

大学基础数学自学丛书

空间解析几何

朱鼎勋



019614

大学基础数学自学丛书

空间解析几何

朱 鼎 勋



上海科学技术出版社

03

大学基础数学自学丛书

空间解析几何

朱 鼎 勋

上海科学技术出版社出版

(上海瑞金二路 450 号)

新华书店上海发行所发行 江西印刷公司印刷

开本 $787 \times 1092 \frac{1}{32}$ 印张 15.375 字数 339,000

1981 年年 7 月第 1 版 1981 年 7 月第 1 次印刷

印数: 1—61,000

统一书号: 13119.925 定价: (科四) 1.40 元

6153/13

序 言

我们伟大的祖国,为了尽早实现四个现代化的宏伟大业,需要造就大批又红又专的、具有高度文化修养和现代科学知识的工业大军、农业大军、科技大军、文化大军和国防大军。这是一项摆在全体人民面前的极为艰巨的任务。人才的培养,基础在教育。然而,目前我国每年只可能吸收很小一部分中学毕业生进入高等院校深造,大批已经走上或将要走上各种工作岗位的千千万万青年人,都迫切要求学习现代科学基础知识,以适应新时期的需要。所以,在办好高等院校的同时,还应尽量为那些不能升入大学或无法离职进入大学的青年提供良好的业余学习条件。为此,上海科学技术出版社编辑出版《大学基础数学自学丛书》、《大学基础物理自学丛书》和《大学基础化学自学丛书》。

《大学基础数学自学丛书》由我们负责主编,由北京大学、北京师范大学和复旦大学数学系有关教师执笔编写。包括《一元函数微分学》、《一元函数积分学》、《多元函数微积分》、《级数》、《空间解析几何》、《高等代数》、《复变函数论基础》、《常微分方程基础》、《概率论与数理统计基础》、《微分几何基础》、《有限数学引论》等共十一种,可供具有相当于高中文化程度、有志于自学大学数学课程的广大读者使用。

本《丛书》是一套大学基础课的自学读物,与中学程度的《数理化自学丛书》相衔接。为了使自学读者在没有教师讲课的条件下读懂、学好,其内容选取和编排不同于一般的大学课

本。文字叙述用讲课的形式书写；概念引入尽量从具体的、通俗的地方入手，逐步深入；内容安排抓住重点，讲深讲透。为了对读者解题有所启发，巩固所学的基础知识等，文中举有较多的例题；凡估计读者容易发生困难的地方，尽量给予必要的分析。习题、例题均按章分节安排，书后附有习题答案或提示。每册之首都有编者的话，指导读者自学全书。总之，想尽可能减少自学中的困难。

自学，时间总比在校学习紧得多。要自学有成就，没什么“诀窍”，如果有的话，那就是“多思考，多练习，熟能生巧”。

学习必须从自己的实际水平出发，学每本书要有一定的基础。选读顺序可根据编者的话的指导进行。有志者，事竟成。希望广大读者循序渐进、持之以恒、锲而不舍地学习。愿大家努力学好。

《丛书》编审过程中得到了北京大学数学系、北京师范大学数学系和北京师范学院数学系领导的大力支持；许多同志参加了提纲、样稿的讨论，并提供了宝贵的意见；编撰者和审稿人为《丛书》付出了辛勤的劳动，谨此一并致谢。

由于《丛书》编写和出版的时间仓促，难免有缺点和错误，希望读者不吝赐教！

江 泽 涵

赵 慈 庚

于北京大学燕南园 于北京师范大学工五楼

1980年1月

编 者 的 话

本书是根据 1977 年 10 月高等学校理科教材编写会议所拟的空间解析几何大纲(有关欧氏几何部分)的精神及编者多年从事教学实践的体会,为已学过中学代数、几何和三角等课程(特别是立体几何和平面解析几何)的读者进一步自学而编写的。

本书利用坐标法和向量法比较系统地、完整地介绍了欧氏三维解析几何。为了配合欧氏空间度量性质的特点,仅采用笛氏直角坐标系。由于欧氏三维解析几何虽然是二维解析几何的推广,但两者又不尽相同。通过三维空间可以比较容易地推广到 n 维空间。因此保持欧氏三维解析几何的系统性、完整性以作为一门数学基础课是完全必要的。

从另一角度看,本书以向量代数作为工具,在不用坐标系下直接讲授一些初等几何问题;然后将向量与坐标联系起来讲授空间解析几何。这些也就是近代常提到的向量几何的部分内容。

通过这门课的学习,为初等几何提供了另一种研究方法,为进一步学习高等几何打下一定的基础,为学高等代数提供具体模型,为学经典分析准备必要的知识。同时,也为力学、物理学和一切工程技术提供必要的数学工具。因此,在编写中注意到了与这些方面的联系。

为了便于自学,本书在概念的引入、定理的论证和叙述方面都力求详尽。对一些问题的提法注意到课程本身前后的联

系,特别是与平面解析几何的类比.为了使读者掌握解题方法及技巧,选配了相当数量的例题及习题,并对题目的选取注意到由简到繁和不同类型问题的解法,这是本书的重要组成部分.

编写时还考虑到读者基础的差异,以及将来需求的不同,在编写和选材上,特别注意到内容的伸缩性及灵活性.较难章节或次要章节都标以星号(*) (用小字排印),初读者可以暂时不读.每章后配有复习题及思考题,后者难度较大.在例题和习题中标以(*)号者也较难,初学者也可先不做.

本书所需的高等代数一些知识列为附录,但只叙述而不加证明.

本书可供具有高中文化水平的知识青年、在职干部、工人自学,也可供大学一年级学生及有关教师参考.

本书编写过程中曾和部分院校的同志讨论了初稿,根据大家提出的宝贵意见作了修改.北京师范学院刘增贤同志和复旦大学华宣积同志先后审阅了全稿.在定稿过程中,上海科学技术出版社理科编辑室的同志也提出许多宝贵意见.编者对上述同志谨表示衷心的感谢.

由于编者水平有限,编写时间仓猝,不妥之处在所难免,欢迎读者批评指正.

朱 鼎 勋

于北京师范大学数学系

1980年7月

目 录

序言 编者的话

第一章 空间直角坐标

第一节 空间直角坐标系	1	第四节 空间两方向间的角度	29
1.1 右手系和左手系	1	4.1 两条射线的夹角	29
1.2 空间点的坐标	4	4.2 两条射线垂直的充要条件	32
1.3 卦限和坐标的符号	9	4.3 两条射线平行的充要条件	32
1.4 坐标系的平移	12	习题 1.4	36
1.5 简单轨迹问题	13	第五节 空间线段的定比分点	37
习题 1.1	15	5.1 线段分比和分点的对应关系	37
第二节 两点间的距离	17	5.2 定比分点的坐标	37
2.1 两点间的距离	17	习题 1.5	40
2.2 简单轨迹问题	19	本章提要	41
习题 1.2	19	复习题一	43
第三节 空间方向的确定	21	思考题一	45
3.1 用射线表示方向	21		
3.2 方向余弦	21		
3.3 方向数	26		
习题 1.3	28		

第二章 向量代数

第一节 数量和向量	47	2.1 两个向量的加法	52
1.1 两类量	47	2.2 运算律	55
1.2 向量的表示法	48	2.3 多个向量的加法	55
1.3 几种特殊向量	50	习题 2.2	58
习题 2.1	51	第三节 向量减法	58
第二节 向量加法	52	习题 2.3	60

第四节 数与向量的乘法.....61	8.3 数量积的分量表示99
4.1 数与向量的乘法61	习题 2.8103
4.2 运算律63	第九节 向量的矢乘法104
4.3 定比分点的位置向量 ...67	9.1 两向量的矢乘法.....104
习题 2.470	9.2 运算律.....109
第五节 向量的线性关系.....71	9.3 向量积的分量表示.....114
5.1 共线向量71	习题 2.9117
5.2 共面向量74	第十节 三向量的乘法119
5.3 向量的分解77	10.1 数量三重积119
*5.4 向量的相关性78	*10.2 向量三重积126
习题 2.579	习题 2.10128
*第六节 向量的线性运算在初等 几何上的应用81	*第十一节 多向量的乘法.....129
习题 2.685	习题 2.11131
第七节 向量的分量.....86	第十二节 向量方程的概念131
习题 2.791	习题 2.12132
第八节 向量的数乘法.....92	本章提要132
8.1 两向量的数乘法92	复习题二134
8.2 运算律95	思考题二137

第三章 平 面

第一节 平面方程的点法式和普 遍式138	习题 3.2153
1.1 平面方程的点法式.....138	第三节 平面方程的法线式154
1.2 平面方程的普遍式.....141	3.1 平面方程的法线式.....154
1.3 平面方程普遍式的讨 论.....142	3.2 化平面方程的普遍式为 法线式.....155
习题 3.1145	习题 3.3158
第二节 平面方程的三点式和参 数式146	第四节 点和平面的关系159
2.1 平面方程的三点式.....146	4.1 平面到点的有向距离...159
2.2 平面方程的参数式.....148	4.2 两点在平面同侧的判定162
2.3 三条件确定一平面.....150	4.3 由两点所定的直线与定 平面的交点分这两点所 成线段的比.....163
2.4 平面的作图.....151	

习题 3.4	165	7.1 与一个平面平行的平面族.....	183
第五节 两个平面的关系	166	7.2 平面束.....	184
5.1 两个平面的相关位置.....	166	7.3 过一定点的平面把.....	188
5.2 两个相交平面的交角和 平分角面.....	168	*7.4 过三个平面的交点的平 面把.....	190
5.3 两个平行平面的距离.....	172	习题 3.7	193
习题 3.5	173	本章提要	194
*第六节 三平面的关系.....	174	复习题三	195
习题 3.6	182	思考题三	198
第七节 平面族	183		

第四章 空间直线

第一节 空间直线方程的各种形 式	200	习题 4.2	217
1.1 直线方程的参数式、对 称式和两点式.....	200	第三节 空间两直线的关系	218
1.2 直线方程的普遍式和投 射式.....	207	3.1 两直线的相关位置.....	218
1.3 四条件确定一空间直线	210	3.2 点到直线的距离和两平 行直线的距离.....	225
习题 4.1	210	3.3 两异面直线的公垂线.....	228
第二节 直线与平面的关系	211	习题 4.3	233
2.1 直线与平面的相关位置	211	第四节 平面和空间直线的结合 问题	234
2.2 直线与平面的交角.....	215	习题 4.4	241
		本章提要	243
		复习题四	243
		思考题四	246

第五章 曲面方程和空间曲线方程

第一节 空间点的轨迹	248	2.3 第三个基本问题——曲 面方程的讨论.....	255
习题 5.1	249	2.4 曲面的参数方程.....	260
第二节 曲面	250	习题 5.2	262
2.1 第一个基本问题——曲 面的方程.....	250	第三节 空间曲线	263
2.2 第二个基本问题——三 元方程的几何意义.....	254	3.1 第一个基本问题——空 间曲线的方程.....	263

3.2 第二个基本问题——两个三元方程的几何意义265	*4.3 一般的坐标变换与点变换.....280
3.3 第三个基本问题——空间曲线方程的讨论.....265	习题 5.4281
3.4 空间曲线的参数方程...266	第五节 曲面和空间曲线的分类·283
习题 5.3268	5.1 曲面的分类.....283
第四节 空间坐标变换268	5.2 空间曲线的分类.....286
4.1 坐标系的平移(续).....268	习题 5.5287
4.2 坐标系的旋转.....271	本章提要287
	复习题五288
	思考题五289

第六章 特殊曲面

第一节 球面290	3.2 直纹曲面的参数方程...320
1.1 球面的方程.....290	习题 6.3322
*1.2 球坐标系.....295	第四节 简单的直纹曲面322
1.3 点与球面的关系.....296	4.1 柱面.....322
1.4 直线与球面的关系.....296	4.2 锥面.....328
1.5 平面与球面的关系.....299	*4.3 劈锥面.....334
*1.6 两球面的关系.....301	4.4 曲线的投射柱面.....336
1.7 空间圆的方程.....303	*4.5 直圆锥面的平截线.....339
1.8 球面族.....305	习题 6.4341
习题 6.1308	第五节 旋转曲面342
第二节 直圆柱面和直圆锥面 ...310	5.1 旋转曲面的普遍方程...342
2.1 直圆柱面的方程310	5.2 旋转曲面的参数方程...347
2.2 柱坐标系312	5.3 二次旋转曲面.....349
2.3 直圆锥面的方程.....313	习题 6.5351
习题 6.2315	本章提要352
第三节 曲线产生曲面316	复习题六353
3.1 曲面方程的第二种建立法.....316	思考题六356

第七章 二次曲面

第一节 有心二次曲面357	1.3 双叶双曲面.....364
1.1 椭圆面.....357	习题 7.1367
1.2 单叶双曲面.....361	第二节 无心二次曲面368

2.1 椭圆抛物面.....	368	面上且对称轴平行于坐	
2.2 双曲抛物面.....	371	标轴的二次曲线的作图	
习题 7.2	373		386
第三节 直纹二次曲面	374	4.3 二次曲面的作图.....	388
3.1 单叶双曲面的直纹性...	374	4.4 二次曲面所围空间区域	
3.2 双曲抛物面的直纹性...	381	的简图.....	389
习题 7.3	382	习题 7.4	391
*第四节 二次曲面的作图.....	383	第五节 二次曲面标准方程小结	391
4.1 关于在坐标面上对称轴		习题 7.5	394
为坐标轴的二次曲线的		本章提要	395
作图.....	383	复习题七	395
4.2 关于平行于坐标面的平		思考题七	397

第八章 二次曲面普遍方程的研究

第一节 直线和普遍二次曲面的		习题 8.4	427
相关位置	398	第五节 二次曲面普遍方程的化	
习题 8.1	402	简	427
第二节 平面和普遍二次曲面的		习题 8.5	431
相关位置	403	第六节 普遍二次曲面的不变量	
2.1 普遍二次曲面的平截线		完全系统	431
的性质.....	403	6.1 普遍二次曲面的不变量	
2.2 二次曲面的切面和法线			431
.....	403	6.2 普遍二次曲面的不变量	
习题 8.2	408	完全系统.....	435
第三节 普遍二次曲面的中心 ...	409	习题 8.6	439
3.1 径平面.....	409	第七节 化二次曲面的普遍方程	
3.2 中心.....	411	为归范方程	440
习题 8.3	418	习题 8.7	445
第四节 普遍二次曲面的主方向	419	本章提要	446
4.1 主平面.....	419	复习题八	447
4.2 主方向.....	420	思考题八	449

附录 有关代数的一些知识

第一节 行列式	451	第三节 线性方程组	454
第二节 矩阵	452	第四节 特征方程	457

习题答案

第一章

空间直角坐标

在平面解析几何里,我们首先建立了平面直角坐标,使平面内的点和一对有序实数(坐标)建立了一一对应的关系.然后在这个基础上,又建立了平面内的曲线和二元方程间的对应关系,从而可以利用代数运算来解决几何问题.这就是平面解析几何的基本思想,其所用的方法就是坐标法.

在空间解析几何里,我们采用同样的思想来研究空间几何问题,所用的方法除坐标法外,还采用了向量法.在这一章里,首先建立空间直角坐标系,使空间内的点和有序的三实数组(坐标)建立一一对应的关系.然后利用坐标来解决一些基本问题——两点间的距离、空间的方向和线段的定比分点.这些内容都是为将来进一步学习所必需的基本知识.另一方面,这些内容又为第二章向量代数中某些概念的引入作了数学上的准备.

第一节 空间直角坐标系

1.1 右手系和左手系

我们知道,经过平面内一个定点 O , 可以作两条互相垂直的有向直线 $x'Ox$ 和 $y'Oy$. 考虑到它们的位置关系,就有两种情况,如图 1-1 中的 (a) 和 (b), 为了方便,也可以用两条有向半直线表示成图 1-2 中的 (a) 和 (b).

下面我们来看一下图 1-2 中两个图的区别. 首先在它们

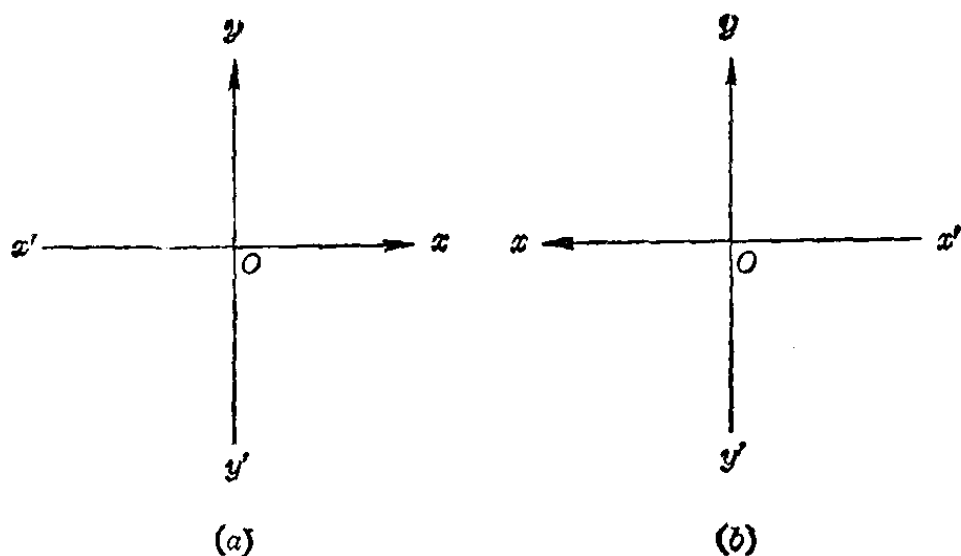


图 1-1

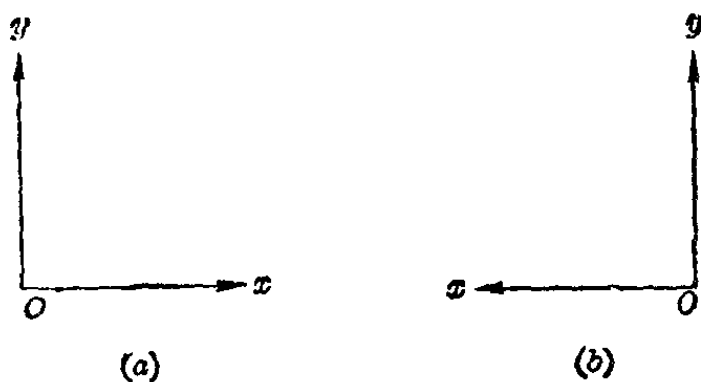


图 1-2

所在平面的一侧进行观察：在图(a)中 $\angle xOy$ 是正角，我们把 Ox , Oy 的这种排列顺序叫做右手系；而在图(b)中 $\angle xOy$ 是负角，我们把 Ox , Oy 的这种排列顺序叫做左手系。当选定了单位线段(也就是它的长度是一个单位)，我们就说：在图 1-1 的 (a) 或 (b) 中建立了一个平面直角坐标系。过去在平面解析几何里就是采取图 1-1 (a) 中所建立的那一种右手系。

现在我们把它推广到空间。经过空间内一点 O ，作三条两两互相垂直的有向直线 $x'Ox$, $y'Oy$ 和 $z'Oz$ 。同样有两种情况出现，如图 1-3 中的 (a) 和 (b)，其中正的部分用实线表示，负的部分用虚线表示，或者用三条有向半直线表示成两个直

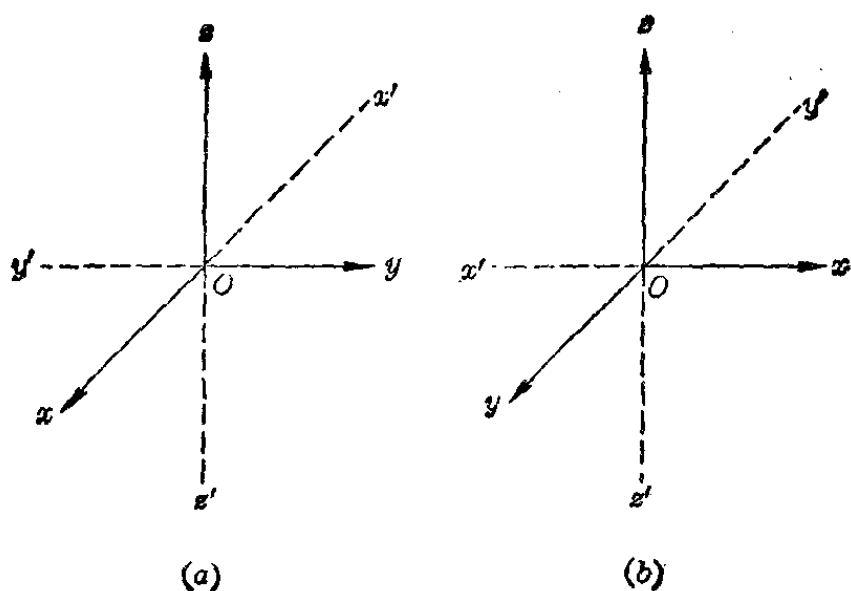


图 1-3

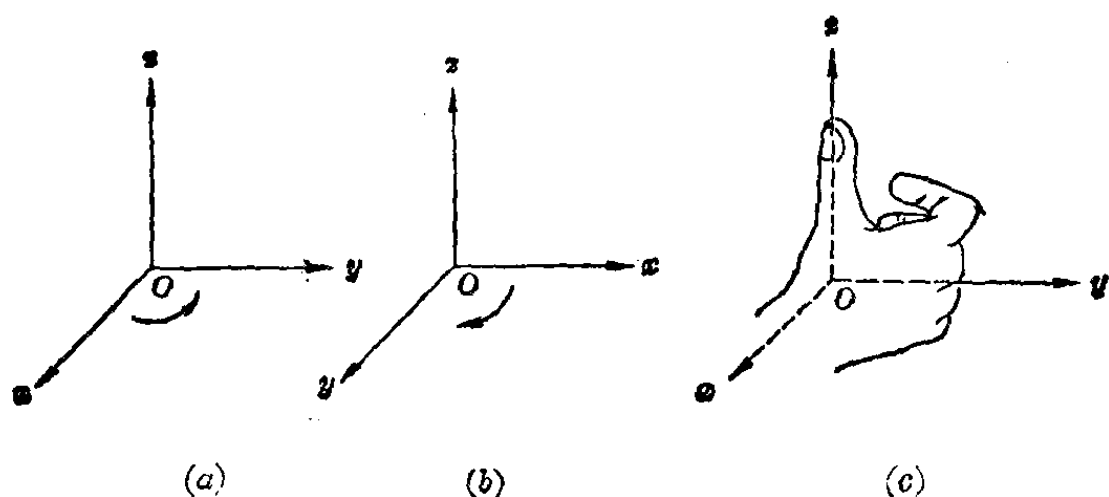


图 1-4

三面角, 如图 1-4 中的 (a) 和 (b)。

我们在图 1-4(c) 中以右手拇指直立表示 Oz 方向, 将指掌弯成弧形, 于是就可以看出: 由指掌到指尖的转动方向将是 Ox 经过最短路径到 Oy 的转动方向。同样可以用左手来说明图 1-4(b) 的情况。或者将右手的拇指、食指、中指伸开, 使互相垂直 (见图 1-5(a)), 以拇指指 Ox 的方向, 食指指 Oy 的方向, 则中指所指的方向为 Oz 的方向, 此与图 1-4(a) 相适合。同样, 图 1-5(b) 与图 1-4(b) 相适合。

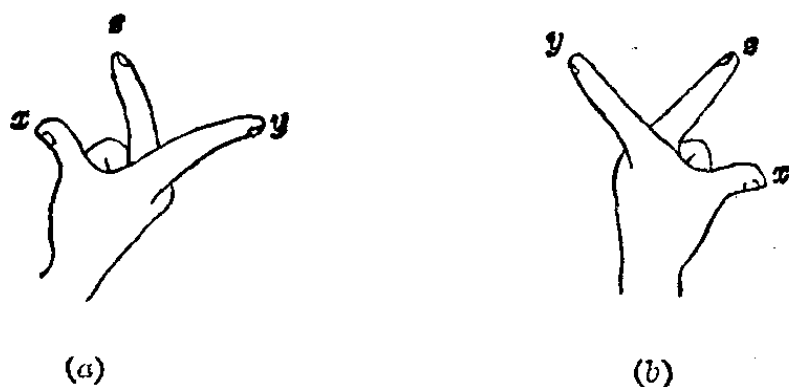


图 1-5

因此,我们将图 1-4(a)叫做右手系;图 1-4(b)叫做左手系.它们是由有向半直线的位置关系不同而区分的.为了和工程技术的要求相配合,从现在坐标系的建立和后面向量的运算都采用右手系.

【例 1】说明图 1-6 中的直三面角哪一个为右手系?

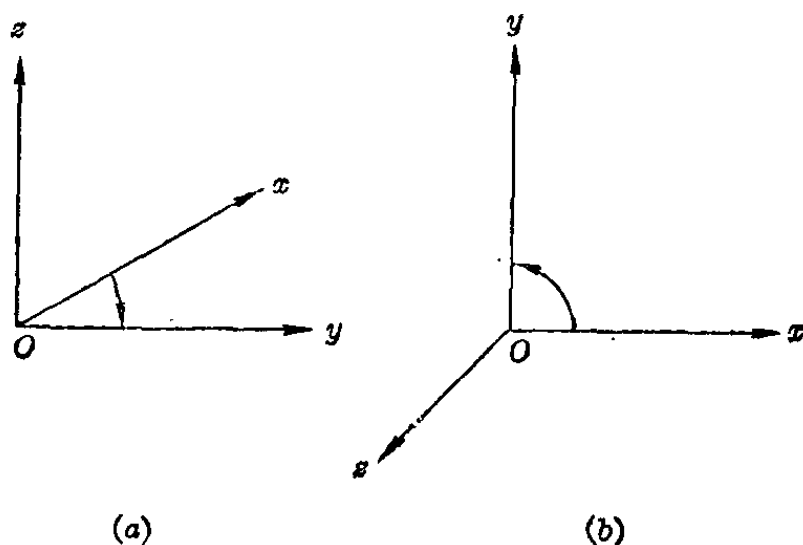


图 1-6

解: 图 1-6(a) 表示左手系. 在图 1-6(b) 中以右手拇指向前表示 Oz . 将手掌弯成弧形, 于是手掌到指尖的转动方向是 Ox 经过最短路径到 Oy 的转动方向, 于是它表示右手系.

1.2 空间点的坐标

在平面解析几何里,为了确定点的位置,我们首先建立了

直线上点的坐标系以及平面内点的坐标系，然后就可以确定直线或平面内点的位置，它们分别用一个实数或一对有序实数来确定。于是，我们就得知直线上点的坐标只有一个，平面内点的坐标有两个。现在将其推广到空间情况上去。

采取图 1-3(a) 或 1-4(a) 并选定一个单位线段，我们就建立起一个空间笛氏直角坐标系，简称空间直角坐标系，它是一种最简单而又特别适用的坐标系，记作 $Oxyz$ 。定点 O 叫做原点。三条有向直线 $x'Ox$ 、 $y'Oy$ 和 $z'Oz$ 叫做坐标轴，分别叫做第一轴、第二轴和第三轴或横轴、纵轴和立轴，简称为 x 轴、 y 轴和 z 轴。三个平面 $y'yz'z'$ 、 $z'zx'x'$ 和 $x'xy'y'$ 叫做坐标面，分别叫做第一面、第二面和第三面，简称为 yz 面、 zx 面和 xy 面。

现在我们利用一个房间作为空间直角坐标系的模型 (图 1-7)。以屋中的地面为 xy 面，所面对的墙面为 yz 面，左面的墙面为 zx 面，使它们与图 1-4(a) 一致。于是 x 轴是左墙面和地面的交线， y 轴是前墙面和地面的交线， z 轴就是两个墙面的交线。原点就是前、左、地三面的交点。这样用直观易懂的实物来说明空间坐标系，对以后研究问题就比较容易理解了。

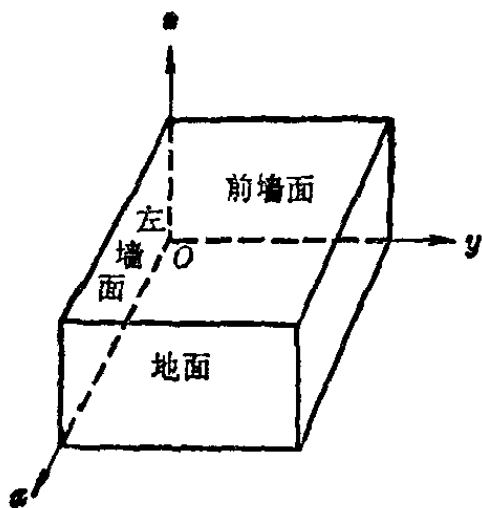


图 1-7

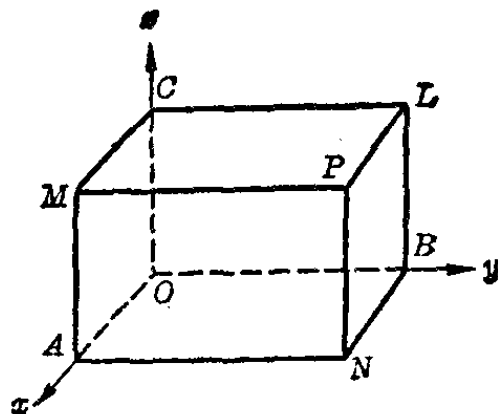


图 1-8