流體力學

習題詳解

上冊

原著 Frank M. White
編著 彭逸凡

曉園出版社
世界图书出版公司

前　　言

研習理工的同學，都有一種認識，那就是：一本書的習題往往是該書的精華所在，藉着習題的印證，才能對書中的原理原則澈底的吸收與瞭解。

有鑒於此，曉園出版社特地聘請了許多在本科上具有相當研究與成就的人士，精心出版了一系列的題解叢書，為各該科目的研習，作一番介紹與舖路的工作。

一個問題的解答方法，常因思惟的角度而異。曉園題解叢書，毫無疑問的都是經過一番精微的思考與分析而得。其目的在提供對各該科目研讀時的參考與比較；而對於一般的自修者，則有啓發與提示的作用。希望讀者能藉着這一系列題解叢書的幫助，而在本身的學問進程上有更上層樓的成就。

限

列日期前将

介

本书是 《流体力学》

(第二版)一书的习题详解(上册)

流体力学 习题详解

上 册

F.M.怀特 原著

彭逸凡 译著

晓 园 出 版 社 出版

世界图书出版公司北京分公司重印

(北京朝阳门内大街137号)

北 京 中 西 印 刷 厂 印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

1992年4月 重印 开本 850×1168 1/32

1992年4月第一次印刷 印张 11.75

印数: 0,001—1,900

ISBN: 7-5062-1164·5/O·22

定价: 9.30元

White流體力學問題詳解

（上冊目錄）

White流體力學問題詳解

（下冊目錄）

第一章　緒　　論

1.1　假如亞佛加厥常數是 6.023×10^{23} 個分子每一莫耳，求有多少個分子在1立方公分體積之(a)空氣(b)水(c)氫氣，和(d)氦中，1大氣壓，20°C。

解　$一分子之質量(g)=\dfrac{分子重量}{亞佛加厥常數}=\dfrac{M}{N}=m$

⇒　20°C　　1大氣壓下

(a)　$m_{air}=\dfrac{28.96}{N}=\dfrac{28.96}{6.023\times10^{23}}$

$=4.81\times10^{-23}$ gm/molecule（克／莫耳）

（密度）$\rho=1.205\times10^{-3}$（g／cm^3）

n（分子數目）$=\dfrac{\rho}{m}=2.5\times10^{19}$（molecules/cm^3）

(b)　$m_{water}=\dfrac{18.02}{N}=2.99\times10^{-23}$（gm/molecule）

ρ（密度）$=0.998$（gm/cm^3）

$n=\dfrac{\rho}{m}=3.3\times10^{22}$（molecules/cm^3）

(c)　氫：$M=2.016$

$\rho=8.38\times10^{-5}$（gm/cm^3）

$n=\dfrac{\rho N}{M}=2.5\times10^{19}$（molecules/cm^3）

(d)　氦：$M=4.003$

$\rho=1.47\times10^{-4}$（gm/cm^3）

$n=\dfrac{\rho N}{M}=2.5\times10^{19}$（molecules/cm^3）

1.2　在整個地球之大氣中估計分子之數目？

解　$m_{atoms}\cong\int_0^\infty\rho\,(4\pi Re^2)\,dz$

$\rho \cong \rho_o e^{-kz}$

$K \cong 10^{-4}$ （由表A.5）

因此 $m_{atoms} = \rho_o 4\pi \, Re^2 \int_0^\infty e^{-kz} \, dz = \dfrac{4\pi Re^2 \rho_0}{K}$

取 $\rho_o \cong 1.22 \ kg/m^3$ $\qquad Re \cong 6377 \ m$

$$m_{atoms} \cong \frac{4\pi (6377000)^2 (1.22)}{(10^{-4})} = 6.2 \times 10^{18} \ (kg)$$

$$\Rightarrow \quad n_{atoms} = \frac{m_{atoms}}{m_{molecule}} = \frac{6.2 \times 10^{21} \ (g)}{4.81 \times 10^{-23} \ (g/molecule)}$$

$$\cong 1.3 \times 10^{44} \ (molecules)$$

1.3 當一氣體每立方毫米所含的分子量少於10^{12}個時，就開始不符合連續體的概念，在20°C時，此極限之氣體所對應之絕對壓力爲多少巴斯卡？

解 10^{12} molecules／mm^3

$= 10^{21}$ molecules／m^3 $\times 4.81 \times 10^{-26}$kg／molecule

$= 4.8 \times 10^{-5} \ (kg/m^3)$

在20°C $\quad p = \rho RT$

$= (4.8 \times 10^{-5})(287)(273+20)$

$= 4$ (pascals)

1.4 假如一透明密封之容器充滿了清澈之流體，沒有可見之凹凸面亦無其他界面之存在，在沒有打開容器下，如何判斷此流體是液態或氣態。

解 (a) 若此流體之熱動力學上的性質已知，可以秤其重量或測量音速，以及其他實驗來決定其狀態。

(b) 若流體的性質未知，那麼只有冷却容器直到某一界面或固態晶粒出現。

1.5 一有傾口的圓柱形燒杯的直徑爲3 in，高爲5 in，淨重9 oz，而當裝滿某種液體時，重35 oz，試求出液體的密度，分別以SI及BG單位表示。

解 1 oz = 31.1035 g

$$V=\frac{\pi}{4}\left(\frac{3}{12}\right)^2\cdot\frac{5}{12}=0.02045\ \text{ft}^3$$

$$\Rightarrow\rho=\frac{0.0311035\times\dfrac{1}{14.5939}}{0.02045}=0.1042\ \text{slug/ft}^3$$

$$=53.714\ \text{kg/m}^3$$

1.6 假如1 ft^3 的水倒入正圓錐容器，此容器高18 in，底直徑爲20 in，問其液面的高度？須再加入多少水才能充滿容器？

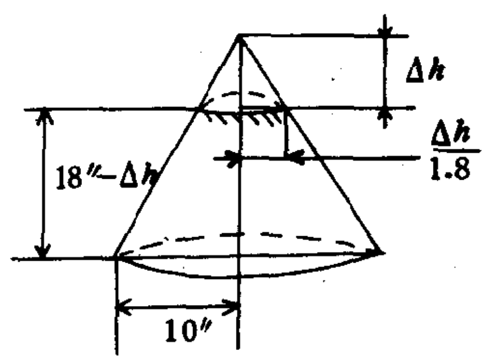
解 $V_{cone}=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi(10^2)(18)=1885\ (\text{in}^3)$

$1\ \text{ft}^3=1728\ \text{in}^3$

$\Delta V=1885-1728=\underline{157\ \text{in}^3}$

$157\ \text{in}^3=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{\Delta h}{1.8}\right)^2\Delta h\Rightarrow\Delta h=7.86$

water level $=h-\Delta h=18-7.86=\underline{10.14''}$



1.7 若習題1.6的圓錐形容器可裝滿27 kg 的油，試求此油的密度，分別以SI及BG單位表示。

解 $\rho(\text{BG})=\frac{M}{V}=\frac{27\,\text{kg}}{1885\ \text{in}^3}$

$$=\frac{(27)\left(\dfrac{1}{14.5939}\right)\text{slug}}{(1885)\left(\dfrac{1}{12}\right)\left(\dfrac{1}{12}\right)\left(\dfrac{1}{12}\right)\text{ft}^3}=1.696\ \text{slug/ft}^3$$

$$\rho(SI) = (1.696)(515.4)\ kg/m^3$$
$$= 874.12\ kg/m^3$$

1.8 下列何者物理法則可以適用於分析流體運動：

(a) 波義耳定律 (b) 查理定律 (c)牛頓第二定律 (d)歐姆定律

(e) 熱力學第一定律 (f) 虎克定律 (g) 熱力學第二定律

(h) 理想氣體定律 (i) 道耳吞定律。

解 (c)、(e)、(g)、(h)

1.9 假如式子（1.2）被寫成 $F=ma/g_c$，g_c 爲變換常數，g_c 之數值爲何？

(a) 當 F 的單位是使用磅重，m 爲磅，a 爲英呎每平方秒。

(b) 當 F 的單位爲達因，m 爲克，a 爲公分每平方秒。

(c) 當 F 的單位爲公斤重，m 爲公斤，a 爲米每平方秒。

解 (a) $g_c = 32.2\ (1bm \cdot ft / 1bf\ s^2)$

(b) $g_c = 1.0\ (gm \cdot cm / dyne \cdot s^2)$

(c) $g_c = 9.81\ (kg \cdot m / kgf\ s^2)$

1.10 在 $\{MLT\Theta\}$ 制中，下列單位表示爲何？

(a) 動量 (b) 彈性係數 (c) 動黏滯係數 (d) 質量流動速率

(e) 角加速度 (f) 熱流傳動速率 (g) 熵 ？

解 (a) ML^2/T^2

(b) M/LT^2

(c) L^2/T

(d) M/T

(e) T^{-2}

(f) ML^2/T^3

(g) ML^2/T^2

1.11 一質量爲 3 kg 之物體置於一個行星上，其重力加速度爲 $5.0m/s^2$。

(a) 其質量爲多少公斤？

(b) 重量爲多少牛頓？

(c) 須多少力，使其具有$2.0\,m/s^2$之加速度？

解 (a) 3 kg

(b) $W = mg = 3(5) = 15\,N$

(c) $F = ma = 3(2) = 6\,N$

1.12 SAE70號潤滑油在100°F時的黏滯係數爲0.0088 slug/(ft·s)，若以kg/(m·s)爲單位，其值爲若干？若油重$55\,lbf/ft^3$，則其流動黏滯係數$\nu = \mu/\rho$爲若干，以m^2/s爲單位。

解 $\mu = 0.0088\,slug/(ft\cdot s)$

$= (0.0088)(47.88)\,kg/(m\cdot s)$

$= 0.4213\,kg/(m\cdot s)$

$$\rho = \frac{55}{32.174}\,slug/ft^3 = 1.709\,slug/ft^3$$

$= (1.709)(515.4)\,kg/m^3$

$= 881.053\,kg/m^3$

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = \frac{0.4213}{881.053}\,m^2/s = 4.782\times10^{-4}\,m^2/s$$

1.13 （見圖P1.13）對於圓管內的低速（層流）流動，其速度分佈爲

$$u = \frac{B}{\mu}(r_0^2 - r^2)$$

式中μ爲流體的黏滯係數，試求常數B的單位。

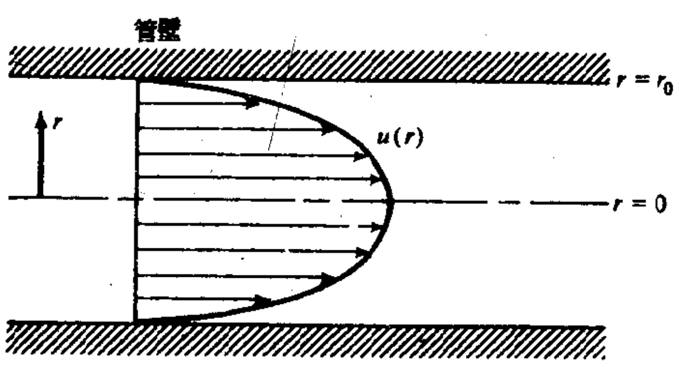


圖 P1.13

解 $u = \dfrac{B}{\mu}(r_0^2 - r^2)$

$$\Rightarrow \quad [LT^{-1}] = \frac{[B]}{[ML^{-1}T^{-1}]}[L^2]$$

$$\Rightarrow [B] = [MT^{-2}L^{-2}]$$

1.14 氣體的平均自由碰撞間距 l 乃指氣體分子在前後兩次碰撞間所走的平均距離，根據動力學理論（kinetic theory）[7]，理想氣體的平均值是

$$l = 1.26\frac{\mu}{\rho}(RT)^{-1/2}$$

式中 R 爲氣體常數，T 爲絕對溫度，則常數 1.26 是無因次的嗎？

解 $l = 1.26\dfrac{\mu}{\rho}(RT)^{-1/2}$

$$[L] = [1.26]\frac{[ML^{-1}T^{-1}]}{[ML^{-3}]}\{[L^2T^{-2}\theta^{-1}][\theta]\}^{-1/2}$$

$$\Rightarrow \quad [1.26] = M^0L^0T^0\theta^0$$

∴ 1.26 是個無因次常數。

1.15 對於低速（速度 V）通過一球體（直徑 D）的流動，我們可用 Stokes-Oseen 公式 [16]

$$F = 3\pi\mu DV + \frac{9\pi}{16}\rho V^2D^2$$

來求阻力 F，試問：此式子具有因次一致性嗎？

解 $F = 3\pi\mu DV + \dfrac{9\pi}{16}\rho V^2D^2$

F : $[MLT^{-2}]$

$3\pi\mu DV$: $[ML^{-1}T^{-1}][L][LT^{-1}] = [MLT^{-2}]$

$\dfrac{9\pi}{16}\rho V^2D^2$: $[ML^{-3}][LT^{-1}]^2[L]^2 = [MLT^{-2}]$

故 Stokes-Oseen 公式合乎因次一致性。

1.16 兩流體介面的波速 C 爲

$$C = \left(\frac{\pi\gamma}{\rho_e\lambda}\right)^{1/2}$$

式中 λ 爲波長，ρ_e 爲兩流體的平均密度。若此式的因次是一致的，試求 γ 的單位，它可能代表什麼？

解 $C = \left(\dfrac{\pi\gamma}{\rho_e\lambda}\right)^{1/2}$

上式要合乎因次一致

則：$[LT^{-1}] = \left\{\dfrac{[\gamma]}{[ML^{-3}][L]}\right\}^{1/2}$

$\Rightarrow \quad [\gamma] = [MT^{-2}]$

γ 與表面張力同因次，所以可能代表表面張力。

1.17 空氣的比熱在室溫條件下，大約爲0.24 Btu／(lb・°F)，在熱力學計算上這是一個有用的單位；在流體力學上 c_p 看成每度速度的平方是更方便的表示法，如表 1.2，試求在(a)(b)問題中空氣的比熱。

流體力學中的二次因式

二次因式	SI 單位	BG 單位	轉換因子
面積 $\{L^2\}$	m^2	ft^2	1 m^2 = 10.764 ft^2
體積 $\{L^3\}$	m^3	ft^3	1 m^3 = 35.315 ft^3
速度 $\{LT^{-1}\}$	m/s	ft/s	1 ft/s = 0.3048 m/s
加速度 $\{LT^{-2}\}$	m/s^2	ft/s^2	1 ft/s^2 = 0.3048 m/s^2
壓力或應力 $\{ML^{-1}T^{-2}\}$	Pa = N/m^2	lbf/ft^2	1 lb[illegible]^2 = 47.88 Pa
角速度 $\{T^{-1}\}$	s^{-1}	s^{-1}	1 s^{-1} = 1 s^{-1}
能，熱，功 $\{ML^2T^{-2}\}$	J = N · m	ft · lbf	1 ft · lbf = 1.3558 J
功率 $\{ML^2T^{-3}\}$	W = J/s	ft · lbf/s	1 ft · lbf/s = 1.3558 W
密度 $\{ML^{-3}\}$	kg/m^3	$slugs/ft^3$	1 $slug/ft^3$ = 515.4 kg/m^3
黏度 $\{ML^{-1}T^{-1}\}$	kg/(m · s)	slugs/(ft · s)	1 slug/(ft · s) = 47.88 kg/(m · s)
比熱 $\{L^2T^{-2}\Theta^{-1}\}$	$m^2/(s^2 \cdot K)$	$ft^2/(s^2 \cdot °R)$	1 $m^2/(s^2 \cdot K)$ = 5.980 $ft^2/(s^2 \cdot °R)$

表 1.2

(a) 單位爲平方英呎比上每平方秒 Rankine 。

(b) 單位爲平方米比上平方秒 kelvin ？

解 (a) $C_p = 0.24\ \text{Btu}/\text{lbm}°\text{F} \times 778.2\ \text{ft}\cdot\text{lbf}/\text{Btu} \times \text{lbm}/\text{slug}$

$= 6010\ (\text{ft}^2/\text{s}^2\,°\text{R})$

(b) $C_p = 6010\ ft^2/s^2\,°R \times (0.3048\,m/ft)^2 \times 1.8\,°R/k$
$= 1005\ (m^2/s^2\,k)$

1.18 我們已經知道代數的物理方程式　如伯努利方程式（1.4）各項單位一致，在物理學上微分方程其單位是否也都能一致呢？例如決定熱傳方程式

$$\rho C_p\, \partial T/\partial t = k\, \partial^2 T/\partial x^2$$

其單位是否一致，由這個結果你能寫出一般性結論？

解　所有符合物理意義的微分方程式其單位皆會一致。

1.19 馬力是功率之單位等於 550 ft-lbf／sec，若有一 25 馬力的馬達操作 12 小時則多少仟瓦小時之能量被消耗？

解　$25 \times 0.7457 \times 12 = 224\ (kWh)$

1.20 Hazen-Williams 公式在水力文獻上是一個很著名的公式，其中流量速率 Q，管徑 D，壓力梯度 dp/dx

$$Q = 61.9\, D^{2.63} \left(\frac{dp}{dx}\right)^{0.54}$$

其中常數 61.9 的單位爲何？

解　$[Q] = [L^3/T] = [61.9]\,[L]^{2.63}\,[M/L^2T^2]^{0.54}$
$\therefore\quad [61.9] = L^{1.45}\, T^{0.08}/M^{0.54}$

1.21 一速度場爲 $u = 3y^2$，$v = 2x$，$w = 0$，　其單位是任意的，則此流場是穩定的嗎？是二維或三維的流動？試就（x，y，z）=（2，1，0），求出(a)速度，(b)局部加速度，(c)對流加速度。

解　速度場　$\vec{V} = 3y^2\vec{i} + 2x\vec{j}$
此速度場不爲時間之函數，故爲穩態流。
又此速度場只是平面 xy 之函數，在 z 方向沒有變化（不爲 z 之函數）故爲二維流場。
(a) 於（2，1，0）

$$\vec{V}=3(1)^2\vec{i}+2(2)\vec{j}=3\vec{i}+4\vec{j}$$

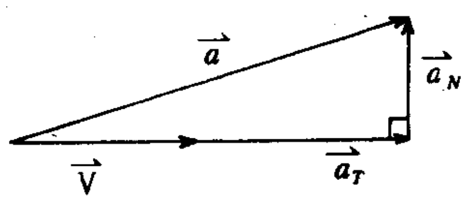
(b) $\dfrac{\partial\vec{V}}{\partial t}=0$，故局部加速度等於 0 。

(c)
$$\begin{aligned}(\vec{V}\cdot\nabla)\vec{V}&=(3y^2)(2\vec{j})+(2x)(6y\vec{i})\\&=12xy\vec{i}+6y^2\vec{j}\\&=12(2)(1)\vec{i}+6(1)^2\vec{j}\\&=24\vec{i}+6\vec{j}\end{aligned}$$

1.22 對於習題 1.21 的速度場，試就（ 2 ，1 ，0 ）點，求(a)與速度向量平行的加速度分量，(b)與速度方向垂直的加速度分量；(b)的答案並不等於零，此答案代表什麽？

解 由 1.22 知，於點（ 2 ，1 ，0 ） $\vec{V}=3\vec{i}+4\vec{j}$

$$\vec{a}=24\vec{i}+6\vec{j}$$



則於$\vec{V}$上之單位向量爲 $\vec{e}_V=\dfrac{3}{5}\vec{i}+\dfrac{4}{5}\vec{j}$

(a) 加速度$\vec{a}$可分成沿速度方向之切線加速度 $\vec{a}_T$ 與垂直速度方向之法線加速度 $\vec{a}_N$

而 $\vec{a}=\vec{a}_T+\vec{a}_N$

$$\vec{a}_T=\vec{a}\cdot\vec{e}_V=(24\vec{i}+6\vec{j})\cdot(\frac{3}{5}\vec{i}+\frac{4}{5}\vec{j})=19.2$$

(b)
$$\begin{aligned}\vec{a}_N=\vec{a}-\vec{a}_T&=(24\vec{i}+6\vec{j})-(19.2)(\frac{3}{5}\vec{i}+\frac{4}{5}\vec{j})\\&=12.48\vec{i}-9.36\vec{j}\end{aligned}$$

$\therefore|\vec{a}_N|=15.6$

$|\vec{a}_N|\neq 0$ 表 $\vec{a}_N\neq 0$，即有向心加速度，如此則速度之“方向”會改變。

1.23 一理想速度流場爲

$$\vec{V} = 3tx\vec{i} - t^2y\vec{j} + 2xz\vec{k}$$

這個流動是穩定的嗎？是二維流動，還是三維流動？試就（ x ， y ， z ）＝（ 1 ，－1，0 ），計算(a)全加速度向量，(b)與加速度垂直的單位向量。

解 $\vec{V} = 3tx\vec{i} - t^2y\vec{j} + 2xz\vec{k}$

此速度場爲時間之函數，故爲非穩態流。

又此速度場爲空間（ x ， y ， z ）之函數，故爲三維流場。

(a) $\vec{a} = \dfrac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V}$

$$= \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + u\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w\frac{\partial \vec{V}}{\partial z}$$

$$= 3x\vec{i} - 2ty\vec{j} + (3tx)(3t\vec{i} + 2z\vec{k}) + (-t^2y)(-t^2\vec{j}) + (2xz)(2x\vec{k})$$

$$= (3x + 9t^2x)\vec{i} + (-2ty + t^4y)\vec{j} + (6txz + 4xz)\vec{k}$$

於點（ 1 ，－1 ，0 ）

$\vec{a} = (3+9t)\vec{i} + (2t - t^4)\vec{j}$ ，爲時間之函數。

(b) 由(a)中， $\vec{a} = (3+9t)\vec{i} + (2t - t^4)\vec{j}$

可看出加速度沒有 z 方向之分量，所以我們可以很容易的找到一單位向量 $\vec{k}$ 垂直 $\vec{a}$ 。

1.24 對於習題1.13的管流速度場，試求(a)最大速度，以 B 、 μ 、 r_0 表示；(b)採用（1.19）式求出質量流量，以 B 、 μ 、 r_0 表示。

解 $u = \dfrac{B}{\mu}(r_0^2 - r^2)$

(a) 由上式，或圖 1.13 均可看出 u_{max} 位於 $r = 0$ 處

$$\Rightarrow \quad u_{max} = \frac{B}{\mu}(r_0^2 - 0^2) = \frac{B}{\mu}r_0^2$$

(b) $$\dot{m} = \int_s \rho(\vec{V} \cdot \vec{n})\,dA$$

$$= \int_0^{r_0} \rho\left[\frac{B}{\mu}(r_0^2 - r^2)\right] \cdot (2\pi r\,dr)$$

若流體之ρ，μ為定值，則上式更可化簡成：

$$\dot{m}=\rho\cdot\frac{B}{\mu}\cdot 2\pi\int_0^{r_0}(r_0^2\cdot r-r^3)\,dr$$

$$=2\pi B\cdot\left(\frac{\rho}{\mu}\right)\cdot\frac{1}{4}r_0^4$$

$$=\frac{\pi B}{2}\left(\frac{\rho}{\mu}\right)r_0^4$$

1.25 一穩定流通過一個錐狀噴口，其軸向速度大約為

$$u=U_o\left(1-\frac{x}{L}\right)^{-2}$$

其中U_o為入口速度，L為至明顯漩渦的距離，計算

(a) 對軸向加速度du/dt之一般表示法。

(b) 若$U_0=5$ m/ sec 及$L=2$ m在入口及$x=1$ m處，加速度為多少個$g's$。

解 (a) $\dfrac{du}{dt}\cong u\dfrac{\partial u}{\partial x}$

$$u=U_o\left(1-\frac{x}{L}\right)^{-2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-2U_o\left(1-\frac{x}{L}\right)^{-3}\left(-\frac{1}{L}\right)$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2U_o^2}{L}\left(1-\frac{x}{L}\right)^{-5}$$

(b) 在：$U_o=5$　，　$L=2$　，　$x=1$

$$\frac{du}{dt}=\frac{2\times 5^2}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{-5}$$

$$=800\ (\mathrm{m/s^2})=81.63\ g's$$

1.26 一個二度空間的速度場為

$$\mathbf{V}=(x^2-y^2+x)\,\mathbf{i}-(2xy+y)\,\mathbf{j}$$

單位任取，在$x=2$，$y=1$計算

(a) 加速度 a_x 及 a_y 。

(b) 速度在 $\theta=30^\circ$ 之分量。

(c) 最大速度及加速度的方向。

解 $\mathbf{V}=(x^2-y^2+x)\,\mathbf{i}-(2xy+y)\,\mathbf{j}$

(a) $a_x=u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial y}$

$=(x^2-y^2+x)(2x+1)+(-2xy-y)(-2y)$

$=35$〔過 $(2,1)$〕

$a_y=u\dfrac{\partial v}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial y}$

$=(x^2-y^2+x)(-2y)+(-2xy-y)(-2x-1)$

$=15$〔過 $(2,1)$〕

(b) $\mathbf{V}(2,1)=5\mathbf{i}-5\mathbf{j}$

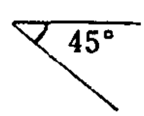
$\mathbf{n}_{30^\circ}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i}+\dfrac{1}{2}\mathbf{j}$

$V_{30^\circ}=\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}_{30^\circ}$

$=\dfrac{5}{2}(\sqrt{3}-1)$

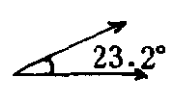
(c) 最大速度爲

$V=\sqrt{25+25}=\sqrt{50}$



最大加速度

$\dfrac{dV}{dt}=\sqrt{35^2+15^2}=\sqrt{1450}$



1.27 二度空間壓力場 $p=4x^3-2y^2$ ，配合問題1.26的速度場，計算在 $x=2$ ， $y=1$ 的 dp/dt 。

解 $p=4x^3-2y^2$

$\dfrac{\partial p}{\partial x}=12x^2$

$\dfrac{\partial p}{\partial y}=-4y$

在 $(2,1)$