弹性理论

王龙甫 编

科学出版社

弹性理论

王龙甫 编

科学出版社

1978

内 容 简 介

本书全面、系统地阐述了弹性力学的基本理论问题以及一些特殊的问题，如薄板的弯曲、稳定，等截面杆的扭转、弯曲问题，等等．介绍了求解弹性理论问题的变分法、有限差分法及有限单元法．在附录中还介绍了断裂力学的基本概念．

弹 性 理 论

王 龙 甫 编

*

科 学 出 版 社 出 版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1978年3月第一版　开本：850×1168 1/32

1978年3月第一次印刷　印张：13 7/8

印数：0001—20,330　字数：365,000

统一书号：13031·682

本社书号：985·13—2

定价：1.70 元

目　　录

第一章 绪　　论

§1-1 弹性理论的任务

弹性理论是研究弹性物体在外部因素(例如荷载、温度变化等)作用下所产生的应力和形变[1]的一门科学.

伟大领袖毛主席教导说：**“人的正确思想，只能从社会实践中来，只能从社会的生产斗争、阶级斗争和科学实验这三项实践中来.”**弹性理论是人们从长期的生产斗争和科学实验的实践中总结出来的，不是少数科学家凭空想出来的. 正确的理论必出于实践；反过来，理论又为实际斗争服务. 我们学习弹性理论是为我国社会主义建设服务. 在实践中再总结使理论进一步发展.

弹性理论与材料力学相比，在研究对象、基本假设、研究方法等方面有相同的地方，也有不同的地方.

弹性理论与材料力学的研究对象有些是相同的，例如它们同样研究梁的弯曲与圆截面杆的扭转等. 但由于基本假设与研究方法不尽相同，所得的结论也就有所不同. 在材料力学中研究梁的弯曲，除引用 §1-2 中的基本假设外，还引用梁截面的平面假设，得出梁中正应力沿梁高度按直线分布的结果，这只在一定范围内(梁截面高度 h 与其跨度 l 相比为小时)是接近于实际情况的，按弹性理论的研究，一般说来，梁中正应力并不是沿梁高度按直线分布的. 诸如非圆截面杆的扭转、圆孔附近的应力集中、两个弹性体的接触应力、无限大弹性体中的应力分布以及板与壳中的应力等问题，都不是材料力学的简单方法所能解决的，必须用弹性理论的方法来解决.

1) 术语“形变”和“形变分量”是指单位长度的伸长或缩短，在有些书中，也有用“应变”的.

§1-2 弹性理论的基本假设

弹性理论中的几个基本假设如下：

（1）假设物体是连续的——物体内部由连续介质组成，物体中没有空隙，因此物体中的应力、形变、位移等量是连续的，可以用坐标的连续函数表示．实际上，所有的物体均由分子构成，但分子的大小及分子间的距离与物体的尺寸相比是很微小的，故可以不考虑物体内的分子构造．根据这个假设所得的结果与实验结果是符合的．

（2）假设物体是匀质的和各向同性的——物体内部各点与各方向上的介质相同，因此物体各部分的物理性质是相同的．这样，物体的弹性常数（弹性模量，泊松系数）不随位置坐标和方向而变化．钢材由微小结晶体组成，晶体本身是各向异性的，但由于晶体很微小而排列又不规则，按其材料的平均性质，可以认为钢材是各向同性的．木材不是各向同性的．

（3）假设物体是完全弹性的——物体在外加因素（荷载，温度变化等）的作用下引起变形，在外加因素去除后，物体完全恢复其原来形状而没有任何剩余变形．同时还假定材料服从虎克定律，即应力与形变成正比．

（4）假设物体的变形是很小的——在荷载或温度变化等的作用下，物体变形而产生的位移，与物体的尺寸相比，是很微小的．在研究物体受力后的平衡状态时，可以不考虑物体尺寸的改变．在研究物体的形变时，可以略去形变的乘积，因此在微小形变的情况下弹性理论中的微分方程将是线性的．

（5）假设物体内无初应力——认为物体是处于自然状态，即在荷载或温度变化等作用之前，物体内部没有应力．也就是说，由弹性理论所求得的应力仅仅是由于荷载或温度变化等所产生的．物体中初应力的性质及数值与物体形成的历史有关．若物体中有初应力存在，则由弹性理论所求得的应力加上初应力才是物体中的实际应力．

上列基本假设中，第（4）假设是属于几何假设，其他假设是属于物理假设.

这些基本假设与材料力学中的基本假设是一样的. 但在材料力学中除上列基本假设外，对不同的问题还引用一些有关变形的假设，使计算得到简化. 与弹性理论相比较，其结论的精确程度与适用范围都受到一定的限制.

以上述基本假设为根据的弹性理论，称为**线性弹性理论**，也就是本书所要阐述的内容.

如物体中应力超过弹性极限，物体将处于塑性状态，此时应力与形变不是线性关系，这是物理上的非线性，研究物体处于塑性状态时的应力与形变的学科，称为**塑性理论**.

如物体的变形不是很微小的，因此不能略去形变的乘积不计，这就形成几何上的非线性，在弹性理论中将得出非线性微分方程，研究这种问题的弹性理论，称为**非线性弹性理论**.

如仅根据上述基本假设，对物体中的应力与形变进行研究，这样的弹性理论也可称为**数学弹性理论**. 如果除上述基本假设外，还引用某些补充的假设，例如对于薄板（或薄壳），引用补充的几何假设，即直线素的假设（在变形前垂直于中间平面的直线素，在变形后仍保持直线并垂直于曲面），这样的弹性理论也可称为**应用弹性理论**.

§1-3 弹性理论的基本方法

在材料力学中，求物体中的应力时，常采用截面法，即假想将物体剖开，取截面一边的部分物体作为截离体，利用静力平衡条件，以求得截面上的应力.

弹性理论解决问题的方法与材料力学的方法是不相同的. 在弹性理论中，假想物体内部为无数个单元平行六面体和表面为无数个单元四面体所组成. 考虑这些单元体的平衡，可写出一组平衡微分方程，但未知应力数总是超出微分方程数，因此弹性理论问题总是超静定的，必须考虑变形条件. 由于物体在变形之后仍保持连

续，所以单元体之间的变形必须是协调的；因此可得出一组表示形变连续性的微分方程．还要用广义虎克定律表示应力与形变之间的关系．另外，在物体表面上还须考虑物体内部应力与外荷载之间的平衡，称为边界条件．这样，我们有足够的微分方程数以求解未知的应力、形变与位移．所以我们解决弹性理论问题时，必须考虑静力平衡条件，形变连续条件与广义虎克定律，即是关于静力学，几何，物理等三个方面以及边界条件．

上述这些微分方程还可以综合简化为以应力为基本未知函数的微分方程，或以位移为基本未知函数的微分方程．这些都是偏微分方程，往往不能求得通解，常用所谓逆解法，即先设一解答，如这解答能满足所有的偏微分方程，同时满足边界条件，则这解答就是正确的解答，也是唯一的．有时也用所谓半逆解法，即先设一部分解答，另一部分在解题过程中求出．由于数学上的困难，弹性理论问题不是总能直接从解偏微分方程组得到解决的．对于复杂的实际问题，往往采用差分法、变分法、有限单元法来解决．

§1-4 通用的记号与正负号

在弹性理论的文献中，对于应力、形变、位移及弹性常数，有几种通用的记号，在这里介绍三种最通用的记号．

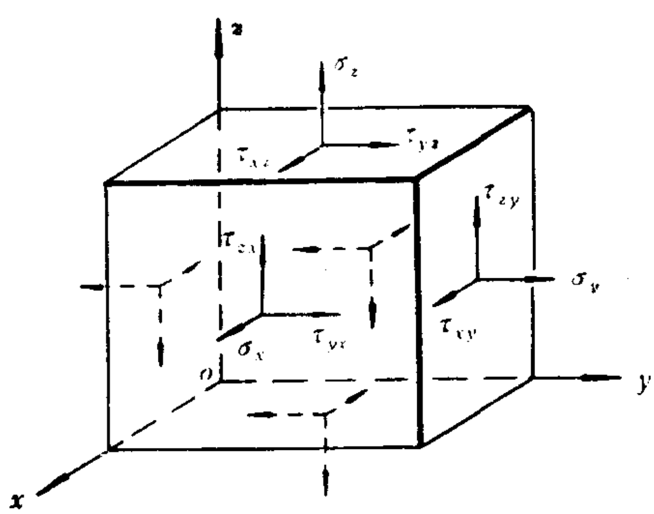

图 1-1

第一种记号中，σ 表示正应力，τ 表示剪应力(图 1-1)．σ_x 表示正应力作用的平面与 x 轴相垂直；τ_{yx} 表示剪应力作用的方向与 y 轴平行，而其作用的平面与 x 轴相垂直；余类推．共有三个正应力 σ_x，σ_y 及 σ_z 及三个剪应力 τ_{xy}，τ_{yz} 及 τ_{zx}，这六个量称为**应力分量**．

图 1-1 上所表示的六个面上的正应力与剪应力的方向都是正号. 正面(右,前,上面)上的应力,不论正应力或剪应力,以与正的坐标轴方向相同的为正,负面(左,后,下面)上的应力以与负的坐标轴方向相同为正.

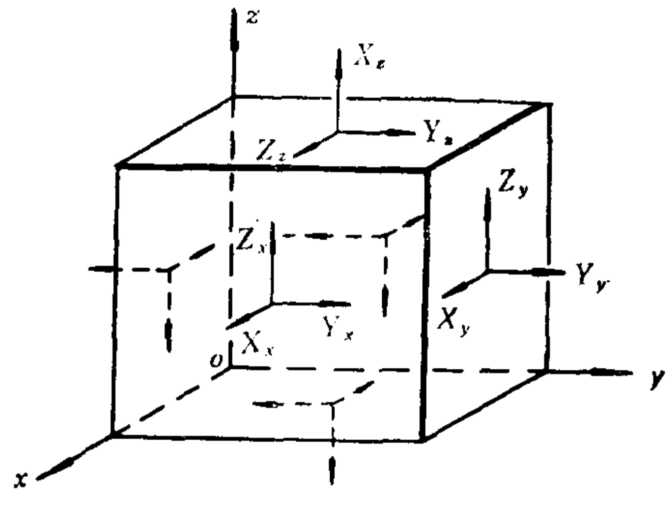

图 1-2

以 ε 表示正形变, γ 表示剪形变. ε_y 表示方向与 y 轴平行的正形变; γ_{yz} 表示发生在与坐标面 yoz 平行的一个平面内(图 1-3)的剪形变,是一个角度;余类推. 共有三个正形变 ε_x, ε_y, ε_z 与三个剪形变 γ_{xy}, γ_{yz}, γ_{zx}; 这六个量称为**形变分量**.

正形变以伸长为正,剪形变以使直角变小为正,图 1-3 所示的 ε_y 与 γ_{yz} 都是正的.

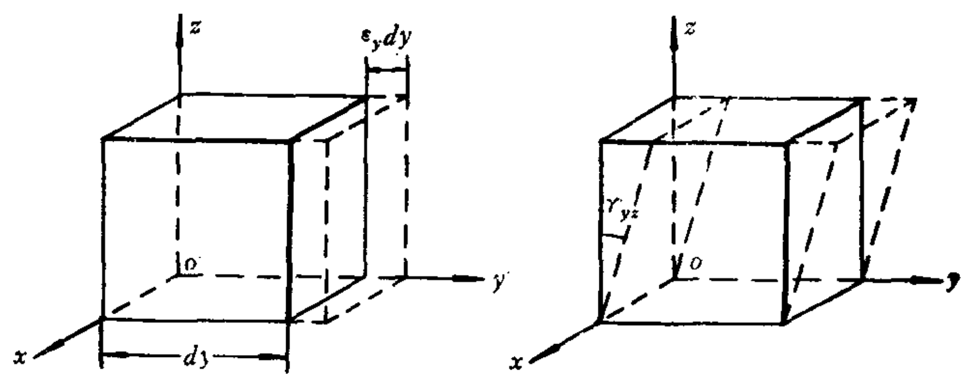

图 1-3

拉压及剪切弹性模量分别用 E 及 G 表示,泊松系数用 ν 表示.

位移在 x, y, z 三个方向上的投影, 分别用 u, v, w 表示, 称为**位移分量**.

在第二种记号中, X_x 表示正应力,作用的方向与 x 轴平行,而其作用的平面与 x 轴垂直; Y_x 表示剪应力, 作用的方向与 y 轴平行,而其作用的平面与 x 轴垂直;余类推(图 1-2).

正形变用 e_{xx}, e_{yy}, e_{zz} 及剪形变用 e_{xy}, e_{yz}, e_{zx} 表示. 位移分量也用 u, v, w 表示. 泊松系数用 σ 表示.还有第三种记号,说明从略.

兹将各种记号列表对照如下:

应力分量			形变分量			弹性常数	
一	二	三	一	二	三	一	二
σ_x	X_x	τ_{11}	ε_x	e_{xx}	e_{11}	E	E
σ_y	Y_y	τ_{22}	ε_y	e_{yy}	e_{22}	μ, G	μ, G
σ_z	Z_z	τ_{33}	ε_z	e_{zz}	e_{33}	ν	σ
τ_{xy}	X_y	τ_{12}	γ_{xy}	e_{xy}	e_{12}		
τ_{yz}	Y_z	τ_{23}	γ_{yz}	e_{yz}	e_{23}		
τ_{zx}	Z_x	τ_{31}	γ_{zx}	e_{zx}	e_{31}		

本书中采用第一种记号. 第三种记号便于运用张量计算.

§1-5 空间问题和平面问题

任何物体占有三度空间,在荷载或温度变化等的作用下,物体内产生的应力、形变、位移必然是三向的,一般说来,都是三个坐标 x, y, z 的函数,这样的问题称为**空间问题**.

当物体有特殊形状（三个尺寸中的一个尺寸远小于或远大于其他两个尺寸), 并受到特殊的外力分布或温度变化, 空间问题可以简化为**平面问题**, 只须考察平行于某一平面的应力、形变与位移, 这些量仅是二个坐标, 例如 x, y 的函数. 平面问题又可分为平面形变问题与平面应力问题,在以后将加以讨论.

第二章　应 力 分 析

§2-1　平衡方程

我们研究物体的平衡问题，首先从物体中取出一平行六面微分体加以研究(图2-1)．使平行六面微分体的面与各坐标面平行，并设其边分别为 dx, dy, dz，而其体积为 $d\tau = dxdydz$ (图 2-2)．这平行六面微分体受到其周围部分物体的作用；将每个侧面上受到的作用分别用三个应力分量表示，这些应力可以视为这六面微分体受到的外力．此外，物体中还存在有**体积力**，这种力分布在物体的质量上，例如物体的重力，物体受到的磁吸力及离心力等．

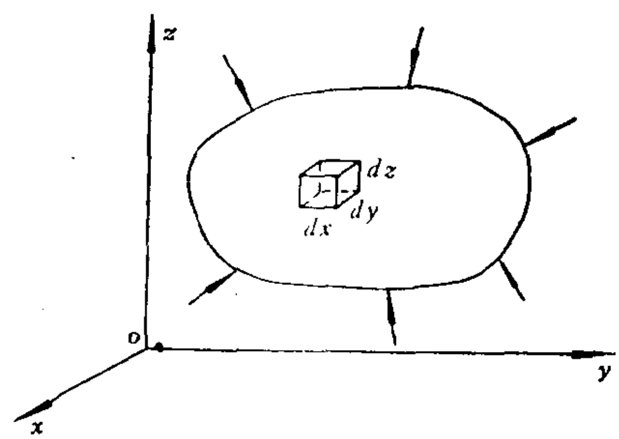

图　2-1

我们将体积力沿坐标轴分解为三个分力 X，Y，Z；作用于六面微分体上的体积力为 $Xd\tau$, $Yd\tau$, $Zd\tau$.

在物体内各点的应力，一般讲来，是不相同的，应力用该点的坐标 x, y, z 函数表示．在六面微分体的后面 $abcd$ 上作用的正应力为

$$\sigma_x = f(x, y, z)$$

在六面微分体的前面 $a'b'c'd'$，坐标 x 得到增量 dx，因此这面上的正应力是

$$\sigma'_x = f(x + dx, y, z)$$

上式可展开为级数

$$f(x+dx,y,z)=f(x,y,z)+\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}dx$$
$$+\frac{1}{1.2}\cdot\frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x^2}(dx)^2+\cdots\cdots$$

我们可以略去含有一阶以上的高阶微量的所有各项，得

$$\sigma_x'=\sigma_x+\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}dx$$

其他各应力均可依此类推. 今后我们将认为（除特殊情况）应力分量是坐标的连续函数，而且在物体全部域内还有连续的一阶偏导函数. 由于六面微分体的各面是无限小的，作用在这些面上的应力可以看作是均匀分布的.

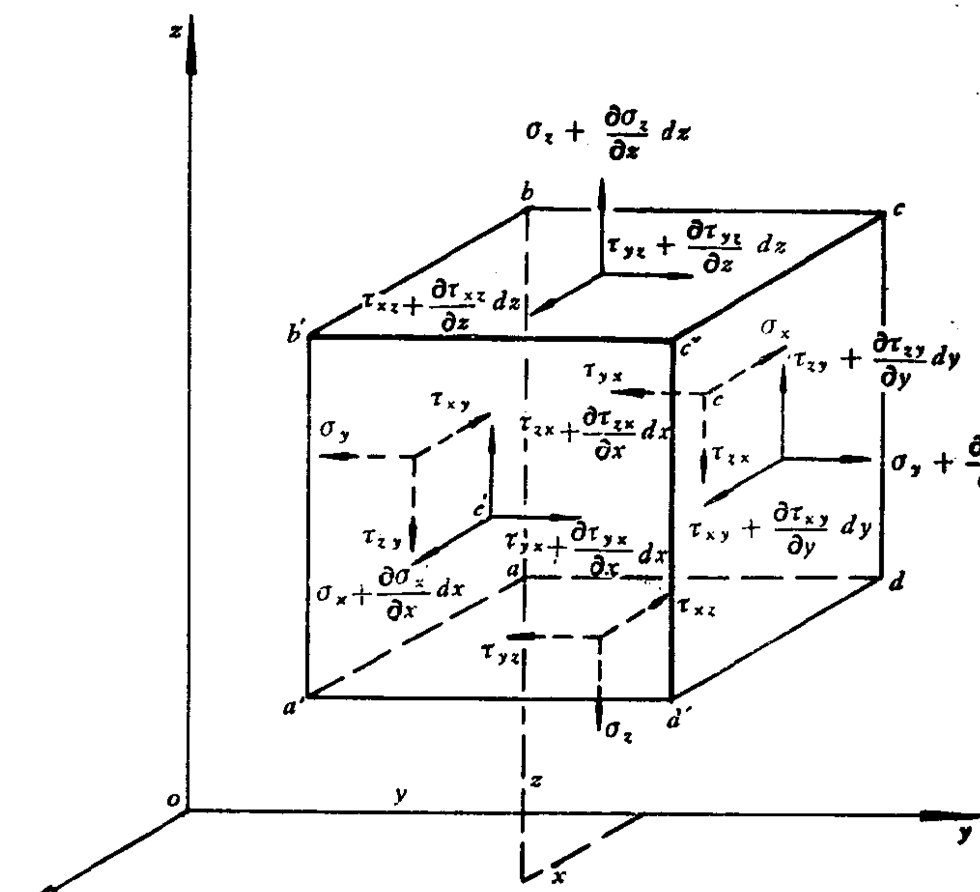

图 2-2

若所考虑的整个物体处于平衡状态，从它取出的六面微分体也应当处于平衡状态，所以六面微分体应满足六个静力平衡条件：

$$\Sigma X=0\qquad \Sigma Y=0\qquad \Sigma Z=0$$
$$\Sigma M_x=0\qquad \Sigma M_y=0\qquad \Sigma M_z=0$$