; 涡量

#### 上标含意

- 1: 新值  
 0: 旧值  
 n: n 次迭代, n 时刻  
 , : 修正量  
 \*: 迭代量, 总值按式 (7-1) 定义  
 —: 平均值, 向量

#### 下标含意

- E, W, N, S, T, B: 东面, 西面, 北面, 南面, 顶面和底面  
 e, w, n, s, t, b: 二相邻控制容积的界面, 含意同上  
 P: 主节点  
 nb: 所有与主节点相邻的节点  
 l, t: 层流与湍流  
 eff: 有效  
 i, j, k: x、y、z 三方向上节点的坐标, 张量表示的方向或哑元  
 s, l: 固态和液态

# 目 录

|                              |            |
|------------------------------|------------|
| 前言 .....                     | Ⅲ          |
| 符号清单 .....                   | V          |
| <b>第一章 传输方程概述 .....</b>      | <b>1</b>   |
| 第一节 流体力学的基本公式 .....          | 1          |
| 第二节 能量守恒方程 .....             | 7          |
| 第三节 质量传递方程及输运方程通式 .....      | 10         |
| <b>第二章 差分方程的基本知识 .....</b>   | <b>16</b>  |
| 第一节 求解区域的离散化 .....           | 16         |
| 第二节 差分方程的几种格式 .....          | 20         |
| 第三节 差分方程的相容性、收敛性和稳定性 .....   | 35         |
| <b>第三章 稳定态的传导传热方程 .....</b>  | <b>40</b>  |
| 第一节 一维稳定态的传导传热的离散方程 .....    | 41         |
| 第二节 二维或三维的稳定态传导传热的差分方程 ..... | 43         |
| 第三节 差分方程的四项基本准则 .....        | 47         |
| 第四节 几点技巧 .....               | 50         |
| 第五节 边界节点的差分方程 .....          | 54         |
| 第六节 二维稳定态传导传热例题 .....        | 56         |
| <b>第四章 不稳定态传导传热方程 .....</b>  | <b>61</b>  |
| 第一节 一维不稳定态传导传热的三种差分格式 .....  | 61         |
| 第二节 稳定性条件讨论 .....            | 66         |
| 第三节 二维和三维不稳定态传导传热差分方程 .....  | 72         |
| 第四节 代数方程组的求解方法 .....         | 74         |
| 第五节 不稳定态传热的边界节点的差分方程 .....   | 84         |
| 第六节 计算实例 .....               | 89         |
| <b>第五章 对流和扩散 .....</b>       | <b>100</b> |
| 第一节 稳定态一维对流和扩散方程 .....       | 100        |
| 第二节 上风方式 .....               | 103        |
| 第三节 精确解 .....                | 106        |



|                     |                                   |            |
|---------------------|-----------------------------------|------------|
| 第四节                 | 指数方式 .....                        | 107        |
| 第五节                 | 分段线性拟合方式 .....                    | 108        |
| 第六节                 | 二维和三维对流和扩散项的差分方程 .....            | 111        |
| 第七节                 | 虚假扩散系数 .....                      | 115        |
| <b>第六章</b>          | <b>流场计算</b> .....                 | <b>119</b> |
| 第一节                 | 动量方程的特殊性 .....                    | 120        |
| 第二节                 | 速度场的棋格式网格 .....                   | 121        |
| 第三节                 | 动量方程的差分方程 .....                   | 123        |
| 第四节                 | 压力修正方程 .....                      | 126        |
| 第五节                 | 边界条件 .....                        | 128        |
| 第六节                 | SIMPLE求解程序 .....                  | 131        |
| <b>第七章</b>          | <b>湍流模型简介</b> .....               | <b>133</b> |
| 第一节                 | 从层流到湍流的过渡 .....                   | 133        |
| 第二节                 | 湍流的Navier-Stokes方程 .....          | 138        |
| 第三节                 | 湍流数学模型的发展 .....                   | 141        |
| 第四节                 | $K-\varepsilon$ 双方程模型的导出和模化 ..... | 146        |
| 第五节                 | 雷诺应力方程和雷诺传热方程 .....               | 153        |
| <b>第八章</b>          | <b>应用举例</b> .....                 | <b>157</b> |
| 第一节                 | 连铸机中间包中的应用 .....                  | 157        |
| 第二节                 | 在均热炉中的应用 .....                    | 172        |
| 第三节                 | 在化学气态沉积过程的应用 .....                | 183        |
| <b>附录一</b>          | <b>向量和张量表示初步</b> .....            | <b>189</b> |
| <b>附录二</b>          | <b>传递方程的具体形式</b> .....            | <b>200</b> |
| <b>附录三</b>          | <b>湍流方程的推导</b> .....              | <b>211</b> |
| <b>附录四</b>          | <b>求逆矩阵程序</b> .....               | <b>218</b> |
| <b>主要参考书目</b> ..... |                                   | <b>221</b> |

# 第一章 传输方程概述

本书的目标是把传输方程变为计算机运算的差分方程。在此之前先对传递现象、术语、公式作一简单回顾，对公式的推导过程不进行介绍，主要讲公式的物理意义。

## 第一节 流体力学的基本公式

流体力学中最重要方程是从微元体的质量平衡和动量平衡所导出的连续方程和Navier—Stokes方程。从宏观上说，流体流动可以分为层流和湍流两种，由此对这两种流动状态的连续方程和Navier—Stokes方程也不相同。为方便起见，先介绍层流，湍流的方程在第七章专门介绍。在此之前，先描述一些基本概念，有助于对物理现象的理解。

### 一、动量、动量变化率、动量通量

从物理学知， $mu$ 为动量，其单位是 $[kgm \cdot s^{-1}]$ ；动量变化率 $\frac{mu}{\tau}$ 是单位时间内动量的变化，它的单位是 $[N]$ ，这是力的单位，所以动量变化率与作用在流体上的力能相互产生联系。单位面积上的动量变化率 $mu/(A\tau)$ ，也叫动量通量，其单位是 $[Nm^{-2}]$ ，这是压强或应力的单位，所以动量通量与作用在流体上的压强，与由于粘性而产生的剪应力和正应力能相互产生联系。有时把由粘性而产生的剪应力叫粘性动量通量。在流体力学上，常用的单位是单位体积流体所具有的动量，可表示成 $\rho u$ ；单位体积流体的动量变化率写成 $\rho u/\tau$ ；而单位体积流体的动量通量是 $\rho u/(A\tau)$ 。

### 二、牛顿粘性定律

牛顿曾做过这样的试验：上平板固定不动，把下平板保持以 $u_0$ 速度运动，二平板间充满了粘性液体，他发现对下平板必须施

加一个恒定的力，才能维持下板的运动速度 $u_0$ 不变。该力的大小可表示成

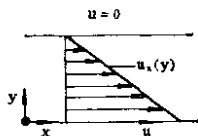


图 1-1 牛顿粘性实验

$$\tau_{yx} = -\mu \frac{du}{dy} \quad (1-1)$$

式中 $\mu$ 是比例常数，叫动力粘度系数（viscosity），剪应力 $\tau_{yx}$ 与速度梯度成正比。负号的作用是保证在此条件下（正方向的动量传递）的剪应力的值为正。流体凡符合此实验定律的都叫作牛顿流体。相反，则有非牛顿流体。我们仅讨论牛顿流体时的情况。

剪应力的下标具有如下含义：第一个字母 $y$ 表示与剪应力作用平面相垂直的轴；或表示由于速度梯度而引起的动量的传递方向。第二个字母 $x$ 表示剪应力作用的方向；或理解成这个动量传递是由 $x$ 方向的流动所引起的。当然还可作其它解释，基本理解是这二种。

在 $\rho$ 为常数时，即为不可压缩的均质流体时，牛顿粘性定律也可写成（注：以后简称不可压缩流体）

$$\tau_{yx} = -\frac{\mu}{\rho} \frac{d(\rho u)}{dy} = -\nu \frac{d(\rho u)}{dy} \quad (1-2)$$

式中比例常数 $\nu$ 叫运动粘度系数（Kinematic Viscosity）。如果流体不是一维的流动，而是空间上具有三维的性质，则剪应力的形式要进行改写和推广，具体如下：

在刚体运动中，向量 $\bar{v}$ 可分解成平动和转动二项。在流体流动中，流体除平动、转动外，还有流体的变形。这可以由Taylor

级数对  $\bar{v}$  展开, 并略去二阶以上高阶微分量而得到

$$\bar{v}_i = \bar{v}_i(0) + \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} \delta x_j \quad (1-3)$$

式中第一项表示流体的平动, 而第二项  $\partial \bar{v}_i / \partial x_j$  又可以用共轭张量  $\partial \bar{v}_j / \partial x_i$  加减的方法, 分别变成二项

$$\begin{aligned} (\nabla \bar{v})_{ji} &= \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) \end{aligned} \quad (1-4)$$

由于  $\nabla \bar{v}$  是二阶张量, 所以经分解所得的二项也均是二阶张量, 其中第一部分是\*\*对称张量, 取名为  $T$ ; 第二部分是\*\*反对称张量, 取名叫  $S$ 。下面看一下这两个张量的含意和特征。

$$\begin{aligned} T &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_2} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_3} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_1} \right) & \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial x_2} + \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_3} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_3} + \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_3} + \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial x_2} \right) & \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{2\mu} \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1-5)$$

很明显, 张量  $T$  具有对称性, 即  $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ , 其物理含意是代表由于粘性面产生的正应力 ( $\tau_{xx}, \tau_{yy}, \tau_{zz}$ ) 和剪应力 ( $\tau_{yx}, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zy}, \tau_{zx}, \tau_{xz}$ )。表示在应力作用下流体微团的体积变形。如果是可压缩流体, 则在正应力项上还要加上变形粘性系数 (Bulk

Deformation), 其值为  $-\frac{2}{3}\mu$  (见附录二表5)。

$$\begin{aligned}
\mathbf{S} &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_2} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial x_1} - \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_3} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_1} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_3} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_3} - \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial x_2} \right) & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \bar{\omega}_{12} & \bar{\omega}_{13} \\ \bar{\omega}_{21} & 0 & \bar{\omega}_{23} \\ \bar{\omega}_{31} & \bar{\omega}_{32} & 0 \end{pmatrix} \quad (1-6)
\end{aligned}$$

$\mathbf{S}$ 是反对称张量, 具有 $\bar{\omega}_{ij} = -\bar{\omega}_{ji}$ 的特性。 $\bar{\omega}$ 叫角速度, 这部分表示由于粘性而引起流体微团的旋转, 可用旋度来表示。

$$\nabla \times \bar{\mathbf{v}} = \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_1} - \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_1} = 2\bar{\omega}_{11} \quad (1-7)$$

如果流体的旋度为零, 此流体叫势流。

对直角坐标系, 广义的牛顿剪应力可写成下式

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} = -\mu \left( \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial x} \right) \quad (1-8a)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = -\mu \left( \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial z} + \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial y} \right) \quad (1-8b)$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = -\mu \left( \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial z} \right) \quad (1-8c)$$

$$\tau_{xx} = -2\mu \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \frac{2}{3}\mu (\nabla \cdot \bar{\mathbf{v}}) \quad (1-8d)$$

$$\tau_{yy} = -2\mu \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} + \frac{2}{3}\mu (\nabla \cdot \bar{\mathbf{v}}) \quad (1-8e)$$

$$\tau_{zz} = -2\mu \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} + \frac{2}{3}\mu (\nabla \cdot \bar{\mathbf{v}}) \quad (1-8f)$$

以上公式用张量表示比较简明, (有关张量的初步知识请看附录一), 此时九个剪应力分量可统一表示成

$$\tau_{ij} = -\mu \left( \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) - \lambda \delta_{ij} \frac{\partial \bar{v}_l}{\partial x_l} \quad (1-9)$$

$\lambda$ 叫第二粘度系数, 其值为 $-2/3\mu$ , 有时写成更普遍的形式:  $\lambda = k - \frac{2}{3}\mu$ , 其中 $k$ 表示由于体积膨胀而引起的粘性系数 (Bulk Viscosity), 工程计算时 $k$ 一般略去。

### 三、连续方程

从流体中取出一个微元体作质量平衡, 可得

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0 \quad (1-10)$$

或

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \nabla \cdot (\rho \bar{v}) = 0 \quad (1-11)$$

或

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (1-12)$$

连续方程表示: 单位体积流体的密度变化率等于流入该体积的净质量变化率。如果把 $\bar{v}$ 看作时均速度, 则此式也适用于湍流状态。

对于稳定的流动, 流场各点的物理量不随时间而变化, 此时式(1-11)可简化为

$$\nabla \cdot (\rho \bar{v}) = 0 \quad (1-13)$$

对于不可压缩流体,  $\rho = \text{const}$ , 则可进一步简化

$$\nabla \cdot \bar{v} = 0 \quad (1-14)$$

不同坐标系的连续方程有不同形式, 可查附录二。

### 四、Navier—Stokes方程 (或动量方程)

作为连续介质的流体, 在运动时, 除要受到质量守恒的制约

外,还必须同时遵守牛顿第二定律所反映的动量守恒定律。即作用在流体上的力应与运动流体的惯性力相平衡。其微分方程可写成(对不可压缩流体而言):

$$\frac{\partial(\rho \bar{v})}{\partial \tau} + \nabla \cdot (\rho \bar{v} \bar{v}) = -\nabla \cdot \tau - \nabla P + \rho \bar{g} \quad (1-15)$$

或

$$\frac{\partial(\rho \bar{v}_i)}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \bar{v}_j \bar{v}_i) = -\frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{ij} - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \rho \bar{g}_i \quad (1-16)$$

式中第一项是单位体积流体的动量变化率,或叫动量积累项;第二项是由于流体流动而引起的动量变化,叫作对流项;第三项是由于粘性而引起的动量变化,叫作扩散项;第四项是压力梯度的影响,第五项是体积力,此处只考虑重力的作用,其实其它的力如电磁力等也可以进入此项。

对于直角坐标系,不可压缩的牛顿流体,Navier—Stokes方程可写成下列形式。

x 方向

$$\begin{aligned} & \rho \left( \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial \tau} + v_x \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial z} \right) \\ &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial z^2} \right) + \rho g_x \end{aligned} \quad (1-17a)$$

y 方向

$$\begin{aligned} & \rho \left( \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial \tau} + v_x \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial z} \right) \\ &= -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 \bar{v}_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_y}{\partial z^2} \right) + \rho g_y \end{aligned} \quad (1-17b)$$

z 方向

$$\rho \left( \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \tau} + v_x \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} \right)$$

$$= -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 \bar{v}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_z}{\partial z^2} \right) + \rho g_z \quad (1-17c)$$

写成张量形式是

$$\rho \left( \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial \tau} + v_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \mu \left( \frac{\partial^2 \bar{v}_i}{\partial x_j \partial x_j} \right) + \rho g_i \quad (1-18)$$

对于其它曲线坐标的Navier—Stokes方程可查附录二。

对于理想流体,  $\mu=0$ , Navier—Stokes方程转变为Euler方程

$$\rho \left( \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial \tau} + v_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \rho g_i \quad (1-19)$$

对稳定态的理想流体流动, Euler方程又转化成Bernoulli方程, 它在工程上得到了广泛的应用。其形式为

$$\bar{v} \cdot d\bar{v} + \frac{1}{\rho} dP - g dz = 0 \quad (1-20)$$

式中三项分别表示流体所具有的能量, 即动压头, 静压头和位压头。式 (1-20) 表明: 流体中这三种压头之和应该守恒。

在湍流流动时, 不可压缩的牛顿流体的Navier—Stokes方程可表示成

$$\frac{\partial U_i}{\partial \tau} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j} + g_i - \frac{\partial u'_i u'_j}{\partial x_j}$$

式中速度U是时间平均值,  $u'$ 代表湍流流动时的脉动速度, 详细介绍见第七章。

## 第二节 能量守恒方程

导热现象应遵循Fourier定律, 它也是一个实验定律, 可表达为

$$\dot{q} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \quad (1-21)$$



在三维空间中，应写成更普遍的形式

$$\dot{q} = -\lambda \nabla T \quad (1-22)$$

式中  $\lambda$  是比例常数，叫导热系数 (Conductivity)， $\lambda$  可以是温度的函数，也可以是空间的函数。而  $T(x, y, z, \tau)$  叫作温度场，是时间和空间的函数。Fourier定律适用于连续温度场，而不管该温度场是稳定态还是非稳定态。它只揭示了固体介质的连续温度场内，每一点上温度梯度与热流密度向量之间的联系。但未能揭示一个点温度与它相邻点的温度之间的联系，也没有揭示出这一时刻的温度与同一位置下一时刻的温度之间的联系。

建立在能量守恒基础上的Fourier导热方程可表示为

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial \tau} = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + \ddot{q} \quad (1-23)$$

Fourier导热微分方程正好弥补了Fourier定律的缺陷，它能提供固体介质内各点之间的温度分布和不同时刻温度场变化的信息，式中  $c_p$  是定压比热，而  $\ddot{q}$  是表示内热源。

能量守恒方程比Fourier导热微分方程更具有普遍性，适用于流体流动状态下的热量传递，所以包括对流流动而引起的能量传递。能量守恒方程是从热力学第一定律推导而得的，其形式为 ( $\rho = \text{const}$ )

$$\begin{aligned} \rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial \tau} + v_i \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) &= T \beta \frac{DP}{D\tau} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) \\ &+ \mu \Phi + \ddot{q} \end{aligned} \quad (1-24)$$

或写成向量形式

$$\rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial \tau} + (\vec{v} \cdot \nabla) T \right) = T \beta \frac{DP}{D\tau} - \nabla \cdot \dot{q} + \mu \Phi + \ddot{q} \quad (1-25)$$

式中  $\frac{D}{D\tau}$  叫实质微分 (Substantial Derivative)，它包括对时间的微分和对空间的微分。式 (1-24) 中第一项是热量在微元体内随时间的变化，叫积累项；第二项是由于流体流动而引起的净热